Systèmes Dynamiques

Patrick Bernard

25 décembre 2018

Version préliminaire des notes de cours.
Quelques références conseillées :
Coudènes, *Théorie ergodique et systèmes dynamiques / Ergodic Theory ans Dynamical Systems*
Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*
Milnor, *Dynamics : Introductory Lectures*
Parry, *Topics in ergodic theory*
Pollicott et Yuri, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*

Table des matières

1 Introduction, points fixes et périodiques.

Il y a plusieurs contextes mathématiques que l'on peut qualifier de systèmes dynamiques. Dans tous les cas, il y a un espace X qui décrit les états possible du système, et un temps $\mathbb{T}$. On considérera les cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^+$.

Le cas $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. On se donne une application $\varphi : X \longrightarrow X$, et on étudie les suites définies par récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Une telle suite est déterminée par sa condition initiale x_0, on dit que c'est l'orbite du point x_0. Dit autrement, on étudie la suite des applications φ^n (φ itérée n fois), pour laquelle $x_n = \varphi^n(x_0)$. On a bien sur $\varphi^{n+m} = \varphi^n \circ \varphi^m$.

Si l'application φ est inversible, on peut définir φ^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la relation ci-dessus restant vérifiée. C'est le cas $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$.

Dans le cas $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, on considère un flot $\varphi^t(x) = \varphi(t, x) : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ vérifiant la relation $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$. L'une des manières les plus fréquentes de définir un tel flot est de se donner un champ de vecteurs $V(x)$ sur X. Ceci a un sens si X est une variété, ou un espace $\mathbb{R}^d$. On considère alors l'équation différentielle $x'(t) = V(x(t))$. Si V est assez régulier (C^1 ou même Lipschitz), alors pour toute condition initiale x_0, il y a une et une seule solution maximale de cette équation vérifiant $x(0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle $]T_-, T_+[$ contenant 0. On peut rassembler toutes ces solutions en une application

$$\varphi : \mathbb{R} \times X \supset U \longrightarrow X$$

telle que, pour chaque $x \in X$, L'application $U_x \ni t \longmapsto \varphi(t, x)$ est la solution maximale de l'équation, où $U_x = \{t : (t, x) \in U\}$. Le domaine de définition U est un ouvert de $\mathbb{R} \times X$, et l'application φ est C^r si le champ V est C^r. On dit que le champ V est complet si $U = \mathbb{R} \times X$, c'est à dire si toutes les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur $\mathbb{R}$. Alors, $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$ est un flot sur X. On considérera principalement des champs complets. On rappelle quelques résultats utiles à ce propos :

Proposition 1.1. *Tout champ de vecteurs à support compact est complet. En particulier, tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.*

Si V est un champ de vecteurs, il existe une fonction f, strictement positive et lisse, telle que fV est complet.

Si x_0 est un point tel que le temps d'existence T_+ de la solution maximale est fini, alors l'image $x([0, T^+[) \subset X$ de l'orbite n'est pas relativement compacte.

Dans tous les cas, on considère donc une action du (semi)-groupe $\mathbb{T}$ sur l'espace X.

On parle de semi-flot lorsque $\mathbb{T} = \mathbb{R}^+$. Même si on considérera plus rarement ce cas, il apparaît de manière naturelle dans les cas suivants :

Dans l'études des équations aux dérivées partielles d'évolution, par exemple de type parabolique. De telles équations induisent souvent un semi-flot sur un espace X de dimension infinie.

Dans l'étude des flots, on est souvent amené à considérer des parties positivement invariantes, c'est à dire des parties $Y \subset X$ pour lesquelles $\varphi^t(Y) \subset Y$ pour tout $t \geqslant 0$ (mais pas forcément pour $t < 0$). La famille des applications $\varphi^t_{|Y}$ est alors un semi-flot. Si le flot φ^t provient d'un champ de vecteurs complet V et que Y est un ouvert de X, le champ $V_{|Y}$ est complet vers le futur, mais pas vers le passé.

Nature des orbites

On dit que x est un point fixe de l'application φ si $\varphi(x) = x$. On dit que x est un point périodique si il existe $n \geqslant 1$ tel que $\varphi^n(x) = x$. L'ensemble des entiers n pour lesquels $\varphi^n(x) = x$ est l'ensemble des multiple d'un entier $T > 0$, que l'on appelle la période minimale de x. Les points fixes sont donc les orbites périodiques dont la période minimale est égale à 1. Il existe trois types d'orbites pour une application φ :

Les orbites périodiques.

Les orbites injectives.

Les orbites préperiodiques (x n'est pas périodique, mais son orbite contient un point périodique). Si φ est inversible, toute orbite préperiodique est périodique.

Considérons maintenant le cas d'un flot engendré par un champ de vecteurs complet V de classe C^1. On dit que x est un point fixe (ou un point critique) si $V(x) = 0$, ou de manière équivalente si $\varphi^t(x) = x$ pour tout t. On dit que x est un point périodique si il existe $t > 0$ tel que $\varphi^t(x) = x$. L'ensemble des périodes est une sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, c'est donc ou bien $\mathbb{R}$ (cas d'un point fixe) ou bien $T\mathbb{Z}$ pour un réel $T > 0$, qui est appelé la période minimale de x.

Il y a trois types d'orbites pour un flot :

Les points fixes (dits aussi points singuliers).

Les orbites périodiques (de période minimale strictement positive). Si $x(t)$ est une orbite de période $T > 0$, alors la courbe x engendre un plongement du cercle $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ dans X. Plus précisément, en notant $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$, il existe un plongement $\theta : \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \longrightarrow X$ tel que $x = \theta \circ \pi$.

Les orbites injectives. Dans ce cas, l'application $t \longmapsto \varphi^t(x)$ est une immersion injective de $\mathbb{R}$ dans X. En effet, $x'(t) = V(x(t))$, et ce vecteur est non-nul pour tout t, sinon l'orbite serait un point fixe.

Dans un semi-flot, il peut aussi exister des orbites prépériodiques.

Conjugaisons Soit $\phi : X \longrightarrow X'$ une bijection. Si $\psi = \phi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$, alors ϕ envoie les orbites de φ sur les orbites de ψ. L'existence d'une telle bijection ϕ implique que les dynamiques de φ et ψ ont certaines similarités (d'autant plus si ϕ a certaines propriétés de régularité). On dit que ϕ conjugue φ et ψ.

On dit que ϕ conjugue les flots φ^t et ψ^t elle conjugue les applications φ^t et ψ^t pour tout t.

Dans le cas où X et X' sont des variétés, et où les flots φ^t et ψ^t sont engendrés par des champs de vecteurs V et W, le difféomorphisme ϕ est une conjugaison si et seulement si

$$W(\phi(x)) = d\phi_x \cdot V(x)$$

pour tout $x \in X$ (on dit que W est l'image directe de V par ϕ).

Une façon d'étudier une système dynamique est de le conjuguer à un système plus simple. C'est souvent difficile globalement, mais la question est aussi intéressante au niveau local. On verra par exemple qu'au voisinage d'un point fixe hyperbolique, un système est conjugué à son linéarisé par un homéomorphisme. En ce qui concerne les points réguliers (points non fixes) des champs de vecteurs, le problème de conjugaison locale est facile :

Proposition 1.2. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit x_0 un point régulier de V, c'est à dire que $V(x_0) \neq 0$. Il existe alors un difféomorphisme local $\phi : X \supset U \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$, où U est un ouvert contenant x_0 et U' est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, qui conjugue V à un champ de vecteurs constant V' sur U'. On peut même demander que $V' = (1, 0, \dots, 0)$ et que $U' =]-1, 1[\times B$, où B est une boule de $\mathbb{R}^{d-1}$. On dit alors que U est une boite de flot locale de V.*

◄ Soit $f : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow X$ une application telle que $f(0) = x_0$ et $df_{x_0} \cdot \mathbb{R}^{d-1}$ est un supplémentaire de $V(x_0)$ dans $T_{x_0}M$. On considère alors l'application

$$\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \ni (t, y) \longmapsto \varphi^t(f(y)) \in X$$

où φ est le flot de V. On a

$$d\psi_{(y,t)} \cdot (1, 0) = \partial_t \psi(y, t) = V(\psi(y, t))$$

c'est à dire que ψ conjugue le champ constant $(1, 0)$ et le champ V. On constate que

$$d\psi_{(0,0)} \cdot (s, v) = v + sV(x_0),$$

est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ dans $T_{x_0}M$, donc ψ est un difféomorphisme local. Si B est un petite boule ouverte centrée en 0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$ et I un petit intervalle ouvert contenant 0, alors ψ est un difféomorphisme de $U' := B \times I$ sur son image U, qui est un ouvert de X. L'inverse $\phi : U \longrightarrow U'$ est le difféomorphisme cherché. ►

On peut obtenir un résultat un peu moins local :

Proposition 1.3. *Soit V un champ de vecteurs C^r sur la variété X, et soit $x(t) : [0, T] \longrightarrow X$ un segment d'orbite injectif. Il existe alors un tube de flot contenant $x([0, T])$. Plus précisément, il existe un intervalle ouvert I contenant $[0, T]$, une boule ouverte B de $\mathbb{R}^{d-1}$, un voisinage ouvert U de $x([0, T])$ et un difféomorphisme $\phi : U \longrightarrow I \times B$ qui conjugue le champ V et le champ $(1, 0)$.*

◄ On poursuit la preuve précédente. Comme $\psi(t + s, y) = \varphi^t \circ \psi(s, y)$, on a $d\psi_{(t,0)} = d\varphi^t_{x_0} \circ d\psi_{(0,0)}$, cette application linéaire est donc un isomorphisme. On peut donc supposer, en choisissant I et B comme dans l'énoncé assez petits, que ψ est un difféomorphisme local sur $I \times B$. Montrons maintenant que l'on peut, quitte à diminuer I et B, le supposer injectif. C'est alors un difféomorphisme sur son image, ce qui termine la preuve.

Si ψ n'est injectif sur aucun voisinage $I \times B$, alors il existe deux suites $(t_n, x_n) \neq (t'_n, x'_n)$telles que $\psi(t_n, x_n) = \psi(t'_n, x'_n)$ et $t_n \longrightarrow t \in [0, T], t'_n \longrightarrow t' \in [0, T]$, $x_n \longrightarrow 0$, $x'_n \longrightarrow 0$. A la limite, par injectivité de l'orbite $x_{|[0,T]}$, on obitent que $t = t'$. Comme ψ est un difféomorphisme local au voisinage de $(t, 0)$, ceci implique que les suites (t_n, x_n) et (t'_n, x'_n) sont égales après un certain rang, une contradiction. ►

Il y a plusieurs façons de faire des liens entre les systèmes à temps continu et à temps discret.

La plus évidente consiste, étant donné un flot φ^t, à considérer l'application φ^T pour un temps T donné. La dynamique du flot φ^t et celle de l'application φ^T sont fortement reliées, on en verra plusieurs exemples.

Une autre méthode pour associer une application à un flot consiste à considérer l'application de retour associée à une section de Poincaré. Cette méthode à l'avantage de diminuer la dimension.

Une section de Poincaré est une sous variété Y de X, de codimension un, transverse au champ de vecteurs, c'est à dire que $T_yX = T_yY \oplus \mathbb{R}V(y)$ pour tout $y \in Y$. Pour $y \in Y$, on dit que $z \in Y$ est le premier retour de y dans Y si il existe $T > 0$ tel que $z = \varphi^T(y)$ et $\varphi^t(y) \notin Y$ pour tout $t \in]0, T[$. On dit que z est un premier retour régulier si de plus $\varphi^t(y) \notin \bar{Y}$ pour tout $t \in]0, T[$.

Proposition 1.4. *Soit Y une section de Poincaré pour le champ V de classe C^r. L'ensemble des points de Y admettant un premier retour régulier est un ouvert Y_1 de Y, et l'application $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$ qui a chaque point de Y_1 associe son premier retour dans Y est C^r. C'est un difféomorphisme sur un ouvert Y_2 de Y.*

En général, Y_1 peut être vide. Il se peut même qu'aucun point de Y ne revienne dans Y. Toutefois, cette construction est souvent très utile. Même si ψ n'est pas une application de Y_1 dans lui-même, on peut souvent penser à ψ comme engendrant un système dynamique discret dont l'étude aide à comprendre le flot de V.

◄ Soit y un point qui admet un premier retour régulier $z = \varphi^T(y)$. Au voisinage de z, soit f une équation de Y, c'est à dire une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^r telle que $df_z \neq 0$ et telle que $Y \subset f^{-1}(0)$. Pour chercher les retours dans Y des points voisins de y, on résout l'équation $g(t,x) := f\circ\varphi(t,x) = 0$ au voisinage de sa solution (T,y). On constate que $\partial_t g(T,y) = df_z \cdot V(z) \neq 0$. Il existe donc un voisinage U de y et une fonction $\tau : U \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r, telle que $\varphi^{\tau(x)}(x) \in Y$ pour tout $x \in U$. De plus, $\tau(x)$ est la seule solution de l'équation $g(t,x) = 0$ proche de T. L'application $\psi(x) := \varphi^{\tau(x)}(x) : U \longrightarrow Y$ est C^r, elle associe à chaque point $x \in U$ un de ses retours dans Y.

Il reste à montrer que, si U est un voisinage de y assez petit, alors c'est bien le premier retour et qu'il est régulier. Il faut donc montrer que $\varphi^t(x) \notin \bar{Y}$ pour tout $x \in U$ et tout $t \in]0,\tau(x)[$. Supposons, par contradiction, que cette propriété ne soit satisfaite sur aucun voisinage U de y. Il existe alors une suite x_n tendant vers y, et pour chaque n un temps $t_n \in]0,\tau(x_n)[$ tel que $\varphi^{t_n}(x_n) \in Y$. En extrayant une sous-suite, on peut supposer que la suite t_n converge vers une limite $s \in [0,T]$, pour laquelle $\varphi^s(y) \in \bar{Y}$. Comme z est un retour régulier de y, on ne peut pas avoir $s \in]0,T[$. Si l'on a $s = T$, alors pour n grand t_n est une solution de l'équation $g(t_n,x_n) = 0$ qui est proche de T, mais différente de $\tau(x_n)$, ce qui contredit la conclusion du théorème des fonctions implicites. Une application similaire du théorème des fonctions implicites au voisinage de $(0,y)$ montre que 0 est localement l'unique solution de l'équation $\varphi^t(x) \in Y$. On ne peut donc pas avoir $s = 0$.

