Systèmes dynamiques - FIMFA - 2009-10

Corrigé de l'examen

25 janvier 2010 — 9h30-12h30

I. Théorème de récurrence de Poincaré

(1) L'application $f : [0,1] \to [0,1]$ définie par $f(x) = 10x$ (modulo 1) préserve la mesure de Lebesgue normalisée sur $[0,1]$. Si J_k est l'intervalle $[k/10, (k+1)/10[$, pour $k = 0, 1, \ldots 9$ alors le $j$ème chiffre du développement $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ de $x \in [0,1)$ en base 10 est égal à k si et seulement si $f^{j-1}(x) \in J_k$. Plus généralement, pour $m \geq 1$, si J_k^m est l'intervalle $[k/10^m, (k+1)/10^m[$, pour $k = 0, 1, \ldots 10^m - 1$ alors les chiffres x_j à x_{j+m-1} du développement $x = 0.x_1x_2x_3\ldots$ de $x \in [0,1)$ en base 10 sont égaux à $k_0, k_1, \ldots, k_{j+m}$ si et seulement si $f^{j-1}(x) \in J_k$ pour $k = \sum_{i=0}^{m-1} k_i 10^{m-1-i}$. (Noter que $J_k = \cap_{i=0}^{m-1} f^{-i}(J_{k_i})$.) On applique le théorème de récurrence de Poincaré (qui dit que si $E \subset [0,1]$ est de mesure de Lebesgue positive alors l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe une suite $\ell_j \to \infty$ avec $f^{\ell_j}(x) \in E$ est de mesure totale dans E) à chacun des $E = J_k^m$, ce qui donne un ensemble de mesure totale pour chaque m. Une intersection dénombrable d'ensembles de mesure totale étant de mesure totale, on a terminé.
Le nombre 0.12323323332(3^4)2...2(3^j)2(3^{j+1}).... Il y a beaucoup d'autres exemples...

(2) La fonction $(\log 2(1+x))^{-1}$ est strictement positive et bornée sur $[0,1]$. Son intégrale vaut 1 car $\int_0^1 (1+x)^{-1}\, dx = \log(1+x)|_0^1 = \log(2)$. Il suffit donc de voir que $\mu_0(\varphi^{-1}[0,y]) = \mu_0([0,y])$ pour tout $y \in (0,1)$. D'une part

$$\int_0^y \frac{1}{1+x}\, dx = \log(1+y)\,.$$

D'autre part $\varphi^{-1}[0,y] = \cup_{k=1}^{\infty}[\frac{1}{y+k}, \frac{1}{k}]$ et

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} \int_{\frac{1}{y+k}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+x}\, dx &= \sum_{k\geq 1} \log(1+z)|_{z=\frac{1}{y+k}}^{\frac{1}{k}} \\ &= \sum_{k\geq 1} \log\frac{k+1}{k} - \log\frac{y+k+1}{y+k} = -\log\frac{1}{y+1}\,.\end{aligned}$$

(3) Si I_k est l'intervalle $(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, pour les entiers $k \geq 1$ alors le $j$ème chiffre $n_j(x)$ de la fraction continue d'un nombre irrationnel $x \in (0,1)$ est égal à k si et seulement si $\varphi^{j-1}(x) \in I_k$. Plus généralement, pour $m \geq 1$, si $I^m_{k_0\ldots k_{m-1}}$ est l'intervalle $\cap_{\ell=0}^{m-1} \varphi^{-\ell}(I_{k_\ell})$ alors les chiffres $n_j(x), \ldots, n_{j+m-1}(x)$ de la fraction continue de

$x \in [0,1)$ sont égaux à $k_0, k_1, \ldots, k_{m-1}$ si et seulement si $\varphi^j(x) \in I^m_{k_1 \ldots k_m}$. On applique le théorème de récurrence de Poincaré à chacun des $E = I^m_{k_0 \ldots k_{m-1}}$, ce qui donne un ensemble de mesure μ_0 totale pour chaque m. Une intersection dénombrable d'ensembles de mesure totale est de mesure totale. La mesure μ_0 étant équivalente à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, un ensemble de mesure μ_0 totale est de mesure de Lebesgue totale.

