Examen du 18 janvier 2008, FIMFA, Systèmes Dynamiques, Durée 3h

Exercice 1 On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle et pour tout $\alpha \in \mathbb{T}$, T_α la rotation d'angle α, $T_\alpha : x \mapsto x + \alpha$. Le but de l'exercice est le suivant : étant donnés $\alpha \in \mathbb{T}$ irrationnel et J une union finie d'intervalles (fermés), dans quelle mesure l'itinéraire de 0 dans J, c'est-à-dire la suite $(\mathbf{1}_J(T_\alpha^k 0))_{k\in\mathbb{N}}$, détermine-t-il α et J ?

1. Démontrer que si α est irrationnel et si J est un intervalle ou une union (disjointe) d'intervalles, pour tout point $z \in \mathbb{T}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_J(T_\alpha^k z) = \lambda(J)$$

où λ est la mesure de Lebesgue. La convergence précédente est-elle uniforme en $z \in \mathbb{T}$?

2. On dit que ρ est valeur propre de T_α s'il existe une fonction $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\varphi \circ T_\alpha = \rho\varphi$. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T_α.

3. On dit qu'une union d'intervalles J n'a pas de symétrie de rotations si pour aucun entier n, $J + (1/n) = J$. Démontrer qu'alors, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $J + t \neq J$.

4. On suppose dans la suite que α est irrationnel et que J est un intervalle ou une union d'intervalles sans symétrie de rotations, et on note $\psi_{\alpha,J} : \mathbb{T} \to \Sigma$ ($\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$) l'application qui à $x \in \mathbb{T}$ associe la suite $(\mathbf{1}_J(T^k x))_{k\in\mathbb{N}}$. On munit Σ de la tribu borélienne engendrée par les cylindres finis et $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ le décalage $\sigma((\omega_k)_{k\in\mathbb{N}}) = (\omega_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.

4.a. Démontrer que $\psi_{\alpha,J}$ est mesurable et injective et que $\psi_{\alpha,J} \circ T_\alpha = \sigma \circ \psi_{\alpha,J}$.

4.b. On note $\mu_{\alpha,J}$ la mesure de probabilité sur Σ image de λ par $\psi_{\alpha,J}$: $\mu_{\alpha,J} = (\psi_{\alpha,J})_*\lambda$. Démontrer que pour tout cylindre fini $C \subset \Sigma$ de la forme $C(\epsilon, n) = \{\omega \in \Sigma : \omega_k = \epsilon_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ où $\epsilon \in \{0,1\}^{n+1}$ on a

$$\mu_{\alpha,J}(C(\epsilon,n)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_C(\sigma^k(\psi_{k,\alpha}(0)).$$

(On démontrera que la limite précédente existe).

4.c. On suppose que $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ sont irrationnels et que J, K sont des unions finies d'intervalles sans symétrie de rotations. Démontrer que si les itinéraires de 0 dans J sous T_α et dans K sous T_β sont les mêmes (c'est-à-dire si $\psi_{\alpha,J}(0) = \psi_{\beta,K}(0)$) alors T_α et T_β sont mesurablement conjugués : il existe

$h : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, inversible bi-mesurable (défini modulo des ensembles de mesures de Lebesgue nulles) tel que $T_\beta = h \circ T_\alpha \circ h^{-1}$.

4.d. En utilisant la question 2. démontrer que $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -\beta$.

4.e. En déduire que $\lambda(J) = \lambda(K)$. Démontrer que si J et K sont des intervalles fermés, alors $J = K$ si $\alpha = \beta$ et $J = -K$ si $\alpha = -\beta$.

5. On suppose à présent que $\alpha = \beta$ est irrationnel et que J et K sont des unions finies d'intervalles (fermés pour simplifier) sans symétrie de rotations et que $\psi_{\alpha,J}(0) = \psi_{\alpha,K}(0)$.

5.a. Démontrer que la conjugaison h déterminée dans la question 4.c vérifie $h(J) = K$ modulo un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

5.b. Démontrer que nécessairement h coïncide Lebegue-p.p. avec une rotation et que $J = K$.

6. Que dire de l'extension du résultat précédent au cas où T_α est un homéomorphisme ou un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation α ?