On peut renverser le temps en considérant le champ $-V$. Y est une section de Poincaré pour $-V$. Notons Y_2 l'ensemble des points de Y qui admettent un premier retour régulier pour $-V$. On montre comme ci-dessus que Y_2 est un ouvert de Y et que l'application de retour ϕ est C^r. Il est clair que z est un premier retour régulier de y pour V si et seulement si y est un premier retour régulier de z pour $-V$. On a donc $Y_2 = \psi(Y_1)$ et $\phi = \psi^{-1}$. ►

Définition 1.5. *Soit φ une application C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x de φ est non dégénéré si le linéarisé $L = d\varphi_x$ n'admet pas 1 pour valeur propre.*

Le linéarisé L est un endomorphisme de l'espace tangent T_xX. Le système linéarisé $v_{n+1} = Lv_n$ est une approximation du système φ au voisinage du point fixe x. Pour beaucoup de questions relatives à la dynamique au voisinage de x, il est pertinent de commencer par étudier le système linéarisé.

Proposition 1.6. *Soit $\varphi_\mu(x) = \varphi(\mu,x) : \mathbb{R}\times X \longrightarrow X$ une application C^1, que l'on voit comme une famille d'applications C^1 de X. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de φ_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \longmapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de φ_μ dans U.*

◄ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $F(\mu,x) := \varphi(\mu,x) - x = 0$ (on se place dans une carte en x_0 pour écrire cette différence). L'hypothèse de non-degenerescence est en effet exactement l'inversibilité de $\partial_x F(0,x_0)$. ►

Le cas des orbites périodiques est similaire. On dit que x est un point périodique non dégénéré de période n si c'est un point fixe non dégénéré de φ^n. Un point périodique non dégénéré de période n est isolé (parmi les points périodiques de période n) et survit à une perturbation de l'application.

Dans les cas des flots, il est utile de distinguer le cas des points fixes et le cas des orbites périodiques.

Définition 1.7. *Soit V un champ de vecteurs C^1 de la variété X. On dit que le point fixe x_0 de V est non dégénéré si le linéarisé $L = dV_{x_0}$ est inversible.*

Si $X = \mathbb{R}^d$, le champ de vecteurs V est simplement une application $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$, on définit alors le linéarisé par la formule $L = dV_{x_0}$, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$. On a alors $(d\varphi^t)_{x_0} = e^{tL}$ pour tout t, ceci explique pourquoi la valeur propre 1 dans le cas des applications correspond à la valeur propre 0 pour le champ de vecteurs.

Dans le cas où X est une variété, il n'est pas clair que le linéarisé L est bien défini en tant qu'endomorphisme de T_xX (en fait, il n'est bien défini que lorsque $V(x) = 0$). Une façon de le définir est de poser $L = \frac{d}{dt}_{|t=0} d\varphi^t_x$ en remarquant que $d\varphi^t_x$ est bien un endomorphisme de T_xM pour tout t (car $\varphi^t(x) = x$). En dérivant l'équation $d\varphi^{t+s}_{x_0} = d\varphi^s_{x_0} \circ d\varphi^t_{x_0}$ par rapport à s en $s = 0$, on obtient que $\partial_t d\varphi^t_{x_0} = L \circ d\varphi^t_{x_0}$, ce qui implique à nouveau l'identité

$$d\varphi^t_{x_0} = e^{tL}.$$

Plus classiquement, on peut calculer le linéarisé L en exprimant le champ de vecteurs V dans des cartes. Si ϕ et ψ sont deux cartes de X en x_0, on peut considérer les représentants $V_\phi = \phi_* V$ et $V_\psi = \psi_* V$ de V dans ces cartes. On peut alors calculer les linéarisés dans les cartes, $L_\phi = d(V_\phi)_0$ et $L_\psi = d(V_\psi)_0$. Ce sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^d$ et la question est de savoir si ils représentent le même endomorphisme de $T_{x_0}X$, c'est à dire si $L_\psi \circ df_0 = df_0 \circ L_\phi$, en notant $f = \psi \circ \phi^{-1}$. On a $V_\psi = f_* V_\phi$, c'est à dire que $V_\psi(f(x)) = df_x \cdot V_\phi(x)$. On différentie en $x = 0$, ce qui donne

$$L_\psi \circ df_0 = df_0 \cdot L_\phi + d^2 f_0 \cdot V_\phi(0).$$

On a donc bien, si $V_\phi(0) = 0$, l'égalité voulue. Il résulte des considération ci-dessus que le linéarisé L d'un champ de vecteur est bien défini en tant qu'endomorphisme de $T_{x_0}X$ lorsque x_0 est un point fixe de V.

Proposition 1.8. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X = \mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point fixe non dégénéré de V_0. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, et une application $I \ni \mu \mapsto x_\mu \in U$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, le seul point fixe de V_μ dans U.*

◄ C'est le théorème des fonctions implicites pour l'équation $V(\mu, x) = 0$. ►

Considérons maintenant le cas d'une orbite périodique d'un champ de vecteurs V, de période minimale $T > 0$. Les points de cette orbite sont des points fixes de l'application φ^T. Il faut noter cependant que ce ne sont jamais des points fixes non dégénérés. En effet, comme chacun des points de l'orbite périodique du flot est un point fixe de φ^T, ils ne sont pas isolés. Plus directement, l'hypothèse de non dégénerescence n'est pas satisfaite en raison de l'égalité suivante :

$$d\varphi_x^T \cdot V(x) = V(x).$$

$V(x)$ est donc un vecteur propre de $d\varphi_x^T$ associé à la valeur propre 1. Pour démontrer l'égalité, on observe que $\varphi^T \circ \varphi^t(x) = \varphi^t(x)$ pour tout t, et on dérive par rapport à t en $t = 0$.

Il est utile pour décrire cette situation d'introduire une section de poincaré locale en x, c'est à dire un petit disque plongé $Y \subset X$, centré en x et transverse à V. Comme l'orbite O de x est une partie compacte de X on peut supposer que $\bar{Y} \cap O = \{x\}$, c'est à dire que T est le temps de premier retour de x dans Y, et que ce retour est régulier. Il existe alors un voisinage Y_1 de x dans Y est une application de premier retour régulière $\psi : Y_1 \longrightarrow Y$, qui vérifie $\psi(x) = x$.

Propriété 1.9. *La multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi_x^T$ est exactement un de plus que la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\psi_x$.*

On dit que x est une orbite périodique non dégénérée si c'est un points fixe non dégénéré de ψ, c'est à dire si la multiplicité de 1 en tant que valeur propre de $d\varphi_x^T$ est égale à 1.
◄ On a $\varphi^T(x) = \varphi^{T-\tau(x)} \circ \psi(x)$ pour tout $x \in Y$. On a déjà vu que $d\varphi_x^T \cdot V(x) = V(x)$. Dans une base de $T_x X$ constituée de $V(x)$ et d'une base de $T_x Y$, on a la décomposition par blocs

$$d\varphi_x^T = \begin{bmatrix} 1 & -\partial_x \tau(x) \\ 0 & d\psi_x \end{bmatrix}. ►$$

Proposition 1.10. *Soit $V_\mu(x) = V(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1, que l'on voit comme une famille de champs de vecteurs C^1 de $X = \mathbb{R}^d$. Soit x_0 un point périodique non dégénéré de V_0 de période minimale $T > 0$. Alors, il existe un voisinage U de x_0 dans X, un intervalle ouvert I contenant 0, un intervalle ouvert J contenant T, et une application $I \ni \mu \mapsto (x_\mu, T_\mu) \in U \times J$, de classe C^1, telle que x_μ est, pour chaque $\mu \in I$, un point périodique de période minimale T_μ de V_μ. De plus, l'orbite de x_μ est la seule orbite périodique de V_μ qui entre dans U et dont la période minimale appartient à J.*

◄ Soit Y une section de Poincaré locale en x_0. Le point x_0 est un point fixe non dégénéré de l'application de premier retour ψ. Montrons que l'application de retour $\psi_\mu(x) = \psi(\mu, x)$ et le temps de retour $\tau(\mu, x)$ sont C^1.

On peut considérer l'application $V(\mu, x)$ comme une champ de vecteurs $\tilde{V}$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ dont la première composante est nulle. Son flot est alors $\tilde{\varphi}^t(\mu, x) = (\mu, \varphi_\mu^t(x))$, où φ_μ^t est le flot du champ V_μ sur $\mathbb{R}^d$. Si I est un intervalle ouvert contenant 0, alors $\tilde{Y} := I \times Y$ est une section de poincaré locale pour $\tilde{V}$ en $(0, x_0)$, qui est une orbite périodique de période T. Les fonctions $\tau(\mu, x)$ et $\psi(\mu, x)$ sont les temps et les applications de retour associées à la section $\tilde{Y}$. De plus, si J est un petit intervalle contenant T, pour tout $(\mu, y) \in I \times Y$, $\tau(\mu, y)$ est l'unique temps $t \in J$ pour lequel $\varphi^t(\mu, y) \in \tilde{Y}$.

Comme x_0 est un point fixe non dégénéré pour ψ_0, il existe une application $\mu \longrightarrow x_\mu$ et un voisinage W de x_0 dans Y tel que x_μ est le seul point fixe de ψ_μ dans W, c'est alors un point périodique de période $T_\mu = \tau(\mu, x_\mu)$ pour V_μ.

Il existe un voisinage U de x dans X qui a la propriété que toute orbite de U passe par W (on peut prendre par exemple une petite boite de flot). La propriété d'unicité de l'énoncé en découle : Si $x \in U$ est périodique pour V_μ, de période S contenue dans J, alors l'orbite de x intersecte W en un point y qui est lui aussi S-périodique. Il vérifie donc $\varphi_\mu^S(y) = y$, ce qui implique que $y = \psi(y)$ et donc $y = x_\mu$. ►

Considérons une dernière situation, celle d'un champ de vecteur laissant invariante une fonction h. Si $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^1 sur X, on dit que h est invariante par le champ de vecteurs V si $h \circ \varphi^t = h$ pour tout t. Ceci est équivalent à demander que la fonction $dh \cdot V$ soit identiquement nulle. En effet,

$$\partial_t(h \circ \varphi^t(x)) = dh_{\varphi(x)} \cdot V(\varphi^t(x)) = (dh \cdot V)(\varphi^t(x)).$$

On rencontre souvent des fonctions invariantes, c'est par exemple le cas de l'énergie dans de nombreux systèmes issus de la physique.

Considérons une valeur régulière e de la fonction h, de sorte que $h^{-1}(e)$ est une sous-variété de X. Considérons maintenant un point périodique x_e dans $h^{-1}(e)$, de période minimale $T > 0$.

L'orbite de x_e ne peut pas être non dégénérée au sens ci-dessus. Considérons en effet une section de Poincaré locale Y en x_e et l'application de retour ψ. Le point x_e est un point régulier pour la restriction de h à Y. Notons $\ell := d(h_{|Y})_{x_e}$, c'est une forme linéaire sur $T_{x_e}Y$. Comme $h \circ \psi = h$, on a $\ell \circ L = \ell$, où $L = d\psi_{x_e}$. Ceci implique que 1 est valeur propre de L^*, donc de L.

Proposition 1.11. *Supposons que* 1 *est valeur propre simple de* $d\psi_{x_e}$*. Alors, il existe un intervalle* I *contenant* e *et une application* $(x(a), T(a)) : I \longrightarrow X$ *telle que, pour chaque* $a \in I$*, le point* $x(a)$ *est périodique de période* $T(a)$ *et contenu dans* $h^{-1}(a)$*.*

L'application

$$I \times \mathbb{S}^1 \ni (a, \theta) \longmapsto \varphi^{\theta T(a)}(x(a)) \in X$$

est un plongement du cylindre dans X *dont l'image est invariante.*

◄ Donnons d'abord une démonstration légèrement informelle. L'orbite de x_e est non dégénérée en tant qu'orbite du champ V sur la variété $h^{-1}(e)$. Pour a voisin de e, la restriction V_a de V à $h^{-1}(a)$ est une perturbation de V_e. On applique alors le théorème précédent qui nous donne une orbite périodique x_a de V_a. On est toutefois pas exactement dans le cadre du théorème précédent car l'espace $h^{-1}(a)$ dépend du paramètre a. Même si cette preuve peut être rendue rigoureuse, il est plus simple d'utiliser une section de Poincaré.

On considère une section de Poincaré locale Y en x_e et l'application de retour ψ. On a $h \circ \psi = h$. On veut montrer qu'il existe un intervalle I contenant e et un courbe régulière $a \longmapsto x_a$ de points fixes de ψ tels que $h(x_a) = a$. On se place dans une carte locale en x_e pour laquelle la fonction h est la dernière coordonnée. On a dont $Y = \mathbb{R}^{d-2} \times \mathbb{R}$, et, en notant $y = (z, a)$ les points de ce produit, on a $h(z, a) = a$. Comme l'application de retour ψ préserve a, elle est de la forme $\psi(z, a) = (F(z, a), a)$ où $F : Y \longrightarrow \mathbb{R}^{d-2}$ est régulière. En notant $F_a(z) = F(z, a)$ et $x_e = (z_e, e)$, on a $F_e(z_e) = z_e$, et ce point fixe est non dégénéré pour l'application F_e. On déduit donc l'existence d'une courbe $a \longmapsto z_a$ telle que $F_a(z_a) = z_a$. On pose alors $x_a = (z_a, a)$.

Concernant le dernier point, il faut d'abord remarquer que l'application $F(a, \theta) = \varphi^{\theta T(a)}(x(a))$ est bien définie sur $I \times \mathbb{S}^1$ car $x(a)$ est $T(a)$-périodique. De plus, elle est injective, et c'est un difféomorphisme local. Si on considère un intervalle ouvert J dont la fermeture est contenue dans I, alors l'application F restreinte au compact $\bar{J} \times S^1$ est donc un plongement topologique, c'est à dire un homéomorphisme sur son image. La restriction de F à $J \times S^1$ est donc un difféomorphisme local et un plongement topologique, c'est à dire un plongement. ►

2 Exposant global, systèmes linéaires, stabilité.

L'étude de systèmes linéaires montre que deux orbites d'un système dynamique s'écartent souvent à vitesse exponentielle. Considérons un système discret sur un espace métrique X engendré par une application Lipschitz $\varphi : X \longrightarrow X$.

On note $\mathrm{Lip}\varphi^n$ la constante de Lipschitz de l'application φ^n, et on définit l'exposant global

$$e := \lim_{n\to+\infty} (\mathrm{Lip}\varphi^n)^{1/n}.$$

C'est un taux maximal auquel les orbites peuvent s'écarter, on a bien sur $e \leqslant \mathrm{Lip}\varphi$. La première remarque est que cette limite existe.