II. Ergodicité

(1) Le nombre irrationnel x tel que $n_i(x) = 1$ pour tout i pair et $n_i(x) = 2$ pour tout i impair est un point périodique de période exactement deux pour φ. La mesure atomique $\nu = (\delta_x + \delta_{\varphi(x)})/2$ est ergodique mais elle n'est pas mélangeante. (Prendre $E = \{x\}$ et $F = \{\varphi(x)\}$. Alors $\nu(E) = \nu(F) = 1/2$ mais $\nu(E \cap \varphi^{-n}(F))$ vaut 0 si n est impair et $1/2$ sinon.)

(2) Fixons $k \geq 1$. Soit $x \in (0,1)$, irrationnel. Puisque $n_j(x) = k$ si et seulement si $\varphi^{j-1}(x) \in I_k = (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$, on a pour tout entier $m \geq 1$

$$\tau_m(x,k) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \chi_{I_k}(\varphi^j(x)) \, .$$

Le théorème ergodique de Birkhoff nous dit que pour μ_0 presque tout $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \lim_{m\to\infty} \tau_m(x,k) &= \frac{1}{\log 2} \int \frac{\chi_{I_k}(x)}{1+x} dx = \frac{1}{\log 2} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{\log 2} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{\log 2} \cdot \log \frac{(k+1)^2}{k(k+2)} \, , \forall k \geq 1 \, . \end{aligned}$$

Comme les mesures μ_0 et Lebesgue sont équivalentes, on a terminé.

Le nombre x dont la fraction continue satisfait $n_j(x) = 1$ pour tout j ne satisfait pas la condition. On peut voir que $1+x = x^{-1}$ et donc $x = (-1+\sqrt{5})/2$.

III. Entropie de Kolmogorov de la transformation de Gauss

(1) Pour tout $j \geq 0$, on a

$$\int_0^1 x^j \log x \, dx = -\int_0^1 \frac{x^j}{j+1} \, dx + \log x \frac{x^{j+1}}{j+1}|_0^1 = \frac{-1}{(j+1)^2} \, .$$

Puisque $|\varphi'(x)| = x^{-2}$ pour tout $x \in (0,1)$ qui n'est pas de la forme $1/k$, on a:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log |\varphi'| \, d\mu_0 &= \frac{-2}{\log 2} \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} \, dx \\ &= \frac{-2}{\log 2} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^1 (-x)^j \log x \, dx = \frac{-2}{\log 2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell^2} \end{aligned}$$

A 28 ans, Euler a donné une “preuve” en 1735 de l'identité (dite d'Euler)

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

(Solution du “problème de Bâle,” question posée en 1644... Noter que le membre de gauche est $\zeta(2)$.) Il lui a fallu 10 ans pour fournir une preuve rigoureuse complète. Donc si vous ne connaissiez pas déjà cette identité, on ne vous tiendra pas rigueur de ne pas l'avoir obtenue en moins de trois heures. Pour une preuve et un historique, voir `http://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_de_Bâle`

Puisque $2\ell^2 = (2\ell)^2/2$ la formule d'Euler donne

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell^2} = -(1-\frac{1}{2})\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,.$$

Finalement $h_{\mu_0}(\varphi) = \frac{\pi^2}{6\log 2}$.

(2) On a vu que $\log|\varphi'|$ est dans $L^1(\mu_0)$. Puisque μ_0 est ergodique et qu'elle est équivalente à la mesure de Lebesgue, le théorème ergodique de Birkhoff dit que pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log|(\varphi^n)'(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log|\varphi'(\varphi^k(x))| = \int_0^1 \log|\varphi'|\, d\mu_0\,.$$

(3) On considère la partition (dénombrable) $\mathcal{P}$ donnée par $(0,1] = \cup_{k=1}^{\infty} I_k$. *(Ceux qui ont voulu travailler avec une partition finie approchant $\mathcal{P}$ n'ont pas été pénalisés.)*

Il est facile de voir que la partition $\mathcal{P}$ est génératrice. (Remarquer par exemple que $\inf|(\varphi^2)'(x)| > 1$.) Donc $h_{\mu_0}(\varphi, \mathcal{P}) = h_{\mu_0}(\varphi)$. (Cette entropie est strictement positive, par le point (1).)