Exercice 2 Le but de cet exercice est de démontrer que si $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ est un système dynamique mesurable *d'entropie nulle* alors il est *disjoint* du décalage $(\Sigma, \mathcal{B}, \nu, \sigma)$ [1] ce qui signifie que la seule mesure λ sur $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ invariante par $\tilde{\sigma} := T \times \sigma : X \times \Sigma \to X \times \Sigma$, $\tilde{\sigma}(x, y) = (Tx, \sigma y)$, qui se projette sur μ par l'application de projection $X \times \Sigma \to X$ et sur ν par l'application de projection $X \times \Sigma \to \Sigma$ (on dit alors que λ est un couplage) est la mesure produit $\mu \otimes \nu$.

On suppose dans la suite que λ est un couplage.

1. Démontrer que si ξ est une partition mesurable finie (p.m.f.) dont les atomes sont dans $\mathcal{B}$ alors $H_\nu(\xi) - h_\nu(\xi, \sigma^N)$ est positive et tend vers 0 quand N tend vers l'infini. On démontrera pour cela que si η_n est la partition de Σ dont les atomes sont les cylindres [2] $C(n, \epsilon)$ de longueur n, on a pour $N \geq n + 1$, $h_\nu(\eta_n, \sigma^N) = H_\nu(\eta_N | \bigvee_{k=1}^{\infty} \sigma^{-kN} \eta_N) = H_\nu(\eta_n)$, puis on utilisera un argument d'approximation.

2. On dit que les tribus (resp. p.m.f.) $\mathcal{A}$ (resp. η dont les atomes sont dans $\mathcal{A}$) et $\mathcal{B}$ (resp. ξ dont les atomes sont dans $\mathcal{B}$) sont indépendantes si pour tous $A \in \mathcal{A}$ (resp. $A \in \eta$) $B \in \mathcal{B}$ (resp. $B \in \xi$) on a $\lambda(A \times B) = \lambda(A) \times \lambda(B)$ $(= \mu(A)\nu(B))$. Le but de cette question est de démontrer que si η est une p.m.f. dont les atomes sont dans $\mathcal{A}$ et ξ une p.m.f. dont les atomes sont dans $\mathcal{B}$ alors ξ et η sont λ-indépendantes. Nous raisonnerons par l'absurde

[1] $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par les cylindres, σ est le décalage à droite et ν est la mesure de Bernoulli

[2] $C \subset \Sigma$ de la forme $C(\epsilon, n) = \{\omega \in \Sigma : \omega_k = \epsilon_k,\ 0 \leq k \leq n - 1\}$ où $\epsilon \in \{0, 1\}^{n-1}$

et supposerons dans les questions 2.a, 2.b, 2.c que ξ et η ne sont pas λ-indépendantes.

2.a. Supposons que ξ et η ne soient pas λ-indépendantes. Démontrer que $H_\lambda(\xi|\eta) < H_\lambda(\xi)$.

2.b. Démontrer que pour tout N

$$h_\lambda(\xi, \tilde{\sigma}^N) \leq h_\lambda(\xi \vee \eta, \tilde{\sigma}^N) \leq \frac{1}{L}\left(H_\mu(\bigvee_{k=0}^{L-1} T^{-kN}\eta) + H_\lambda(\bigvee_{k=0}^{L-1} \tilde{\sigma}^{-kN}\xi | \bigvee_{k=0}^{L-1} \tilde{\sigma}^{-kN}\eta)\right)$$

2.c. Démontrer que la formule précédente implique que $H_\lambda(\xi) \leq H_\lambda(\xi|\eta)$ ce qui contredit l'hypothèse faite en 2.a. (On pourra s'inspirer d'une des preuves faites en cours.)

3. Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont λ-indépendantes et conclure.

Exercice 3* Soient $0 < c < 1 < a$ tels que $ac > 1$. Notons pour $\varepsilon > 0$ $g_\varepsilon : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ tel que $g_\varepsilon(x, y, z) = (ax, ac(y + \varepsilon xz), cz)$. Démontrer qu'il n'existe pas de conjugaison de classe C^1 entre g_ε et g_0.