◄ Notons $u(n) := \log \mathrm{Lip}\varphi^n$. On constate que $u(n+m) \leqslant u(n) + u(m)$ pour tout $n, m \geqslant 0$. La suite u_n admet une limite au vu du très classique lemme sous-additif suivant (preuve sur wikipedia), et donc aussi la suite $e^{u(n)}$. ►

Lemme 2.1. *Soit u_n une suite de nombres réels telle que $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$ pour tous n et n. Alors la suite u_n/n converge, lorsque $n \longrightarrow \infty$, vers la limite* $\inf(u_n/n) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

On dit que les distance D et d sont Lipschitz-équivalentes si les quotients D/d et d/D sont bornés en dehors de la diagonale de $X \times X$. En particulier, elles engendrent la même topologie, et si l'une est complète, l'autre l'est aussi. On vérifie facilement que, contrairement à $\mathrm{Lip}\varphi$, l'exposant global e ne change pas si l'on remplace la distance d par une distance Lipschitz-équivalente à D. Il se peut, pour une distance donnée, que le taux asymptotique e soit bien plus petit que $\mathrm{Lip}\varphi$. Toutefois, il existe des distance mieux adaptées pour lesquelles $e \approx \mathrm{Lip}\varphi$. Plus précisément :

Propriété 2.2. *Pour tout $b > e$, il existe une distance D Lipschitz-équivalente à d, et pour laquelle* $\mathrm{Lip}\varphi \leqslant b$.

◄ Il existe n tel que $\mathrm{Lip}\varphi^n \leqslant b^n$. On pose

$$D(x, y) = d(x, y) + b^{-1} d(\varphi(x), \varphi(y)) + \cdots + b^{1-n} d(\varphi^{n-1}(x), \varphi^{n-1}(y)).$$

Alors,

$$\begin{aligned} D(\varphi(x), \varphi(y)) &= d(\varphi(x), \varphi(y) + \cdots + b^{1-n} d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \\ &\leqslant d(\varphi(x), \varphi(y)) + \cdots + b^{2-n} d(\varphi^{n-1}(x), \varphi^{n-1}(y)) + bd(x, y) = bD(x, y). \text{ ►} \end{aligned}$$

Dans le cas $e < 0$, on a donc affaire à une dynamique particulièrement simple :

Proposition 2.3. *Si $e < 1$ et si X est complet, alors il existe un unique point fixe x_0 et toutes les orbites convergent vers x_0.*

On se ramène à une contraction au moyen d'un changement de distance, et on utilise le Théorème du point fixe, dont on rappelle ici l'énoncé et la preuve pour en souligner le caractère dynamique.

Théorème 2.4. *Soit X un espace métrique complet et φ une contraction. Alors φ admet un unique point fixe x_0, toutes les orbites tendent vers x_0.*

◄ On considère n'importe quel point y_0, et la suite $y_n = \varphi^n(y_0)$ associée. On a alors $d(y_{n+1}, y_n) \leqslant bd(y_n, y_{n-1})$, où b est la constante de Lipschitz de φ. Ceci implique que

$$d(y_n, y_m) \leqslant \sum_{i\geqslant n} b^i d(y_0, y_1) \leqslant \frac{b^n}{1-b} d(y_0, y_1)$$

pour tout $m \geqslant n$. On en déduit que la suite y_n est de Cauchy, et donc qu'elle a une limite x_0. En passant à la limite dans l'égalité $y_{n+1} = \varphi(y_n)$, on obtient que $x_0 = \varphi(x_0)$: x_0 est un point fixe. Si z est une autre condition initiale, alors $d(z_n, x_0) \leqslant b^n d(z, x_0) \longrightarrow 0$: toutes les orbites convergent vers x_0. ►

On peut poursuivre l'étude des contractions en s'intéressant au problème de conjugaison :

Proposition 2.5. *Soit X un espace métrique complet et soit φ un homéomorphisme de X qui est une contraction. Soit ψ un homéomorphisme qui est une contraction égale à φ en dehors d'une boule de rayon fini. Alors ψ est conjuguée à φ, c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme h de X tel que $h\circ\varphi = \psi\circ h$.*

On peut penser à h comme à un changement de coordonnées qui transforme φ en ψ. Si l'on ne suppose pas que ψ est un homéomorphisme, on obtient quand même une application continue h, on dit que c'est une semi-conjugaison.

◄ Soit x_0 le point fixe de φ, y_0 le point fixe de ψ. Il existe $R > 0$ tel que $\psi = \varphi$ en dehors de la boule $B(x_0, R)$. Pour tout $x \neq 0$, on a $d(\varphi^{-1}(x), x_0) \geqslant d(x, x_0)/b$ donc $\varphi^{-n}(x)$ n'appartient pas à la boule $B(x_0, R)$ pour n assez grand. On déduit que la suite $\psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ se stabilise pour n grand. Posons $h(x) := \lim \psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ (de sorte que $h(x_0) = y_0$). Montrons que h est continue. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $h = \psi^N \circ \varphi^{-N}$ en dehors de $B(x_0, \epsilon)$. La continuité de h dans le complémentaire de x_0 en découle. Il reste à montrer que $h(x_n) \longrightarrow y_0$ lorsque $x_n \longrightarrow x_0$. On note k_n le plus grand entier pour lequel $\varphi^{-k_n}(x_n) \in B(x_0, R)$. La suite k_n tend vers l'infini. Pour tout $i \geqslant 0$, on a $\psi^i \circ \varphi^{-i} \circ \varphi^{-k_n}(x) = \varphi^{-k_n}(x_n)$, donc $h(x_n) = \psi^{k_n} \circ \varphi^{-k_n}(x_n)$ donc $d(x_0, h(x_n)) \leqslant b^{k_n} R$ où $b =$ Lip (ψ). On déduit que h est continue.

On a $\psi \circ h(x_0) = \psi(y_0) = y_0 = h(x_0) = h(\varphi(x_0))$. Pour $x \neq x_0$, il existe N tel que $h(x) = \psi^n \circ \varphi^{-n}(x)$ pour tout $n \geqslant N$. Pour $x \neq x_0$, on a

$$h(\varphi(x)) = \lim \psi^n \circ \varphi^{1-n}(x) = \psi(\lim \psi^{n-1} \circ \varphi^{1-n}(x)) = \psi \circ h(x).$$

On a montré que h est une semi-conjugaison. Dans le cas où ψ est un homéomorphisme, on pose de la même façon $g := \lim \varphi^n \circ \psi^{-n}$. C'est une application continue.

Par passage à la limite dans les égalités $Id = \varphi^n \circ \psi^{-n} \circ \psi^n \circ \phi^{-n}$, on obtient que $Id = g \circ h$, et de manière similaire que $Id = h \circ g$. Donc h est un homéomorphisme. ►

Les cas $e = 1$ et $e > 1$ donnent lieu à des dynamiques beaucoup plus riches, dont certains aspects seront décrits dans la suite du cours.

Dans le cas d'un système linéaire engendré par un endomorphisme continu sur un espace de Banach B, l'exposant global n'est autre que le rayon spectral. On rappelle en effet la formule du rayon spectral :

Proposition 2.6. *Soit A un endomorphisme continu de l'espace de Banach B. Alors*

$$e := \lim |A^n|^{1/n} = max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$$

où le maximum est pris sur le spectre σ de A.

On peut préciser la propriété 2.2 dans ce cas :

Lemme 2.7. *Soit $A : B \longrightarrow B$ un endomorphisme de l'espace de Banach $(B, |.|)$, soit R le rayon spectral de L et $b > R$. Il existe une norme $\|.\|$ de Banach sur B, équivalente à la norme $|.|$, pour laquelle $\|A\| \leqslant b$. Si la norme $|.|$ est Hilbertienne, alors la norme $\|.\|$ l'est aussi.*

Si L est un isomorphisme de Banach, si r est l'inverse du rayon spectral de A^{-1} (c'est donc l'infimum des modules des éléments du spectre de A), et si $0 < a < r$, alors il existe une norme équivalente $[.]$ pour laquelle

$$a[v] \leqslant [Av] \leqslant b[v]$$

pour tout $v \in B$.

◄ Il existe N tel que $\|A^N\| \leqslant b^N$ (par la formule du rayon spectral). On pose

$$\|v\| := \left(\sum_{i=0}^{N-1} b^{-2i} |A^i v|^2 \right)^{1/2},$$

de sorte que

$$\|Av\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} b^{-2i} |A^{i+1} v|^2 = b^2 \sum_{i=1}^{N} b^{-2i} |A^i v|^2 = b^2 (\|v\|^2 - |v|^2 + b^{-2N} |A^N v|^2) \leqslant b^2 \|v\|^2.$$

Dans le cas où L est inversible, on choisit M tel que $\|A^{-M}\| \leqslant a^{-M}$ et on pose

$$[v]^2 := \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} \|A^{-i} v\|^2.$$

Par un calcul identique au précédent, on obtient que $[A^{-1}v] \leqslant a^{-1}[v]$ pour tout v, donc que $a[v] \leqslant [Av]$. Par ailleurs,

$$[Av]^2 = \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} \|A \circ A^{-i} v\|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{M-1} a^{2i} b^2 \|A^{-i} v\| = b^2 [v]^2. ►$$

Précisons encore ce résultat dans le cas de la dimension finie.

Soit $A : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de l'espace E, de dimension d finie. Soient $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_k$ les modules des valeurs propres complexes de A. Soit E_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ la somme des espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de module μ_k, on a

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k.$$

Proposition 2.8. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe une structure Euclidienne sur E qui a les propriétés suivantes :*

Les sous-espaces E_i sont orthogonaux, et pour tout $v \in E_i$, on a

$$(\mu_i - \epsilon)|v| \leqslant |Av| \leqslant (\mu_i + \epsilon)|v|.$$

On peut en particulier choisir ϵ assez petit pour que $\mu_i + \epsilon < \mu_{i+1} - \epsilon$.

Étant donné un endomorphisme A sur un espace Euclidien E de dimension finie, on peut définir, en plus des valeurs propres, les valeurs caractéristiques $\delta_1 \leqslant \cdots \leqslant \delta_d$ (comptées avec multiplicité) ou $r_1 < \cdots < r_l$ (comptées sans multiplité). Les valeurs δ_i sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice symétrique positive ${}^tAA$.

En notant D la matrice diagonale dont les valeurs diagonales sont δ_i, il existe deux isométries U et O telles que $A = UDO$ (et cette propriété caractérise les valeurs δ_i, à l'ordre près). Ceci implique que les valeurs δ_i sont les grand axes de l'éllipsoide $A(B)$ (B étant la boule unité fermé).

Finalement, on peut caractériser les valeurs δ_j de la façon suivante :

$$\delta_j = \min_{F \in G_j(E)} \max_{v \in F, |v|=1} |Av|$$

où le minimum est pris sur tous les sous-espaces F de dimension j de E. En particulier, $\delta_d(A)$ est la norme de A et δ_1 la conorme.

◄ Soit e_j une base orthonormée de vecteurs propres de D, et $f_j = O^{-1}(e_j)$, qui est aussi une base orthonormée. Notons pour l'instant $s_j := \min_{F \in G_j(E)} \max_{v \in F, |v|=1} |Av|$ la valeur déterminée par le terme de droite ci-dessus.

Si $F_j = \text{vect}(f_1, \ldots, f_j)$, on a $\max_{v \in F_j, |v|=1} |Av| = \delta_j$, donc $\delta_j \leqslant s_j$.

Réciproquement, soit F un sous-espace de dimension j. Si F contient un vecteur w orthogonal à F_j (que l'on peut supposer unitaire), alors $w \in \text{vect}(f_{j+1}, \ldots, f_d)$, donc

$$\max_{v \in F, |v|=1} |Av| \geqslant |Aw| \geqslant \delta_{i+1}(A) \geqslant \delta_j(A).$$

Sinon, F contient un vecteur $z = f_j + w$ avec $w \in \text{vect}(f_{j+1}, \ldots, f_d)$, et alors

$$\max_{v \in F, |v|=1} |A|^2 \geqslant |Az|^2/|z|^2 = (|Af_j|^2 + |Aw|^2)/|z|^2 \geqslant \delta_j(A)^2(1 + |w|^2)/|z|^2 = \delta_j(A)^2.$$

On a donc bien $s_j \leqslant \delta_j$. ►

Contrairement aux valeurs propres, les valeurs caractéristiques dépendent de la structure Euclidienne. On a le raffinement suivant de la formule du rayon spectral :

Proposition 2.9. $\delta_j(A^n)^{1/n} \longrightarrow |\lambda_j|$, *où les λ_j sont les valeurs propres de A, classées par ordre croissant de leur norme.*

Le cas $i = d$ est la formule du rayon spectral.

◄ Montrons d'abord la formule dans le cas d'une structure Euclidienne pour laquelle les espaces E_i sont orthogonaux. Dans ce cas, l'ensemble des valeurs caractéristiques de A est la réunion des ensembles des valeurs caractéristiques des restrictions $A_i := A_{|E_i}$. En notant d_i la dimension de E_i, la formule du rayon spectral implique que $\delta_{d_i}(A_i^n)^{1/n} \longrightarrow \mu_i$. La formule du rayon spectral appliquée à A_i^{-1} implique que $\delta_1(A_i^n)^{1/n} \longrightarrow \mu_i$. Par encadrement, on a donc $\delta_j(A_i^n)^{1/n} \longrightarrow \mu_i$ pour tout $j = 1, \ldots, d_i$. Si A_1 n'est pas inversible, c'est que $\mu_1 = 0$, donc que $\delta_{d_1}(A_1^n)^{1/n} \longrightarrow 0$ et donc que $\delta_j(A_1^n)^{1/n} \longrightarrow 0$ pour tout $j = 1 \ldots, d_1$.

Soit maintenant une structure Euclidienne quelconque, de norme $\|.\|$. Cette norme est équivalente à celle de la structure Euclidienne considérée ci-dessus, c'est à dire que $|.|/C \leqslant \|.\| \leqslant C|.|$ pour un $C \geqslant 1$. Les formules de minmax ci-dessus impliquent alors, en notant δ'_j les valeurs caractéristiques pour la structure $\|.\|$, que $\delta_i(.)/C \leqslant \delta'_i(.) \leqslant C\delta_i(.)$. Ceci implique que $\delta'_i(A^n)^{1/n} \longrightarrow |\lambda_i|$. ►

L'une des raisons pour lesquelles il est utile d'étudier les systèmes linéaires est qu'ils sont de bonnes approximations des dynamiques régulières au voisinage des points fixes. Soit en effet x_0 un point fixe de l'application $\varphi : X \longrightarrow X$.

Le point fixe x_0 est dit *Lyapounov stable* si, pour tout voisinage U de x_0, il existe un voisinage V de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le point fixe x_0 est dit *asymptotiquement stable* si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de x_0 tel que toute orbite partant dans W converge vers x_0.

Le bassin de x_0 est l'ensemble des points x tels que $\varphi^n(x) \longrightarrow x_0$ en $+\infty$. Si x_0 est un point fixe asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x_0.

La stabilité de Lyapounov est une hypothèse nécessaire (le point fixe ci-dessous n'est pas asymptotiquement stable).

Les contractions fournissent des exemples de points asymptotiquement stables.

On peut étudier la stabilité de l'origine dans les systèmes linéaires. On commence par remarquer :

Propriété 2.10. *Le système associé à l'endomorphisme A est Lyapounov-stable si et seulement si la suite $|A^n|, n \in \mathbb{N}$ est bornée.*

◄ Supposons la suite $|A^n|$ bornée par une constante C. Alors, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n(B(0, \epsilon/C)) \subset B(0, \epsilon)$, ce qui montre la stabilité de lyapounov.