Si x n'est pas rationnel alors pour tout $j \geq 1$ l'élément $\mathcal{P}^j(x)$ de $\mathcal{P}^j$ qui contient x est exactement l'intervalle entre

$$a_j(x) = \cfrac{1}{n_1(x) + \cfrac{1}{n_2(x) + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{n_j(x)}}}}$$

et

$$b_j(x) = \cfrac{1}{n_1(x) + \cfrac{1}{n_2(x) + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{n_j(x)+1}}}}$$

($b_j < x < a_j$ si j est impair et $a_j < x < b_j$ si j est pair). On a donc, pour ces x,

$$|x - a_j(x)| < |b_j(x) - a_j(x)| = \text{Lebesgue}(\mathcal{P}^j(x))\,.$$

Puisque il existe $C > 0$ tel que Lebesgue$(I) \le C\mu_0(I)$ pour tout intervalle I, le théorème de Shannon-McMillan-Breiman (qu'on applique à $\mathcal{P}$) implique que pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$

$$-\limsup_{j\to\infty} \frac{1}{j} \log|x - a_j(x)| \ge h_{\mu_0}(\varphi) .$$

Pour montrer l'autre inégalité, on montre que pour tout $\epsilon > 0$ l'ensemble des x tels que pour tout j_0 il existe $j \ge j_0$ avec

$$\frac{1}{j} \log|x - a_j(x)| \le -(h_{\mu_0}(\varphi) + \epsilon)$$

est de mesure de Lebesgue nulle. Il existe $C > 0$ tel que pour tout intervalle I on a Lebesgue$(I) \ge C\mu_0(I)$. Par Shannon-McMillan-Breiman, il suffit donc de voir que l'ensemble des "mauvais" nombres irrationnels x, soit ceux pour lesquels pour tout j_0 et $\epsilon > 0$ il existe $j = j(x) \ge j_0$ avec

$$|x - a_j(x)| \le |b_j(x) - a_j(x)| \exp(-j\epsilon) \qquad (\star)$$

est de mesure de Lebesgue nulle. Pour j fixé, la mesure de Lebesgue de l'ensemble B_j de tous les irrationnels $x \in (0,1)$ satisfaisant la condition $(\star)$ est égale à $\exp(-j\epsilon)$. Pour $j_0 \ge 1$ et $\epsilon > 0$ fixé, et x un mauvais point, on note $j(x) \ge j_0$ le plus petit $j \ge j_0$ tel que $x \in B_j$. Alors la mesure des mauvais points est $\le \sum_{j\ge j_0} \mu_0(B_j) \le C \sum_{j\ge j_0} \exp(-j\epsilon)$, qui tend vers 0 pour tout $\epsilon > 0$ lorsque $j_0 \to \infty$. (On a redémontré Borel-Cantelli.)

IV. Mélange

(1) On a vu que $R_1(x)$ converge vers x pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$. Si $R_m(x)$ converge, on a $R_{m+1}(x) = \varphi(R_m(x))$ car

$$\frac{1}{R_m(x)} = n_m(x) + \cfrac{1}{n_{m+1}(x) + \frac{1}{n_{m+2}(x)+\cdots}}$$

et $\left[\frac{1}{R_m(x)}\right] = n_m(x)$. Par III, l'ensemble des x tels que la fraction continue de $\varphi^j(x)$ converge pour tous $j \ge 1$ est de mesure de Lebesgue totale (intersection dénombrable d'ensembles de mesure totale). On en déduit que $R_m(x) = \varphi^{m-1}(x)$ pour tout $m \ge 1$, pour Lebesgue presque tout $x \in (0,1)$. On veut donc calculer la limite de

$$\text{Lebesgue}(\varphi^{-(m-1)}([0,y]))$$

lorsque $m \to \infty$.

