École Normale Supérieure – FIMFA – Année 2011-2012
Cours d'Introduction aux Systèmes Dynamiques – François Béguin

---

Examen

Notes personnelles de cours et/ou TD autorisées. Pas de livre, ni d'ordinateur. Merci.

Exercice 1. Nombre de translation d'un cocycle au dessus d'une rotation

On s'intéresse au système dynamique sur le cylindre infini $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ donné par l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} & \longrightarrow & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x+\log(2), y+\sin^2(2\pi x)) \end{array}.$$

On note $\pi_2 : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la projection sur la deuxième coordonnée. On dit qu'un point $p \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ a un *nombre de translation vertical* égal à ρ si

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \pi_2 \left(\Phi^n(p) - p\right).$$

Montrer que tout point $p \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ admet un nombre de translation vertical, et que ce nombre est indépendant de p.

Exercice 2. Une transformation affine par morceaux.

On note s'intéresse à la transformation du carré $[0,1[^2$ définie (Lebesgue presque partout) comme suit :

$$\begin{array}{rcccl} T : & [0,1[^2 & \longrightarrow & [0,1[^2 & \\ & (x,y) & \longmapsto & (\frac{1}{3}x, 3y) & \text{si } y \in [0,\frac{1}{3}[\\ & (x,y) & \longmapsto & (\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}, \frac{3}{2}y-\frac{1}{2}) & \text{si } y \in [\frac{1}{3},1[\end{array}$$

1. Vérifier que T est bijective, mesurable ainsi que son inverse, et qu'elle préserve la restriction à $[0,1]^2$ de la mesure de Lebesgue.

2. Construire une bijection $\phi : [0,1[^2 \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, mesurable ainsi que son inverse, qui conjugue T au décalage.

3. Soient A et B deux parties mesurables de $[0,1]^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X(n,A,B)$ l'ensemble des points $p \in A$ tels que $T^n(p) \in B$. Que peut-on dire de la mesure de Lebesgue de $X(n,A,B)$?

Exercice 3. Ensemble non-errant.

Soit (X, dist) est un espace métrique compact, et f un homéomorphisme de X. On rappelle qu'un point $x \in X$ est *non-errant* (pour f) si, pour tout voisinage U de x, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. On note $\Omega(f)$ l'ensemble des points de X non-errants pour f. Pour tout point $z \in X$, on note

$$W^s(z) = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(f^n(x), f^n(z)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\}.$$

1. Dans cette question, on suppose que $X = \mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ et que f est une rotation : il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (x+\alpha, y+\beta)$. À quoi est égal $\Omega(f)$?

2. On suppose que $\Omega(f)$ est un ensemble fini. Montrer que $\Omega(f)$ est alors constitué de points périodiques, et qu'on a l'égalité $X = \bigcup_{z\in\Omega(f)} W^s(z)$.

3. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. On considére un homéomorphisme

$$f \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z = re^{i\theta} & \longmapsto & \rho(r)e^{i(\theta+\alpha(z))} \end{array}$$

où : $\rho : [0,1] \to [0,1]$ est un homéomorphisme tel que $\rho(0) = 0$, $\rho(1) = 1$, et $\rho(r) > r$ pour $r \in]0,1[$,
$\alpha : \mathbb{D} \to [0, \frac{1}{10}]$ est une fonction continue telle que $\alpha(1) = 0$ et $\alpha(z) > 0$ si $z \in \mathbb{D} \setminus \{1\}$
(on suppose que α varie assez lentement pour que f soit effectivement un homéomorphisme).
Expliquer pourquoi $\mathbb{D} \neq \bigcup_{z\in\Omega(f)} W^s(z)$.

Exercice 4. Applications de degré $d \geq 2$ sur le cercle.

Soit d un entier supérieur ou égal à 2. On note m la multiplication de l'angle par d sur le cercle $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$:

$$m \;:\; \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \\ x & \longmapsto & dx \end{array}.$$

On considère une application $f : (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ continue de degré d ; rappelons que ceci signifie que tout relevé F de f à $\mathbb{R}$ satisfait $F(\widetilde{x}+1) = F(\widetilde{x}) + d$.

1. On considère un relèvement F de f et un relèvement M de m à $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique application continue $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui commute à la translation $x \mapsto x+1$, et telle que $M \circ H = H \circ F$ (on pourra écrire $F = M + \phi$ et chercher H sous la forme $\mathrm{Id} + \eta$). En déduire qu'il existe une application h de degré 1, telle que $m \circ h = h \circ f$.

On suppose maintenant que f est de classe C^1 et *uniformément dilatante* ; ceci signifie que l'on a $f'(x) > 1$ pour tout $x \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, où f' désigne la dérivée de f.

2. Montrer que l'application h trouvée ci-dessus est injective ; en déduire que c'est un homéomorphisme.

3. Montrer que f est topologiquement transitive, et qu'elle laisse invariante une mesure borélienne de probabilité de support total.

Exercice 5. Entropie topologique d'un homéomorphisme du cercle.

Étant donné un recouvrement $\mathcal{U}$ d'un espace topologique compact X par des ouverts, on note $N(\mathcal{U})$ le plus petit entier n tel qu'on peut extraire de $\mathcal{U}$ un recouvrement de X à n éléments. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux recouvrements ouverts, on note $\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. On dit qu'une partie O du cercle est un *intervalle ouvert propre* si O est ouverte, connexe, différente de l'ensemble vide, du cercle tout entier, et du cercle privé d'un point.

1. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux recouvrements du cercle par des intervalles ouverts propres, montrer que l'on a $N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U}) + N(\mathcal{V})$.

2. En déduire que tout homéomorphisme du cercle a une entropie topologique nulle.

Exercice 6. Croissance du nombre de rotation.

On fixe un homéomorphisme croissant f du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, ainsi qu'un relèvement F de cette homéomorphisme à $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note r_t la rotation d'angle t sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et R_t le relèvement à $\mathbb{R}$ de cette rotation donné par $R_t(x) = x + t$. On notera que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'homéomorphisme $R_t \circ F$ est un relèvement de l'homéomorphisme $r_t \circ f$. Pour tout t, on note $\rho_t \in \mathbb{R}$ le nombre de translation de l'homéomorphisme $R_t \circ F$.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \rho_t$ est croissante au sens large.

2. On suppose que ρ_0 est rationnel : $\rho_0 = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose de plus que f n'est pas une rotation, c'est-à dire que $f^q \neq \mathrm{Id}$. Montrer qu'il existe alors $\epsilon > 0$ telle que la fonction $t \mapsto \rho_t$ est constante sur $[-\epsilon, 0]$ ou sur $[0, \epsilon]$.

3. On suppose maintenant que ρ_0 est irrationnel. Montrer que l'on a alors $\rho_t > \rho_0$ pour tout $t > 0$, et $\rho_t < \rho_0$ pour tout $t < 0$.