Réciproquement, supposons que le système est Lyapounov-stable. Ceci implique que, pour tout v, la suite $A^n v$ est bornée. Considérons une base orthonormée $e_1, \dots, e_d$. Pour tout vecteur v, on a $A^n v = \langle e_1, v\rangle A^n e_1 + \cdots + \langle e_d, v\rangle A^n e_d$, et donc $|A^n v| \leqslant dC|v|$, si C est un majorant commun des suites $A^n e_i$. Ceci montre que la suite $|A^n|$ est bornée. ►

Remarquons pour finir que, si notre preuve ne marche qu'en dimension finie, le résultat reste vrai dans un espace de Banach, il découle du théorème de Banach-Steinhauss.

Propriété 2.11. *Soit A un endomorphisme de E (de dimension d finie). Pour toute norme $|.|$ sur E, on a équivalence entre*

— 0 *est un point fixe asymptotiquement stable.*

— $|A^n| \longrightarrow 0$.

— $e(A) < 1$.

◄ Si la suite $|A^n|$ tend vers 0, alors elle est bornée ce qui implique la stabilité de lyapounov. Il est clair que $A^n v \longrightarrow 0$ pour tout v, on a donc la stabilité asymptotique.

Si $e(A) < 1$, alors il existe une norme Euclidienne $\|.\|$ pour laquelle $|[A\| < 1$, et donc $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n \longrightarrow 0$. Cette propriété est alors satisfaite pour toutes les normes.

Si $e(A) \geqslant 1$, alors il existe une valeur propres complexe λ de module $|\lambda| \geqslant 1$, et un vecteur propre complexe correspondant.

Si λ est réelle, chaque vecteur propre réel correspondant v vérifie $Av = \lambda v$, et donc $|Av| = |\lambda||v| \geqslant |v|$. L'orbite correspondante ne tend pas vers 0, qui n'est donc pas asymptotiquement stable.

Si λ n'est pas réel, alors A admet un sous-espace invariant F de dimension 2, sur lequel A est linéairement conjuguée à la multiplication par λ sur $\mathbb{C}$. Il existe donc une norme Euclidienne pour laquelle $|Av| = |\lambda||v| \geqslant |v|$ pour tout $v \in F$. Les orbites correspondantes ne tendent pas vers 0, qui n'est donc pas asymptotiquement stable. ►

Propriété 2.12. *Le point fixe* 0 *est Lyapounvov-stable pour l'application linéaire A si et seulement si* $e(A) \leqslant 1$, *et si de plus E est la somme directe de deux sous-espaces invariants F et H tels que :*

La restriction de A_F à F est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$).

La restriction A_H de A à H vérifie $e(a_H) < 1$.

◄ Supposons que A est Lyapounov-stable, et que $e(A) \geqslant 1$. Considérons l'espace F défini comme la somme des espaces caractéristiques de A correspondant aux valeurs propres de module $e(A)$.

Si $e(A) > 1$, alors il existe une norme sur F pour laquelle $Av \geqslant av$ pour tout $v \in F$, avec $a > 0$, ce qui contredit la stabilité de Lyapounov. On a donc $e(A) = 1$.

Montrons de plus que la restriction A_F de A à F est diagonalisable. On a la décomposition $A_F = D(I + N)$, avec D diagonalisable dans $\mathbb{C}$, N nilpotente, et $DN = ND$. Comme les valeurs propres de D sont de module 1 les puissances D^n, $n \in \mathbb{Z}$, sont bornées. Il faut donc montrer que $N = 0$ si $(I + N)^n, n \in \mathbb{N}$ est borné. Comme N est nilpotente, les coefficients de cette matrice sont des polynômes en n. Tout polynôme borné sur $\mathbb{N}$ est constant, donc la suite $(I + N)^n$ est constante, donc égale à $I = (I + N)^0$. On a donc bien $N = 0$, et $A_F = D$. ►

Exercice 2.1. *Soit A un isomorphisme de l'espace Euclidien E telle que les $A^n, n \in \mathbb{Z}$ sont bornés. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont de module 1 et que A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. En déduire qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel A est une isométrie.*

Dans le cas d'une application dérivable sur une variété (qui peut être $\mathbb{R}^d$), le linéarisé donne déjà une information sur la stabilité :

Théorème 2.13. *Supposons que φ est différentiable au point fixe x_0, notons $L = d\varphi_{x_0}$ le linéarisé, et R son rayon spectral. Si $R < 1$, alors x_0 est asymptotiquement stable. On dit que le point fixe est linéairement stable. Si $R > 1$, alors x_0 n'est pas Lyapounov stable (donc pas asymptotiquement stable).*

◄ On suppose que $R(L) < 1$, et on choisit $b \in]R, 1[$. Il existe une norme $\|.\|$ pour laquelle $\|L\| < b$. Fixons $\delta \in]0, 1-b[$, et ϵ tel que $\|\varphi(x) - L(x - x_0) - x_0\| \leqslant \delta\|x\|$ si $\|x - x_0\| \leqslant \epsilon$. Alors, si $\|x - x_0\| < \epsilon$, on a

$$\|\varphi(x) - x_0\| \leqslant (b + \delta)|x - x_0|.$$

Ceci implique que le boule $B(x_0, \varepsilon), \varepsilon < \epsilon$ sont positivement invariantes (stabilité de Lyapounov) et que toutes leurs orbites convergent vers x_0 (stabilité asymptotique).

Réciproquement, supposons que $R > 1$ (et que l'espace est de dimension finie). On a alors une décomposition de l'espace $\mathbb{R}^d = E \oplus F$, où E et F sont invariants par L, où toutes les valeurs propres de $L_{|E}$ sont de module R, et où le rayon spectral R_F de $L_{|F}$ est strictement inférieur à R (une telle décomposition n'existe pas forcément en dimension infinie). On fixe a et $b > 1$ tels que $R_F < b < a < R$. En appliquant le Lemme, on trouve une norme Euclidienne $\|.\|_E$ sur E telle que $\|Lv\|_E \geqslant a\|v\|_E$ pour tout v dans E et un norme Euclidienne $\|.\|_F$ sur F telle que $\|Lv\|_F \leqslant b\|v\|_F$ pour tout $v \in F$. On pose alors $\|v\|^2 = \|v_E\|_E^2 + \|v_F\|_F^2$, où v_E et v_F sont les composantes de v suivant E et F. C'est une norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, pour laquelle E et F son orthogonaux, et qui coïncide avec $\|.\|_E$ sur E et $\|.\|_F$ sur F.

Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que les inégalités suivantes sont satisfaites pour $x \in B(0, \epsilon)$:

$$\|\varphi_E(x)\| \geqslant a\|x_E\| - \delta\|x\| \quad , \quad \|\varphi_F(x)\| \leqslant b\|x_F\| + \delta\|x\|.$$

En choisissant δ assez petit pour que $b + 2\delta < a - 2\delta$, nous allons en conclure que tout voisinage de 0 contient un point dont l'orbite sort de $B(0, \epsilon)$, contredisant la stabilité de Lyapounov. On prend une condition initiale $x = x_E + x_F$ telle que $\|x_E\| \geqslant \|x_F\|$. Ceci implique que $\|\varphi_E(x)\| \geqslant (a - 2\delta)\|x_E\|$ et $\|\varphi_F(x)\| \leqslant b\|x_F\| + 2\delta\|x_E\| \leqslant (b + 2\delta)\|x_E\|$. En notant $x^n = x_E^n + x_F^n$ l'orbite de x, on obtient donc par récurrence que, tant que $x^n \in B(0, \epsilon)$, $\|x_E^n\| \geqslant \|x_F^n\|$ et $\|x_E^n\| \geqslant (a - 2\delta)^n\|x_E\|$. Comme $a - 2\delta > 1$, l'orbite sort de $B(0, \epsilon)$. ►

On peut se poser les mêmes questions dans le cas où X est un espace de Banach de dimension infinie. On remarque que la preuve ci-dessus n'utilise jamais la finitude de la dimension pour la partie stabilité, qui reste donc vraie en dimension infinie. La partie instabilité est un peu plus délicate. Pour que la preuve fonctionne, il faut supposer un peu plus sur le linéarisé afin de pouvoir décomposer l'espace comme nous l'avons fait dans la preuve. Il suffit par exemple de supposer l'existence d'un réel $R' \in [1, R[$ tel que le spectre du linéarisé ne contient aucun point de module R'. Cette hypothèse supplémentaire n'est pas nécessaire si φ est supposée C^2, mais il faut une autre démonstration.

Revenons à la questions de la conjugaison topologique au voisinage du point fixe :

Proposition 2.14. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application C^1 fixant l'origine. Supposons que $L = d\varphi_0$ est inversible, et de rayon spectral strictement inférieur à 1. Alors φ est localement conjuguée à L. Plus précisément il existe deux voisinages ouverts U et V de 0 et un homéomorphisme $h : U \longrightarrow V$ tel que $h \circ L = \varphi \circ h$ sur U.*

◄ On choisit une norme Euclidienne $|.|$ pour laquelle L est une contraction. On écrit $\varphi = L + \phi$, où $\phi(x) = o(|x|)$. On considère une fonction de troncature $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow [0, 1]$ qui est égale à 1 sur la boule $B(0, 1)$ et à 0 hors de la boule $B(0, 2)$. En notant $f_\epsilon(x) = f(x/\epsilon)$, on considère l'application $\psi := L + f_\epsilon\phi$. On va montrer que c'est, pour $\epsilon > 0$ petit, un homéomorphisme et une contraction, ce qui implique la conclusion par la Proposition 2.5.

On montre d'abord pour ceci que $\mathrm{Lip}(f_\epsilon\phi)$ peut être rendu arbitrairement petit. Il existe une fonction $\delta(\epsilon)$ qui tend vers 0 en 0 et a les propriétés suivantes : ϕ est $\delta(\epsilon)$-Lipschitz sur $B(0, 2\epsilon)$, et $|\phi| \leqslant \epsilon\delta(\epsilon)$ sur $B(0, 2\epsilon)$. On a alors

$$\mathrm{Lip}(f_\epsilon\phi) \leqslant \delta(\epsilon) + \delta(\epsilon)\mathrm{Lip}(f),$$

cette constante de Lipschitz tend donc vers 0 lorsque ϵ tend vers 0. Lorsque ϵ est choisi assez petit, l'application ψ est donc une contraction.

Montrons maintenant que c'est un homéomorphisme. On écrit pour ceci $\psi = L(I + L^{-1}f_\epsilon\phi)$. On peut supposer en choisissant ϵ assez petit que l'application $L^{-1}f_\epsilon\phi$ est une contraction. On conclut alors par le lemme suivant. ►

Lemme 2.15. *Si f est une contraction d'un espace métrique complet X, alors $I + f$ est un homéomorphisme biLipschitz. De plus, si $a < 1$ est une constante de Lipshitz de f, alors $1/(1 - a)$ est une constante de Lipschitz de l'inverse de $I + f$.*

◄ L'équation $x + f(x) = y$ est équivalent à $f(x) - y = x$. Comme $x \mapsto f(x) - y$ est une contraction, cette équation possède, pour chaque y, une unique solution $g(y)$. On montre maintenant que l'application g est continue, et même Lipschitz, par un argument de boostrap : $|g(y) - g(y')| \leqslant |y - y'| + |f(g(y)) - f(g(y'))| \leqslant |y - y'| + a|g(y) - g(y')|$, donc $(1 - a)|g(y) - g(y')| \leqslant |y - y'|$, c'est à dire que $1/(1 - a)$ est une constante de Lipschitz de g. ►

Exercice 2.2. *Soit φ et ψ deux homéomorphismes de X et Y, respectivement. Soient x_0 et y_0 des points fixes asymptotiquement stables de φ et ψ. Supposons que φ au voisinage de x_0 est topologiquement conjugué (c'est à dire conjugué par un homéomorphisme) à ψ au voisinage de y_0. Si B et B' sont les bassins d'attraction de x_0 et y_0, montrer que $\varphi_{|B}$ est topologiquement conjugué à $\psi_{|B'}$.*

En particulier, les bassins B et B' sont homéomorphes. Le bassin d'un point fixe linéairement stable d'un difféomorphisme est donc homéomorphe à $\mathbb{R}^d$. Sous des hypothèses supplémentaires, on obtient une conjugaison plus régulière.

Proposition 2.16. *Soient φ et ψ des difféomorphismes C^{k+1} ($k \in \{1, \dots, \infty\}$) d'une variété X, fixant x_0. Supposons que φ et ψ ont le même linéarisé L en x_0, et que les modules des valeurs propres de L sont contenus dans l'intervalle $[r, R]$, avec $R^2 < r < R < 1$. Alors, en notant B et B' les bassins de x_0 pour φ et ψ, l'application $\varphi_{|B} : B \longrightarrow B$ est conjuguée à $\psi_{|B'} : B' \longrightarrow B'$ par un difféomorphisme C^k.*

On peut en particulier pendre $\psi = L$. En dimension 1, l'hypothèse de pincement est toujours satisfaite. C'est aussi le cas en dimension 1 complexe. Si $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe fixant 0 et si $|\varphi'(0)| < 1$ alors φ est localement conjuguée à son linéarisé par une conjugaison holomorphe, cette conjugaison s'étend à l'ensemble du bassin d'attraction.

◄ On fixe a et b tels que $b^2 < a < r < R < b$. On choisit une norme Euclidienne sur $T_{x_0}X$ telle que $|L| < b$ et $|L^{-1}| < 1/a$. On identifie un voisinage ouvert U de x_0 dans X à un voisinage V de 0 dans $T_{x_0}M$. Les applications φ et ψ sont b-Lipschitz au voisinage de 0, et les inverses φ^{-1} et ψ^{-1} sont a^{-1}-Lipschitz. Finalement, il existe une constante C telle que $|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant C|x|^2$.

On pose $h_n = \psi^{-n} \circ \varphi^n$. On va montrer que, au voisinage de 0, la suite h_n converge uniformément vers une limite continue h, qui vérifie alors automatiquement $h \circ \varphi = \psi \circ h$. Au voisinage de 0, on a $h_{n+1} - h_n = \psi^{-n+1} \circ \varphi \circ \varphi^n - \psi^{-n+1} \circ \psi \circ \varphi^n$ donc

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \leqslant a^{-(1+n)} C |\varphi^n(x)|^2 \leqslant C(b^2/a)^n |x|^2.$$

Comme $b^2/a < 1$, cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite $h_n = \sum(h_n - h_{n-1})$ dans un voisinage de 0, vers une limite continue h qui vérifie de plus $dh_0 = id$.