Puisque μ_0 est mélangeante pour φ on a

$$\lim_{m\to\infty}\int \chi_E(\chi_F\circ\varphi^m)\,d\mu_0 \to \int \chi_E\,d\mu_0\int\chi_F\,d\mu_0$$

pour tous boréliens E et F. Toute $\psi_2 \in L^\infty(\mu_0)$ s'écrit comme limite croissante de fonctions étagées bornés et le théorème de convergence dominée implique donc

$$\lim_{m\to\infty}\int \chi_E(\psi_2\circ\varphi^m)\,d\mu_0 = \int \chi_E\,d\mu_0\int\psi_2\,d\mu_0$$

pour tout borélien E. Par densité des fonctions étagées dans $L^1(\mu_0)$ on obtient pour tous $\psi_1\in L^1(\mu_0)$ et $\psi_2\in L^\infty(\mu_0)$

$$\lim_{m\to\infty}\int \psi_1(\psi_2\circ\varphi^m)\,d\mu_0 = \int \psi_1 d\mu_0\cdot\int\psi_2\,d\mu_0\,.$$

La mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est absolument continue par rapport à μ_0, sa dérivée de Radon-Nikodym est $\psi_1=(\log 2)(1+x)\in L^1(\mu_0)$ (elle est bornée, mais on n'en a pas besoin). Pour E un borélien de $[0,1]$ on pose $\psi_2=\chi_E\in L^\infty(\mu_0)$ et on a a donc

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\text{Lebesgue}(\varphi^{-m}(E)) &= \lim_{m\to\infty}\int\psi_1(\psi_2\circ\varphi^m)\,d\mu_0\\ &= \int\psi_1 d\mu_0\cdot\int\psi_2\,d\mu_0 = \text{Lebesgue}([0,1])\cdot\mu_0(E)=\mu_0(E)\,.\end{aligned}$$

(Faute de frappe dans l'indication, il fallait prendre ψ_1 comme dérivée de Radon-Nikodym! Ceux que cela a induits en erreur n'ont pas été pénalisés.)

On pose $E=[0,y]$, on trouve

$$\lim_{m\to\infty}\text{Lebesgue}(\varphi^{-m}(E)) = \frac{1}{\log 2}\int_0^y\frac{1}{1+x}\,dx = \frac{1}{\log 2}\log(1+y)\,.$$

ce qui termine la démonstration. (Le premier à démontrer ce résultat est Kuzmin, 1928.)

(2) La vitesse de convergence est exponentielle (le taux s'appelle constante de Gauss-Kuzmin-Wirsing (1974), son logarithme est différent de $-h_{\mu_0}(\varphi_0)$).

Esquisse de preuve: on peut montrer que l'opérateur de transfert $\mathcal{L}\psi(x)=\sum_{\varphi(y)=x}\frac{\psi(y)}{|\varphi'(y)|}$ est borné sur $C^1([0,1])$ (la somme est infinie, mais converge assez vite). Ensuite, en s'inspirant du cas des applications dilatantes du cercle, on montre que le rayon spectral vaut 1, que 1 est une valeur propre simple (le point fixe est la fonction $(\log 2(1+x))^{-1}$, le point fixe du dual est Lebesgue), et que le reste du spectre est contenu dans un disque de rayon strictement inférieur à 1. On en déduit que pour tout borélien E

$$\text{Lebesgue}(\varphi^{-m}(E)) = \int\chi_E\circ\varphi^m\,dx = \int\chi_E\mathcal{L}^m(1)\,dx$$

converge exponentiellement vite vers $\int \chi_E (\log 2(1+x))^{-1}\, dx = \mu_0(E)$ (on a utilisé que la fonction constante 1 est C^1, que $\int 1\, dx = 1$, et que $\sup|\psi|$ est majoré par la norme C^1 de ψ).

(Remarque: on peut faire agir $\mathcal{L}$ *sur un espace de Banach de fonctions holomorphes dans un voisinage complexe de* $[0,1]$. *Il est alors compact et même nucléaire au sens de Grothendieck. La constante de Wirsing est la valeur absolue de sa 2ème valeur propre, qui est réelle négative. Voir par exemple On the thermodynamic formalism for the Gauss map, Dieter H. Mayer, Comm. Math. Phys. Vol. 130 (1990) 311–333.)*