La convergence uniforme de h_n sur un voisinage de x_0 implique que cette convergence a lieu sur tout le bassin B, uniformément sur les compacts. En effet, si K est un compact de B et si U est un voisinage de x_0 sur lequel la convergence uniforme a lieu, il existe N tel que $\varphi^N(K) \subset U$. Ceci implique que $h_n \circ \varphi^N$ converge uniformément sur K, il en est donc de même de $h_{n+N} = \psi^{-N} \circ h_n \circ \varphi^N$.

On considère maintenant les applications $T\varphi(x, v) := (\varphi(x), d\varphi_x \cdot v)$, et $T\psi(x, v)$. Elles fixent le point $(x_0, 0)$ et leur différentielle en ce point est $TL(v, w) = (Lv, Lw)$. Les valeurs propres de TL sont les mêmes que celles de L. On est donc dans la situation ci-dessus, sauf que les applications $T\varphi$ et $T\psi$ ne sont que C^k. On vérifie toutefois, en coordonnées locales, l'inégalité

$$|T\varphi(x, v) - T\psi(x, v)| \leqslant C(|x|^2 + |v|^2)$$

pour x proche de 0, qui permet comme ci-dessus de montrer que la suite $H_n = (TL)^{-n} \circ (T\varphi)^n$ converge vers une limite continue H sur $B \times T_{x_0}X$, uniformément sur les compacts. Comme $H_n = Th_n$, on conclut que h est C^1 sur B, avec $Th = H$. Si $k > 1$, on déduit par récurrence que TH est C^{k-1}, et donc que h est C^k.

Comme h est C^k et vérifie $dh_{x_0} = Id$, c'est un difféomorphisme local. Plus précisément, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans M tel que h est un difféomorphisme C^k de U sur son image dans $T_{x_0}M$.

L'expression $h = \psi^{-N} \circ h \circ \varphi^N$ montre alors que h est un difféomorphisme de V sur son image pour tout ouvert V dont l'adhérence est contenue dans le bassin B. Ceci implique que h est un difféomorphisme local injectif sur B, et donc un difféomorphisme de B sur $T_{x_0}M$. ►

La méthode ci-dessus est due à Nelson [1]. Il l'utilise pour démontrer qu'il existe une conjugaison régulière, sans hypothèse de pincement sur les valeurs propres de L, mais en supposant que $|\varphi - L| = O(|x|^r)$ avec r assez grand, ce résultat étant originalement du à Sternberg.

1. E. Nelson, Topics in dynamics I : flows.

En revenant à la preuve, on constate en effet que l'hypothèse de pincement $R^2 < r$ peut être relaxée si φ et ψ ont un contact d'ordre supérieur en x_0. Plus précisément, la conclusion reste vraie si il existe $\alpha \geqslant 2$ tel que $R^\alpha < r$ et $|\varphi(x) - \psi(x)| \leqslant C|x|^\alpha$ (en coordonnées locales). Comme la première condition est satisfaite lorsque α est assez grand, on conclut que le difféomorphisme φ peut toujours être localement conjugué, par un difféomorphisme C^k, à un difféomorphisme polynômial.

La régularité des conjugaisons est une question assez subtile, comme l'illustrent les exercices ci-dessous :

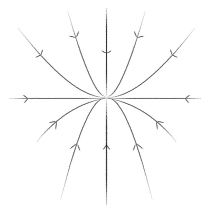
Exercice 2.3. *Considérons l'application* $\varphi(x, y) = (x/2, ay + x^2)$ *et son linéarisé* $\phi(x, y) = (x/2, ay)$.

Pour $a \neq 1/4$*, montrer qu'il existe une conjugaison* C^∞ *entre* φ *et* ϕ*, qui est de la forme* $h(x, y) = (x, y + bx^2)$.

Exercice 2.4. *Considérons l'application* $\varphi(x, y) = (x/2, y/4 + x^2)$ *et son linéarisé* $\phi(x, y) = (x/2, y/4)$.

Montrer qu'il existe une conjugaison entre φ *et* ϕ *de la forme* $h(x, y) = (x, y + ax^2 \ln x)$. *Quelle est la régularité de* h *?*

Montrer qu'il n'existe pas de conjugaison C^2 *au voisinage de* 0.



3 Compacts invariants asymptotiquement stables

Considérons une application continue φ d'une espace métrique X. Étant donnée une partie $Y \subset X$, on a

$$\varphi^{-1}(Y) = Y \Rightarrow \varphi(Y) = Y \Rightarrow \varphi(Y) \subset Y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(Y) \supset Y.$$

On dit que Y est invariant si $\varphi(Y) = Y$, et qu'il est positivement invariant si $\varphi(Y) \subset Y$.

Si Y est positivement invariant, on note Y^* l'ensemble des points y appartenant à une orbite entière, c'est à dire tels qu'il existe une orbite $y_n, n \in \mathbb{Z}$, pour laquelle $y_0 = y$. C'est clairement un ensemble invariant. En général, Y^* peut être vide, mais on a :

Propriété 3.1. *Si Y est un compact non-vide positivement invariant par l'application continue φ, alors $Y^* = \cap_{n\geqslant 1}\varphi^n(Y)$ est un compact invariant non-vide.*

◄ Il est clair que $Y^* \subset \varphi^n(Y)$ pour tout n, et donc $Y^* \subset \cap_{n\geqslant 1}\varphi^n(Y)$. Réciproquement, soit $y \in \varphi^n(Y)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un segment d'orbite $x_n(-n), \dots, x_n(-1)), x_n(0 = y)$. Par extraction diagonale, on trouve une sous-suite n_k telle que $x_{n_k}(i)$ converge, pour tout $i \in \mathbb{N}$, vers une limite $y(-i)$. Par continuité de φ, ces limites forment un orbite, qui peut être prolongée pour $n \geqslant 0$ par $y(n) = \varphi^n(y)$. On a donc $y \in Y^*$, et finalement l'égalité $Y^* = \cap_{n\geqslant 1}\varphi^n(Y)$.

Les images successives $\varphi^n(Y)$ forment une famille décroissante de compacts non-vides, l'intersection Y^* est donc un compact non-vide. De plus, comme l'intersection est décroissante, on a $\varphi(Y^*) = \cap_{n\geqslant 1}\varphi^{n+1}(Y) = Y^*$. ►

On se place dans le contexte d'une application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ où X est un espace métrique.

Le compact invariant $Y \subset X$ est dit *Lyapounov stable* si, pour tout voisinage U de Y, il existe un voisinage V de Y tel que $\varphi^n(V) \subset U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le compact invariant $Y \subset X$ est dit *asymptotiquement stable* si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de Y tel que toute orbite partant dans W converge vers Y (c'est à dire que $d(\varphi^n(x), y) \longrightarrow 0$).

Le bassin de Y est l'ensemble des points x tels que $\varphi^n(x) \longrightarrow Y$ en $+\infty$. Si Y est un compact invariant asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de x_0.

Pour montrer que le point fixe x_0 d'une contraction est asymptotiquement stable, on a utilisé la fonction $f(x) := d(x, x_0)$. On a $f\circ\varphi \leqslant bf$, ce dont on conclut que $f(x_n) \longrightarrow 0$. On peut généraliser un peu cette méthode.

Théorème 3.2. *Supposons que X est localement compact et que Y est un compact invariant de φ. Supposons de plus qu'il existe une fonction de Lyapounov stricte pour Y, c'est à dire une fonction continue $f : U \longrightarrow [0, \infty)$, où U est un voisinage de Y, telle que les fonctions f et $f - f\circ\varphi$ sont strictement positives sur $V - Y$ et nulles sur Y.*

Alors Y est asymptotiquement stable.

Quelques digressions sont utiles avant de démontrer ce résultat. On dit que f est une fonction de Lyapounov si $f\circ\varphi - f \leqslant 0$. Le point x est dit strict si $f\circ\varphi(x) < f(x)$, il est dit neutre en cas d'égalité. Le point x est dit totalement neutre si $f\circ\varphi^n(x) = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur (totalement) neutre de f si il existe un point (totalement) neutre x de f tel que $f(x) = a$.

On définit, pour tout point x, l'omega-limite $\omega(x) \subset X$ comme l'ensemble des points d'accumulation de la suite $\varphi^n(x), n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, c'est l'ensemble des limites de sous-suites de la forme $\varphi^{n_k}(x)$, $n_k \longrightarrow \infty$. Dans le cas inversible, on définit $\alpha(x)$ comme l'ensemble des points d'accumulations en $-\infty$.

Lemme 3.3. *L'ensemble $\omega(x)$ est fermé et positivement invariant. Si l'espace X est compact, alors $\omega(x)$ est non-vide pour tout x et $\varphi(\omega(x)) = \omega(x)$.*

◄ Tout point y de $\omega(x)$ est la limite d'une suite de la forme $\varphi^{n_k}(x)$. Alors, $\varphi(y)$ est la limite de la suite $\varphi^{n_k+1}(x)$, il appartient donc à $\omega(x)$. On a

$$\omega(x) = \cap_{n\geqslant 0}\overline{\{\varphi^n(x), \varphi^{n+1}(x), \dots\}},$$

c'est donc une intersection de fermés, et, dans le cas où X est compact, une intersection décroissante de compacts non vides. Finalement, si $y = \lim \varphi^{n_k}(x)$ est un point de $\omega(x)$, alors toute valeur d'adhérence de la suite $\varphi^{n_k-1}(x)$ est une préimage de y contenue dans $\omega(x)$. ►

Proposition 3.4. *Si f est une fonction de Lyapounov, chaque ensemble limite $\omega(x)$ est contenu dans un niveau totalement neutre de f.*

◄ Si $\omega(x)$ est vide, il n'y a rien à démontrer. Sinon, on considère un point $y \in \omega(x)$ qui est donc la limite d'une sous-suite $\varphi^{n_k}(x)$. La suite $f\circ\varphi^n(x)$ étant décroissante, elle tend vers $a := f(y)$. L'ensemble $\omega(x)$ est donc contenu dans $f^{-1}(a)$. Comme c'est un ensemble positivement invariant, ses points sont donc totalement neutres. ►

Revenons à la démonstration du théorème.

◄ Si Y est ouvert dans X, il n'y a rien à démontrer, on suppose donc dans la suite que ce n'est pas le cas.

On considère la fonction $f : U \longrightarrow [0, \infty)$ et un voisinage $V \subset U$ tel que $f > 0$ et $f - f \circ \varphi > 0$ sur $V - Y$.

Il existe un voisinage compact K de Y contenu dans V. Par continuité de φ, il existe un voisinage ouvert $W \subsetneq K$ tel que $\varphi(\bar{W}) \subset K$. On pose $a = \min_{K-W} f$, on a $a > 0$. On pose $Z = \{x \in \bar{W}, f(x) \leqslant a\}$, qui est un voisinage compact de Y. L'ensemble Z est positivement invariant. En effet, si $x \in Z - Y$, alors $\varphi(x) \in K$ et $f \circ \varphi(x) < f(x) \leqslant a$. Ceci implique que x est dans W, donc dans Z. On a montré que tout voisinage V contient un voisinage positivement invariant Z, ceci implique la stabilité de Lyapounov.

En appliquant la proposition précédente à $\varphi_{|Z}$, on conclut que $\omega(x) \subset Y$ pour tout $x \in Z$, ce qui montre la stabilité asymptotique. ►

Exercice 3.1. *Soit Y un compact invariant. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ telle que $f_{|Y} = 0$ et $f > 0$ sur $X - Y$. Supposons de plus que f est propre (c'est à dire que les ensembles $f^{-1}([0, a])$ sont compacts) et stricte en dehors de Y. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable de bassin X entier.*

Exercice 3.2. *Soit X un espace métrique quelconque et $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue. Supposons qu'il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, \infty)$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x) \geqslant h(d(x_0, x))$, où $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ est une fonction continue strictement croissante. Supposons de plus qu'il existe une fonction continue $\phi :]0, \infty) \longrightarrow]0, \infty)$ telle que $f \circ \varphi \leqslant f - \phi \circ f$. Montrer que x_0 est asymptotiquement stable de bassin X entier.*

Le théorème admet une réciproque :

Théorème 3.5. *On suppose X localement compact. Soit Y un compact invariant asymptotiquement stable, de bassin B. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ qui a les propriétés suivantes : $f = 1$ sur $X - B$, $f \in]0, 1[$ sur $B - Y$, $f = 0$ sur Y et $f \circ \varphi - f < 0$ sur $B - Y$.*

Dans le cas particulier des points fixes linéairement stables, on peut prendre comme fonction de Lyapounov une forme quadratique. On commence par quelques lemmes :

Lemme 3.6. *On suppose X localement compact. Le compact invariant Y est asymptotiquement stable si et seulement si il existe un voisinage U de Y qui converge uniformément vers Y au sens suivant : pour tout voisinage W de Y il existe N tel que $\varphi^n(U) \subset W$ pour tout $n \geqslant N$.*

◄ Supposons que U existe. Il est alors clair que toutes les orbites de U tendent vers Y. Fixons maintenant un voisinage W de Y. Il existe N tel que $\varphi^n(U) \subset W$ pour tout $n \geqslant N$. D'autre part, la continuité de φ implique l'existence d'un voisinage $V \subset U$ de x_0 tel que $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \leqslant N$. On a donc $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$, donc Y est Lyapounov stable.

Réciproquement, supposons que Y est asymptotiquement stable. Soit B le bassin de Y, et U un voisinage compact de Y contenu dans B. Soit W un voisinage de Y, et V un voisinage ouvert de Y tel que $\varphi^n(V) \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour tout voisinage ouvert W de x_0, les préimages $\varphi^{-n}(V), n \in \mathbb{N}$ recouvrent B, donc elles recouvrent U. Par compacité, il existe N tel que les préimages $\varphi^{-n}(V), n \leqslant N$ recouvrent U. Pour tout $x \in U$, il existe donc $k \leqslant N$ tel que $\varphi(x) \in V$, et alors $\varphi^n(x) \in W$ pour tout $n \geqslant k$, en particulier pour tout $n \geqslant N$. ►

Lemme 3.7. *Soit U un ouvert. Supposons que $\overline{\varphi(U)} \subset U$ et notons $A := \cap_{n \geqslant 0} \varphi^n(U)$ et $B := \cup_{n \geqslant 0} \varphi^{-n}(U)$. Alors il existe une fonction de Lyapounov continue $f : X \longrightarrow [0, 1]$ qui vérifie les propriétés suivantes : $f^{-1}(0) = A$, $f^{-1}(1) = X - B$, $f \circ \varphi - f < 0$ sur $B - A$.*

◄ Pour chaque n, on considère ne fonction continue $g_n : X \longrightarrow [0, 1]$ telle que $g_n^{-1}(0) = \overline{\varphi^n(U)}$ et $g_n^{-1}(1) = X - U$. On constate que $g_n \circ \varphi^n \leqslant g_n$, avec une inégalité stricte sur $\varphi^{-n}(U) - \overline{\varphi^n(U)}$. En effet, si $x \in U$, alors $g_n \circ \varphi^n(x) = 0 \leqslant g_n(x)$, et cette inégalité est stricte si $x \in U - \overline{\varphi^n(U)}$. Si $x \notin U$, alors $g_n(x) = 1 \geqslant g_n \circ \varphi^n(x)$, et cette inégalité est stricte pour $x \in \varphi^{-n}(U)$.

Pour chaque n, on pose $f_n := (g_n + \cdots + g_n \circ \varphi^{n-1})/n$. La fonction $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ est continue, elle vérifie $f_n \circ \varphi - f_n = (g_n \circ \varphi^n - g_n)/n \leqslant 0$, avec inégalité stricte sur $\varphi^{-n}(U) - \overline{\varphi^n(U)}$. De plus, $f_n(x) = 1$ si et seulement si $g_n(x) = g_n \circ \varphi(x) = \cdots = g_n \circ \varphi^{n-1}(x) = 1$. D'autre part, $f_n(x) = 0$ si et seulement si $g_n(x) = g_n \circ \varphi(x) = \cdots = g_n \circ \varphi^{n-1}(x) = 0$.

On considère maintenant une suite $a_n, n \geqslant 0$, à terme strictement positifs, et telle que $\sum a_n = 1$. On pose $f := \sum a_n f_n$. Comme $f(x)$ est une somme de termes positifs, $f(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$ pour tout n, c'est à dire si et seulement si $g_n(x) = 0$ pour tout n, et donc si et seulement si $x \in A$. De la même façon, on a $f(x) \leqslant \sum a_n = 1$ sauf si $g_n(x) = 1$ pour tout n, c'est à dire si $x \notin \cup \varphi^{-n}(U)$. Finalement, $f \circ \varphi - f = \sum a_n(f_n \circ \varphi - f_n) \leqslant 0$. Cette inégalité est stricte si et seulement si l'un des termes est strictement négatif, c'est à dire pour $x \in B - A$. ►

Concluons la preuve du théorème :

◄ Soit Y un compact invariant asymptotiquement stable. Il existe alors un voisinage relativement compact U qui converge uniformément vers x_0. En particulier, il existe N tel que $\overline{\varphi^N(U)} \subset U$, $\cap\varphi^{nN}(U) = Y = \cap\varphi^n(U)$, et $\cup\varphi^{-nN}(U) = B = \cup\varphi^{-n}(U)$, le bassin de Y.

Il existe alors une fonction de Lyapounov continue $g : X \longrightarrow [0,1]$ pour φ^N, telle que $g^{-1}(0) = Y$, $g\circ\varphi^N - g < 0$ sur $B - A$, $g^{-1}(1) = X - B$.

La fonction $f := (g + g\circ\varphi + \cdots + g\circ\varphi^{N-1})/N$ vérifie alors $f\circ\varphi - f = (g\circ\varphi^N - g)/N \leqslant 0$, avec inégalité stricte sur $B - A$, ainsi que les autres propriétés demandées. ►

Si X est une variété, la fonction de Lyapounov peut être choisie de classe C^∞. C'est une conséquence du résultat suivant :

Proposition 3.8. *Soit X une variété C^∞ de dimension finie et $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue. Soit $f : X \longrightarrow [0,1]$ une fonction de Lyapounov continue. Supposons que les ensembles $A := f^{-1}(0)$, et $B := X - f^{-1}(1)$ son positivement invariants. Supposons finalement que f est stricte sur $B - A$. Alors il existe une fonction de Lyapounov g, de classe C^∞, telle que $g^{-1}(1) = X - B$, $g^{-1}(0) = A$ et g est stricte sur $B - A$.*

◄ Comme $f\circ\varphi < f$ sur l'ouvert $B - A$, il existe une fonction $\tilde g : B - A \longrightarrow]0,1[$ de classe C^∞ et telle que $f\circ\varphi < \tilde g < f$. Ceci implique que $\tilde g\circ\varphi < f\circ\varphi < \tilde g$, donc $\tilde g$ est une fonction de Lyapounov stricte sur $B - A$.

On prolonge $\tilde g$ par les valeurs 1 sur $X - B$ et 0 sur A. On obtient une fonction de Lyapounov continue sur X, qui est stricte et C^∞ sur $B - A$.

On considère maintenant une suite de fonctions C^∞ croissantes $h_n : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ telles que $h_n = 0$ sur $(-\infty, 1/n]$, $h_n = 1$ sur $[1 - 1/n, \infty)$, et $h_n' > 0$ sur $]1/n, 1 - 1/n[$. Chacune des fonctions $h_n\circ\tilde g$, prolongée par 0 et 1 sur A et $X - B$, est une fonction de Lyapounov de classe C^∞, qui est stricte sur $\tilde g^{-1}(]1/n, 1 - 1/n[)$.

Nous pouvons encore une fois introduire une suite $a_n > 0$ telle que $\sum a_n = 1$, et considérer la somme $g = \sum a_n(h_n\circ\tilde g)$. C'est une fonction de Lyapounov continue qui est stricte sur $B - A$.

De plus, au vu du Lemme qui suit, on peut choisir la suite a_n de sorte que g soit C^∞. ►

Lemme 3.9. *Soit f_n une suite de fonctions C^∞. Il existe une suite $a_n > 0$ telle que la série $\sum a_n f_n$ et toutes ses dérivées convergent localement uniformément vers une limite g, qui est donc C^∞.*

L'énoncé ci-dessus et la preuve ci-dessous restent vrais, moyennent de petites adaptations, sur une variété.

◄ On définit les semi-normes $|f|_k := \sup_{|x|\leqslant k}(|f(x)| + |df(x)| + \cdots + |d^k f(x)|)$. On définit alors $a_n := (2^n|f_n|_n)^{-1}$. Alors, pour tout k, on a $a_n|f_n|_k \leqslant a_n|f_n|_n \leqslant 2^{-n}$ lorsque $n \geqslant k$, et donc la série $a_n f_n$ converge en norme $|.|_k$, c'est à dire que les k premières dérivées convergent uniformément sur $B(0,k)$. ►

On considère maintenant le cas où X est une variété (ou juste $X = \mathbb{R}^d$) et où V est un champ de vecteurs C^1 et complet sur X. On note φ^t le flot. On dit que $Y \subset X$ est invariant si $\varphi^t(Y) = Y$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les compacts invariants Lyapounov stables et asymptotiquement stables se définissent exactement comme dans le cas des applications :

Le compact invariant Y est dit Lyapounov stable si, pour tout voisinage U de Y, il existe un voisinage V de Y tel que $\varphi^t(V) \subset U$ pour tout $t \geqslant 0$.

Le compact invariant Y est dit asymptotiquement stable si il est Lyapounov stable et si, de plus, il existe un voisinage W de Y tel que toute orbite partant dans W converge vers Y.

Le bassin de Y est l'ensemble des points x tels que $\varphi^t(x) \longrightarrow Y$ en $+\infty$. Si Y est un compact invariant asymptotiquement stable, alors son bassin est un voisinage ouvert de Y.

Propriété 3.10. *Le compact invariant Y est Lyapounov (resp. asymptotiquement) stable pour V si et seulement si il existe $T > 0$ tel que x_0 est Lyapounov (resp. asymptotiquement) stable pour φ^T. De plus, le bassin de Y en tant que point fixe de φ^T est égal au bassin de Y en tant que point fixe de V.*

◄ Il est clair que les propriétés de stabilité pour V entreine les mêmes propriétés pour chacun des flots $\varphi^t, t > 0$.

Réciproquement, supposons que x_0 est Lyapounov stable pour φ^T, avec $T > 0$. Pour tout voisinage U de Y, il existe un voisinage W tel que $\varphi^t(W) \subset U$ pour tout $t \in [0,T]$. Ceci découle de la compacité de $[0,T]$ et de la continuité de l'application $(t,x) \longmapsto \varphi^t(x)$.

Comme x_0 est Lyapounov stable pour φ^T, il existe un voisinage W' tel que $\varphi^{nT}(W') \subset W$ pour tout $n \geqslant 0$. On déduit que $\varphi^t(W') \subset U$ pour tout $t \geqslant 0$.

Finalement, si l'orbite $x(t) = \varphi^t(x)$ converge vers Y, il en est clairement de même de la suite $n \longmapsto x(nT)$. Réciproquement, supposons que la suite $x(nT)$ converge vers Y. Pour tout voisinage U de Y, on a vu qu'il existe un voisinage W pour lequel $\varphi^t(W) \subset U$ pour tout $t \in [0,T]$. Il existe N tel $x(nT) \in W$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui implique que $x(t) \in U$ pour tout $t \geqslant NT$. ►

Si f est une fonction de classe C^1, alors les points suivants sont évidemment équivalents :
— $f\circ\varphi^t \leqslant f$ pour tout $t \geqslant 0$.
— $df \cdot V \leqslant 0$.
On dit alors que f est une fonction de Lyapounov. Il n'est donc pas nécessaire de déterminer le flot pour vérifier que f est une fonction de Lyapounov.

Théorème 3.11. *Soit Y compact invariant du champ de vecteurs V (c'est à dire du flot associé).*

Si il existe une fonction de Lyapounov $f : U \longrightarrow [0,\infty)$, de classe C^1 sur un voisinage U de Y, qui vérifie $f(x_0) = 0$ et telle que les fonctions f et $-df \cdot V$ sont strictement positives sur $U - \{x_0\}$, alors x_0 est asymptotiquement stable.

Réciproquement, si Y est asymptotiquement stable, de bassin B, alors il existe une fonction de Lyapounov $f : X \longrightarrow [0,1]$, de classe C^∞, telle que $f = 0$ sur Y, $f \in]0,1[$ sur $B - Y$, $df \cdot V < 0$ sur $B - Y$, et $f = 1$ sur $X - B$.

◄ Le premier énoncé découle du cas des applications.

Montrons le second énoncé. Lecompact invariant Y est asymptotiquement stable pour φ^1, de bassin B. Il existe donc une fonction de Lyapounov $g : X \longrightarrow [0,1]$, de classe C^∞, pour φ_1, telle que $g\circ\varphi^1 - g < 0$ sur $B - \{x_0\}$, $g^{-1}(0) = \{x_0\}$, $g^{-1}(1) = X - B$.

On pose alors $f = \int_0^1 g\circ\varphi^s ds$, c'est une fonction C^1. On a

$$(df \cdot V)(x) = \int_0^1 dg_{\varphi^s(x)}\circ d\varphi^s_x \cdot V(x)ds = \int_0^1 dg_{\varphi^s(x)} \cdot V(\varphi^s(x))ds = \int_0^1 \frac{d}{ds}(g\circ\varphi^s(x))ds$$
$$= (g\circ\varphi^1 - g)(x).$$

Si V n'est que C^1, la fonction f n'est a priori que C^1, mais elle peut être régularisée, comme dans le cas des applications. Pour ceci, on considère d'abord une fonction continue strictement positive $\epsilon : B - A \longrightarrow]0,\infty)$ telle que $df \cdot V < -2\epsilon|V|$, $f > 2\epsilon$ et $f < 1 - 2\epsilon$ sur $B - A$. Alors, il existe une fonction f_1, de classe C^∞, telle que $|f - f_1| \leqslant \epsilon$ et $|df - df_1| \leqslant \epsilon$. La fonction f_1 vérifie encore $df_1 \cdot V < 0$ sur $B - A$, et elle se prolonge en une fonction continue sur X par les valeurs 0 sur A et 1 sur $X - B$. On régularise alors f_1 comme dans la preuve de la proposition 3.8. ►

Le linéarisé permet, comme pour les applications, de statuer sur la stabilité dans de nombreux cas. Nous donnons ici l'énoncé dans le cas des champs de vecteurs pour attirer l'attention sur le fait que les hypothèses sur la norme des valeurs propres sont remplacées par des hypothèses sur leur partie imaginaire.

Théorème 3.12. *Soit x_0 un point fixe du champ de vecteur V. Soit L le linéarisé de V en x_0, et soit χ le supremum des parties réelles des éléments du spectre de L.*

Si $\chi < 0$, alors x_0 est asymptotiquement stable. On dit que le point fixe est linéairement stable.

Si $\chi > 0$, alors x_0 n'est pas Lyapounov stable, donc pas asymptotiquement stable.

◄ Nous avons vu que le champ de vecteurs est Lyapounov ou asymptotiquement stable si et seulement si le flot φ^1 l'est. Comme $d(\varphi^1)_{x_0} = e^L$, le rayon spectral du linéarisé de φ^1 est égal à $R = e^\chi$. ►

On peut montrer comme dans le cas d'une application que la dynamique au voisinage d'un point fixe asymptotiquement stable est topologiquement conjuguée à la dynamique du linéarisé. En fait, le résultat prend une forme plus forte dans le cas des flots : il n'y a, à conjugaison topologique près, qu'un seul point fixe linéairement stable en dimension d.

Théorème 3.13. *Soient V_1 et V_2 deux champs de vecteurs C^1 sur des variétés X_1 et X_2 de dimension d. Soient x_1 et x_2 des points fixes asymptotiquement stables de V_1 et V_2, de bassins U_1 et U_2. Il existe un homéomorphisme $\phi : U_1 \longrightarrow U_2$ qui conjugue les flots de V_1 et V_2. L'homéomorphisme ϕ est C^1 sur $U_1^* := U_1 - \{x_1\}$, et satisfait $d\phi_x \cdot V_1(x) = V_2(\phi(x))$ pour tout $x \in U_1^*$.*

Le résultat implique en particulier que le bassin est toujours homéomorphe à $\mathbb{R}^d$, qui est la bassin de 0 pour le champ de vecteurs $V_0(x) = -x$ sur $\mathbb{R}^d$.

◄ On va montrer que V_1 est conjugué à V_0 sur U_1.

On identifie localement (X_1, x_1) à $(\mathbb{R}^d, 0)$ par une carte en x_1, et on munit l'espace $\mathbb{R}^d$ d'un produit scalaire pour lequel $\langle V_1(x), x\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$ au voisinage de 0, avec $b < 0$, on note $|.|$ la norme correspondante. Pour $r > 0$ assez petit, la sphère $S = S(0,r)$ (que l'on peut aussi considérer comme une sous variété de X_1 par l'identification ci-dessus) est une section de Poincaré pour V_1 et pour V_0. On note aussi $B = B(0,r)$. Considérons l'application

$$F : \mathbb{R} \times S \ni (t,x) \longmapsto \varphi^t(x) \in U_1^* = U_1 - \{x_1\}$$

où φ est le flot de V_1. Cette application induit une bijection de $\mathbb{R} \times S$ dans U_1^*, qui est un difféomorphisme local et donc un difféomorphisme.

Montrons la bijectivité. Il s'agit de vérifier que toute orbite $x(t)$ dans le bassin coupe S une fois et une seule. On constate d'abord que tout orbite qui contient des points dans B et des points hors de B coupe S, par connexité. Comme toute orbite tend vers x_1, toute orbite du bassin contient des points dans B. Donc les seules orbites qui pourraient ne pas couper S sont les orbites entièrement contenues dans B. On utilise finalement l'inégalité $\langle V_1(x), x\rangle \leqslant b\langle x, x\rangle$, satisfaite dans un voisinage de $\bar{B}$, pour montrer, à la fois que toute orbite différente de celle de x_1 sort de B (en grand temps négatif), et aussi que chaque orbite intersecte S au plus une fois.

De la même façon, l'application

$$G : \mathbb{R} \times S \ni (t, x) \mapsto e^{-t}x \in \mathbb{R}^d - \{0\}$$

est un difféomorphisme. L'application

$$F \circ G^{-1} : \mathbb{R}^d - \{0\} \ni x \mapsto \varphi^{-\ln|x|}(x/|x|) \in U_1^*$$

est donc un difféomorphisme. Comme 0 est asymptotiquement stable pour V_1, l'application ϕ qui est égale à $F \circ G^{-1}$ hors de 0 et à 0 en 0 est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ dans U_1. On constate que

$$\phi(e^{-t}x) = \varphi^{t-\ln|x|}(x/|x|) = \varphi^t(\phi(x)),$$

c'est à dire que ϕ conjugue les flots de V_1 et de V_0.

On trouve de la même façon une conjugaison topologique $\psi : \mathbb{R}^d \longrightarrow U_2$ entre V_0 et V_2, et donc une conjugaison topologique $\phi \circ \psi^{-1} : U_2 \longrightarrow U_1$ entre V_2 et V_1. ►

L'analogue naturel de cet énoncé pour les applications n'est pas vrai comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 3.3. *Montrer que les dynamiques des applications $x \mapsto x/2$ et $x \mapsto -x/2$ sur $\mathbb{R}$ ne sont pas topologiquement conjuguées.*

Exercice 3.4. *Considérons le champ de vecteurs $V(x, y) = (y, -x - y^3)$.*

Le linéarisé permet-il de statuer sur la stabilité asymptotique de 0 ?

En considérant la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$, montrer que le point fixe 0 est asymptotiquement stable.

Exercice 3.5. *On rappelle que si U est un endomorphisme tel que $U^n n \in \mathbb{Z}$ est borné, alors il existe un produit scalaire pour lequel U est une isométrie.*

Soit $U(t), t \in \mathbb{R}$ un groupe continu de matrices $d \times d$, c'est à dire que $U(0) = Id$ et $U(t + s) = U(t)U(s)$ pour tous s et t dans $\mathbb{R}$.

Montrer l'équivalence entre :

$U(t), t \in \mathbb{R}$ est une famille bornée de matrices.

Il existe un produit scalaire pour lequel les matrices $U(t)$ sont unitaires.

Exercice 3.6. *Soit A une matrice $d \times d$. Montrer l'équivalence entre :*

Toutes les solutions de l'équation linéaire $x'(t) = A \cdot x(t)$ sont bornées.

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Il existe un produit scalaire pour lequel A est antisymétrique.

Complément : flots et inégalités

On manipulera dans la suite des inégalités différentielles, et on utilisera le résultat suivant (Lemme de Gronwall) :

Lemme 3.14. *Soit $f(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soient $x(t)$ et $y(t) : [0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables satisfaisant*

$$x'(t) < f(t,x(t)) \quad , \quad y'(t) = f(t,y(t))$$

pour tout $t \in [0,T[$ et $x(0) \leqslant y(0)$. Alors $x(t) < y(t)$ pour tout $t \in]0,T[$.

◄ Si la conclusion n'est pas satisfaite, alors il existe un intervalle maximal non vide $]0,s[$, $s < T$ sur lequel $x < y$ (dans le cas où $x(0) = y(0)$, ceci découle de l'inégalité $x'(0) < f(0,x(0)) = f(0,y(0)) = y'(0)$). Au temps s, on a alors $y(s) = x(s)$, et donc $y'(s) \leqslant x'(s)$. C'est une contradiction puisque

$$x'(s) < f(s,x(s)) = f(s,y(s)) = y'(s). \ ►$$

Nous utiliserons principalement le :

Corollaire 3.15. *Soit $x(t)$ une fonction dérivable telle que $x'(t) \leqslant bx(t)$ pour tout $t \geqslant 0$, avec $b \in \mathbb{R}$. Alors $x(t) \leqslant x(0)e^{bt}$ pour tout $t \geqslant 0$.*

◄ Pour $a > 0$, on pose $y_a(t) = (x(0) + at)e^{bt}$. On a $y_a'(t) = by_a(t) + ae^{bt}$. Le lemme précédent, appliqué à la fonction $f(t,x) = ax + ae^{bt} > ax$, implique que $x(t) < y_a(t)$ pour tout $t > 0$ et tout $a > 0$. À la limite $a \longrightarrow 0$ on déduit que $x(t) \leqslant x(0)e^{bt}$. ►

Plus généralement, on peut obtenir une version avec inégalités larges du Lemme sous des hypothèses de régularité supplémentaires :

Lemme 3.16. *Soit $f(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement Lipschitz. Soient $x(t)$ et $y(t) : [0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables satisfaisant*

$$x'(t) \leqslant f(t,x(t)) \quad , \quad y'(t) = f(t,y(t))$$

pour tout $t \in [0,T[$ et $x(0) \leqslant y(0)$. Alors $x(t) \leqslant y(t)$ pour tout $t \in [0,T[$.

◄ On fixe $S \in]0,T[$. On considère la solution $y_a(t)$ de l'équation $y_a'(t) = f(t,y_a(t)) + a$ qui vérifie $y_a(0) = y(0)$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette solution est définie au delà du temps S pour a petit, et la fonction $a \longmapsto y_a(S)$ est continue en $a = 0$. Pour chaque $a > 0$, on déduit du lemme précédent (appliqué à la fonction $f + a$) que $x(S) < y_a(S)$. À la limite $a \longrightarrow 0$, on déduit donc que $x(S) \leqslant y(S)$. ►

Pour donner un analogue des contractions en termes de champs de vecteurs, on commence par la remarque suivante :

Lemme 3.17. *Soit V un champ de vecteurs Lipschitz complet sur un espace de Hilbert E. Alors, pour tout $b \in \mathbb{R}$, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :*
- *Le flot φ^t est e^{tb}-Lipschitz pour tout $t \geqslant 0$*
- *$\langle V(x) - V(y), x - y\rangle \leqslant b\|x-y\|^2$ pour tous x et y.*

◄ Un calcul simple montre que

$$\frac{d}{dt}\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2 = 2\langle V(\varphi^t(x)) - V(\varphi^t(y), \varphi^t(x) - \varphi^t(y)\rangle.$$

Si l'on suppose le premier point, alors $\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2 \leqslant e^{2tb}\|x-y\|^2$ pour tout $t \geqslant 0$, avec égalité en $t = 0$, donc

$$2\langle V(x) - V(y), x - y\rangle = \frac{d}{dt}_{|t=0}\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2 \leqslant 2b\|x-y\|^2.$$

Réciproquement, en supposant le second point, la fonction $f(t) := \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|^2$ vérifie l'inégalité $f'(t) \leqslant 2bf(t)$, ce qui entraine que $f(t) \leqslant f(0)e^{2bt}$ par le Lemme de Gronwall. ►

Proposition 3.18. *Soit V un champ de vecteur de l'espace de Hilbert E. Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que*

$$\langle V(x) - V(y), x - y\rangle \leqslant -2a\|x-y\|^2$$

pour tous x, y. Alors Le champ V admet un unique point fixe, qui est asymptotiquement stable et attire toutes les orbites. Le champ V est positivement complet et ses flots $\varphi^t, t > 0$ sont des contractions.

◄ Soit $x(t) : [0, T[\longrightarrow E$ une orbite maximale. Montrons pour commencer que $T = +\infty$. Si T est fini, on écrit par exemple $\|x(S+t)-x(S)\| \leqslant e^{-aS}\|x(t)-x(0)\| \leqslant \|x(T-S)-x(0)\|$ pour tout $t \in [0, T-S[$. Comme la fonction $t \longmapsto \|x(t)-x(0)\|$ tend vers 0 en 0, ceci implique que la courbe $x(t)$ a une limite en T, ce qui contredit la maximalité.

Le champ V est donc positivement complet, ses flots $\varphi^t, t > 0$ sont e^{-ta}-Lipschitz par les calculs ci-dessus. Soit x_0 l'unique point fixe de φ^1. C'est alors l'unique point fixe de $\varphi^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, l'orbite $x(t)$ associée est périodique de période $1/n$ pour tout n, c'est donc un point fixe : $V(x_0) = 0$. Il est alors évident que toutes les orbites convergent vers x_0. ►

Nous avons vu que les points fixes linéairement stables sont asymptotiquement stables et donc admettent des fonctions de Lyapounov. Comme dans le cas du temps discret, on peut être beaucoup plus précis et obtenir une fonction de Lyapounov quadratique.

Lemme 3.19. *Soit L une application linéaire continue de l'espace de Hilbert H. Supposons qu'il existe un intervalle $[a', b']$ qui contient les parties réelles des éléments du spectre de L, et soit $]a, b[$ un intervalle ouvert contenant $[a', b']$. Alors il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur H, qui engendre une norme équivalente à la norme initiale, et tel que*

$$a(v, v) \leqslant (Lv, v) \leqslant b(v, v)$$

pour tout $v \in H$.

◄ Le rayon spectral de e^L est strictement inférieur à e^b donc par la formule du rayon spectral il existe $T > 0$ pour lequel $\|e^{TL}\| < e^{Tb}$ (norme initiale sur E). On pose

$$[v, w] = \int_0^T e^{-2tb}\langle e^{tL}v, e^{tL}w\rangle dt$$

et on calcule

$$\begin{aligned}
2[Lv, v] &= 2\int_0^T e^{-2tb}\langle e^{tL}Lv, e^{tL}v\rangle dt = \int_0^T e^{-2tb}\frac{d}{dt}\langle e^{tL}v, e^{tL}v\rangle dt \\
&= 2b\int_0^T e^{-2tb}\langle e^{tL}v, e^{tL}v\rangle dt + e^{-2Tb}\langle e^{TL}v, e^{TL}v\rangle - \langle v, v\rangle \\
&\leqslant 2b[v, v].
\end{aligned}$$

Ensuite, on choisit $S > 0$ tel que $|e^{-SL}| < e^{-Sa}$ (norme associée à $[.,.]$) et on pose

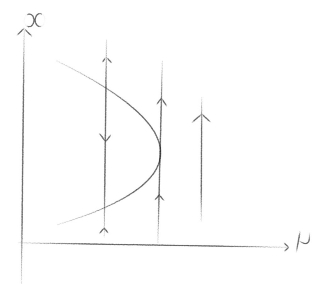
$$(v, w) = \int_0^S e^{2ta}[e^{-tL}v, e^{-tL}w]dt.$$

Le même calcul que ci-dessus montre que $(-Lv, v) \leqslant -a(v, v)$. De plus,

$$(Lv, v) = \int_0^S e^{2ta}[Le^{-tL}v, e^{-tL}v]dt \leqslant \int_0^S be^{2ta}[e^{-tL}v, e^{-tL}v]dt = b(v, v). \blacktriangleright$$

4 Bifurcations

Nous avons vu qu'un point fixe non dégénéré survit à une petite perturbation de la dynamique. Nous étudions ici ce qui peut se passer dans le cas des points fixes dégénérés. Un exemple est la famille d'applications $\varphi(\mu, x) = \mu + x + x^2$, dont le comportement dynamique est résumé dans le diagramme ci-dessous.



Ce comportement est typique.

Théorème 4.1. *Soit $\varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une famille C^2 d'applications de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0,0) = 0$, $\partial_x \varphi(0,0) = 1$, $\partial_\mu \varphi(0,0) \neq 0$. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et une fonction $\theta(x)$ telle que $\varphi(\theta(x), x) = x$ pour tout $x \in I$, $\theta(0) = 0$, et $\theta'(0) = 0$. De plus, pour $\mu \in I$ et $x \in I$, le point x est fixé par φ_μ si et seulement si $\theta(x) = \mu$.*

Si on suppose que $\partial^2_{xx}\varphi(0,0)$ est non nul et du même signe que $\partial_\mu \varphi(0,0)$, alors $\theta''(0) < 0$. Dans ce cas, pour $\mu < 0$ dans I, l'application φ_μ a deux points fixes dans I (l'un linéairement stable et l'autre linéairement instable), pour $\mu = 0$ elle a un point fixe, et pour $\mu > 0$ elle n'a pas de point fixe.

Si le signe de $\partial^2_{xx}\varphi(0,0)$ est opposé à celui de $\partial_\mu \varphi(0,0)$ alors $\theta''(0) > 0$ et on a les mêmes propriétés en échangeant $\mu > 0$ et $\mu < 0$.

◄ Le premier point est une application directe du théorème des fonctions implicites. En dérivant la relation $\varphi(\theta(x), x) = x$, on obtient

$$\partial_\mu \varphi(\theta(x), x) \cdot \theta'(x) + \partial_x \varphi(\theta(x), x) = 1.$$

En $x = 0$, ceci implique que $\theta'(0) = 0$. On dérive alors une seconde fois, en $x = 0$, et on obtient :

$$\partial_\mu \varphi(\theta(x), x) \cdot \theta''(x) + \partial^2_{xx} \varphi(\theta(x), x) = 0,$$

dont on déduit les propriétés voulues sur le signe de $\theta''(0)$. Pour déterminer la stabilité linéaire des points fixes obtenus, on doit déterminer le multiplicateur $\lambda(x) := \partial_x \varphi(\theta(x), x)$. On calcule que $\lambda'(0) = \partial^2_{xx}\varphi(0,0)$. Lorsque cette dérivée est non-nulle, on conclut que l'un des points fixes est linéairement stable, l'autre linéairement instable. ►

Dans de nombreuses applications, on considère une famille φ_μ dont toutes les applications préservent l'origine, c'est à dire que $\varphi(\mu, 0) = 0$ pour tout μ.

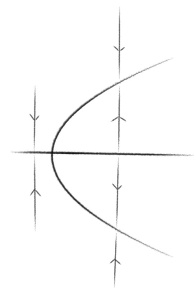
Théorème 4.2. *Soit $\varphi(\mu, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une famille C^3 d'applications de $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(\mu, 0) = 0$ pour tout μ et $\partial_x \varphi(0,0) = 1$, $\partial^2_{\mu x}\varphi(0,0) \neq 0$.*

Le diagramme de bifurcation au voisinage de $(0,0)$ est localement la réunion de deux courbes C^2 qui se coupent transversalement en $(0,0)$ et dont l'une est l'axe horizontal.

Si $\partial^2_{xx}\varphi(0,0) \neq 0$, alors la seconde branche du diagramme de bifurcation est le graphe d'une application $\mu \longmapsto y(\mu)$. Il existe donc, pour $\mu \neq 0$ assez petit, exactement deux points fixes dans un voisinage de 0.

Si $\partial^2_{xx}\varphi(0,0) = 0$ alors la seconde branche est tangente à l'axe vertical en $(0,0)$. Si de plus $\partial^3_{xxx}\varphi(0,0)$ est non nul et du signe de $\partial^2_{\mu x}\varphi(0,0)$, alors la seconde branche contient deux orbites pour chaque $\mu < 0$ et aucune pour $\mu > 0$.

Suivant les signes des dérivées, on peut aussi déterminer la stabilité des points fixes obtenus. Par exemple, si $\partial^2_{\mu x}\varphi(0,0) > 0$ et $\partial^3_{xxx}\varphi(0,0) < 0$, alors le point fixe 0 est linéairement stable pour $\mu < 0$ et linéairement instable pour $\mu > 0$. Les points fixes de la seconde branche sont linéairement stables. On a donc, pour $\mu < 0$ un unique point fixe qui est linéairement stable. Pour $\mu > 0$, ce point fixe devient linéairement instable, mais deux points fixes linéairement stables nouveaux apparaissent. C'est la situation représentée ci-dessous.



◄ On a $\varphi(\mu, x) = x\psi(\mu, x)$, où

$$\psi(\mu, x) = \int_0^1 \partial_x \varphi(\mu, sx) ds$$

est une fonction C^2 qui vérifie $\psi(0,0) = 1$. L'équation $\varphi(\mu, x) = x$ est équivalente à l'équation $\psi(\mu, x) = 1$. On vérifie en dérivant l'égalité $\varphi = x\psi$ que $k\partial_x^k \psi(0,0) = \partial_x^{k-1}\varphi(0,0)$ pour tout $k \geqslant 0$, et que $\partial_\mu \psi(0,0) = \partial^2_{\mu x}\varphi(0,0)$. La preuve se termine alors comme la précédente. ►

Nous avons décrit des bifurcations pour des applications d'une variable réelle. Nous allons maintenant expliquer pourquoi les bifurcation les plus simples en dimension supérieure présentent des diagrammes de bifurcation similaires.

On considère pour ceci une famille d'applications φ_μ de $\mathbb{R}^d$, de classe C^r, et telle que $\varphi_0(0) = 0$. Soit $L = \partial_x \varphi(0,0)$ le linéarisé de φ_0 en 0. Soit E l'espace caractéristique de L associé à la valeur propre 1. Soit F la somme des autres espaces caractéristiques de L. C'est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^d$ qui est invariant par L. L'énoncé ci-dessous permet de réduire l'étude des bifurcations de la famille φ_μ à l'étude des bifurcations d'une famille réduite ψ_μ d'applications de E de classe C^r. On note $x = (y, z)$ la décomposition des points de $\mathbb{R}^d$ associée à la décomposition $\mathbb{R}^d = E \oplus F$. On note φ_E, φ_F les composantes de φ.

Proposition 4.3. *Il existe une application locale $Z : \mathbb{R} \times E \longrightarrow F$, de classe C^r qui est telle que le diagramme de bifurcation de φ est l'image par $id \times Z$ du diagramme de bifurcation de la famille*

$$\psi(\mu, y) := \varphi_E(\mu, y, Z(\mu, y)).$$

Autrement dit, localement, le point $x = (y, z)$ est un point fixe de φ_μ si et seulement si $z = Z(\mu, y)$ et si y est un point fixe de ψ_μ. On peut de plus choisir Z de sorte que $Z(\mu, 0) = 0$ et $\partial_y Z(0,0) = 0$.

Cette méthode est appelée réduction de Lyapounov-Schmidt. Elle permet de construire, localement, une sous variété tangente à $\mathbb{R} \times E$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ qui contient tous les points fixes. Attention, cette variété n'est pas forcément invariante par φ, elle n'est pas unique.
◄ L'équation $\varphi(u, x) = x$ est équivalente au système

$$\begin{cases} \varphi_E(\mu, y, z) = y \\ \varphi_F(\mu, y, z) = z \end{cases}.$$

Comme $\partial_z \varphi_F(0,0,0)$ n'a pas 1 pour valeur propre, la seconde équation se résout localement par le théorème des fonctions implicites. Il existe donc une fonction $Z(\mu, y)$ telle que la seconde équation est satisfaite si et seulement si $z = Z(\mu, y)$. Comme $\varphi_F(\mu, 0, 0) = 0$, on a $Z(\mu, 0) = 0$. En dérivant l'équation $\varphi_F(\mu, , yZ(\mu, y)) = Z(\mu, y)$, on obtient :

$$\partial_y \varphi_F(0,0,0) = (I - \partial_z \varphi_F(0,0,0))\partial_y Z(0,0).$$

Comme $\partial_y \varphi_F(0,0,0) = 0$ et comme $(I - \partial_y \varphi_F(0,0,0))$ est un isomorphisme de F, on déduit que $\partial_y Z(0,0) = 0$. Les solutions du système sont alors les points de la forme $(\mu, y, Z(\mu, y))$, où (μ, y) satisfait l'équation $\varphi_E(\mu, y, Z(\mu, y) = y$, c'est à dire où y est un point fixe de ψ_μ. ►

Les cas les plus simples sont ceux où E est de dimension 1.

Proposition 4.4. *Supposons que φ est une famille C^2 et que l'espace propre E est de dimension 1. Si $\partial_\mu \varphi_E(0,0)$ et $\partial^2_{yy}\varphi_E(0,0)$ sont non nuls et de même signe, alors le diagramme de bifurcation est localement une courbe C^2 de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, tangente à $\{0\} \times E$, qui contient deux points pour chaque $\mu < 0$ et aucun point pour $\mu > 0$.*

◄ On applique le théorème 4.1 à l'application réduite ψ. On calcule pour ceci

$$\partial_\mu \psi(0,0) = \partial_\mu \varphi_E(0,0) + \partial_z \varphi_E(0,0) \circ \partial_y Z(0,0) = \partial_\mu \varphi_E(0,0)$$

et

$$\partial^2_{yy}\psi(0,0) = \partial^2_{yy}\varphi_E(0,0) + 2\partial^2_{yz}\varphi_E(0,0)\circ\partial_y Z(0,0) + \partial_z\varphi_E(0,0)\partial^2_{yy}Z(0,0) = \partial^2_{yy}\varphi_E(0,0)$$

puisque $\partial_z\varphi_E(0,0) = 0$. ►

On considère maintenant le cas des familles fixant l'origine, c'est à dire que $\varphi(\mu, 0) = 0$.

Proposition 4.5. *Supposons que φ est une famille C^3 qui fixe l'origine, et que l'espace propre E est de dimension 1. Si $\partial^2_{\mu y}\varphi_E(0,0)$ est non-nul, alors le diagramme de bifurcation est localement la réunion de la courbe $\mathbb{R}\times\{0\}$ et d'un seconde branche C^2.*

Si $\partial^2_{yy}\varphi_E(0,0) \neq 0$, alors la seconde branche du diagramme de bifurcation est le graphe d'une application $\mu \mapsto Y(\mu)$ de classe C^2. Il existe donc, pour $\mu \neq 0$ assez petit, exactement deux points fixes dans un voisinage de 0.

Si $\partial^2_{yy}\varphi_E(0,0) = 0$, alors la seconde branche du diagramme de bifurcation est tangente à $\{0\} \times E$.

On peut caractériser plus précisément la forme de la seconde branche comme dans le théorème 4.2 en fonction de la quantité $\partial^3_{yyy}\psi(0,0)$. Mais l'expression de cette dérivée troisième en fonction de φ n'est pas simple.

◄ On applique le théorème 4.2 à l'application réduite ψ, après avoir vérifié que $\partial^2_{y\mu}\psi(0,0) = \partial^2_{y\mu}\varphi_E(0,0)$ en calculant

$$\begin{aligned}\partial^2_{\mu y}\psi(0,0) = {} & \partial^2_{\mu y}\varphi_E(0,0) + \partial^2_{zy}\varphi_E(0,0)\circ\partial_\mu Z(0,0) + \partial^2_{\mu z}\varphi_E(0,0)\circ\partial_y Z(0,0) \\ & + \partial^2_{zz}\varphi_E(0,0)\circ(\partial_\mu Z(0,0) \otimes \partial_y Z(0,0)) + \partial_z\varphi_E(0,0)\circ\partial^2_{\mu y}Z(0,0).\end{aligned}$$

Comme tous $\partial_\mu Z(0,0) = 0$, $\partial_y Z(0,0) = 0$ et $\partial_z\varphi_E(0,0) = 0$, on a l'égalité voulue. On précise, concernant le calcul ci-dessus, que l'écriture $\partial^2_{zz}\varphi_E(0,0)\circ(\partial_\mu Z(0,0)\otimes\partial_y Z(0,0))$ est une notation pour désigner la forme bilinéaire

$$(\xi, v) \mapsto \partial^2_{zz}\varphi_E(0,0)(\partial_\mu Z(0,0)\cdot\xi, \partial_y Z(0,0)\cdot v),$$

qui en l'occurrence est nulle. ►

On rencontre par exemple le cas ci-dessus lorsqu'on considère un point fixe non dégénéré qui admet -1 comme valeur propre simple. Soit φ_μ une famille d'applications de $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi_0(0) = 0$, telle que 1 n'est pas valeur propre du linéarisé, et telle que -1 est valeur propre simple. Comme le point fixe 0 est alors non-dégénéré pour φ_0, il existe localement une unique courbe régulière $q(\mu)$ de points fixes. Mais 0 est un point fixe dégénéré pour φ_0^2, donc il peut exister d'autres points de période 2 au voisinage de $(0,0)$. On note $L(\mu)$ le linéarisé de φ_μ en $q(\mu)$, E la droite propre de $L(0)$ associée à la valeur propre -1, et F le supplémentaire de E invariant par $L(0)$. On a alors

Proposition 4.6. *Soit $\varphi(\mu, x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une famille C^3 d'applications de $\mathbb{R}^d$ telle que $\varphi(0,0) = 0$ et -1 est valeur propre de $L(0) = \partial_x\varphi(0,0)$, de multiplicité 1. On suppose que $\partial_{\mu|\mu=0}(\partial_y\varphi_E(\mu, q(\mu))) \neq 0$. Alors il existe, localement, une branche de points périodiques de période 2, qui est tangente à $\{0\}\times E$.*

◄ Soit $q(\mu)$ la famille régulière locale de points fixes de φ_μ. Pour se ramener au cadre du résultat précédent, on considère la famille

$$\phi(\mu, x) = \varphi(\mu, \varphi(\mu, x + q(\mu)) - q(\mu).$$

Toutes les applications de cette famille fixent 0, mais 0 est un point fixe dégénéré de ϕ_0. On a

$$\partial_x\phi(\mu, x) = \partial_x\varphi(\mu, \varphi(\mu, x + q(\mu)))\circ\partial_x\varphi(\mu, x + q(\mu)),$$

en particulier $\partial_x\phi(\mu, 0) = \partial_x\varphi(\mu, q(\mu))\circ\partial_x\varphi(\mu, q(\mu))$. Le linéarisé $\partial_x\phi(0,0)$ a donc 1 pour valeur propre simple, d'espace propre E, et il préserve le supplémentaire F. On doit montrer que $\partial^2_{\mu y}\phi_E(0,0)$ est non nul. En notant π_E la projection sur E, le réel $\partial_y\phi_E(\mu, 0)$ est le coefficient $\pi_E\circ L(\mu)^2_{|E}$. On a donc

$$\partial^2_{\mu y}\phi_E(0,0) = \pi_E\circ L(0)\circ L'(0)_{|E} + \pi_E\circ L'(0)\circ L(0)_{|E}.$$

Les hypothèses sur $L(0)$ impliquent que $\pi_E\circ L(0) = -\pi_E$, et que $L(0)_{|E} = -Id$. On obtient donc

$$\partial^2_{\mu y}\phi_E(0,0) = -2\pi_E\circ L'(0)_{|E} = -2\partial_{\mu|\mu=0}(\partial_y\varphi_E(\mu, q(\mu))) \neq 0.$$

On a donc une seconde branche de points fixes de ϕ_μ, qui sont des points de période 2 pour φ_μ. Pour chaque valeur de μ, il y a un nombre pair de tel points, et on est donc dans le second cas de la proposition précédente, avec une branche tangente à $\{0\}\times E$. ►

Il est intéressant de préciser un peu ce qui précède en dimension 1.

Exercice 4.1. *Soit $\varphi(\mu, x)$ une famille C^3 d'applications de $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(0,0) = 0$ et $\partial_x \varphi(0,0) = -1$.*

On suppose, pour fixer les idées, que $\partial_{\mu|\mu=0}(\partial_x \varphi(\mu, q(\mu)) > 0$ et que

$$2\partial^3_{xxx}\varphi(0,0) + 3(\partial^2_{xx} f(0,0))^2 > 0.$$

Il existe alors un branche régulière $q(\mu)$ de points fixes. Pour $\mu < 0$, le point fixe $q(\mu)$ est asymptotiquement stable et il est localement le seul point périodique.

Pour $\mu > 0$, le point fixe $q(\mu)$ est linéairement instable, et il existe une orbite périodique de période 2, qui est linéairement stable.

On parle de bifurcation de doublement de période, car l'élément stable est un point de période 1 pour $\mu < 0$ et un point de période 2 pour $\mu > 0$.

Le résultat ci-dessus montre que la condition de non dégénérescence, qui interdit l'existence de bifurcations à période fixée, ne suffit pas pour autant à garantir l'absence de bifurcations d'orbites périodiques lorsqu'on considère simultanément toutes les périodes. Ce type de phénomène peut se produire dès qu'une valeur propre est une racine complexe de l'unité, ou simplement est de module 1. Le cas des racines non réelles est un peu plus délicat à étudier, car il ne se produit pas en dimension 1. On l'illustre en considérant des familles holomorphes.

Proposition 4.7. *Soit $\varphi_\mu(x) = \varphi(\mu, x) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une famille holomorphe d'applications de $\mathbb{C}$ fixant l'origine. Supposons que $\lambda = \partial_z \varphi(0,0)$ est de module 1, et supposons que $\partial^2_{\mu z}\varphi(0,0) \neq 0$. Il existe alors, pour tout $\epsilon > 0$ une valeur μ du paramètre telle que $|\mu| \leqslant \epsilon$ et pour laquelle l'application φ_μ admet une orbite périodique contenue dans la boule $B(0, \epsilon)$.*

◄ On considère dans un premier temps le cas où λ est une racine de l'unité, $\lambda^k = 1$, $k \geqslant 1$. On cherche alors des orbites de périodes k. On écrit pour ceci $\varphi^k_\mu = z f(\mu, z)$, avec $f(0,0) = \lambda^k = 1$. On a $f(\mu, 0) = \partial_z(\varphi^k_\mu(0)) = (\partial_z \varphi(\mu, 0))^k$, et donc

$$\partial_\mu f(0,0) = k\lambda^{k-1}\partial^2_{\mu z}\varphi(0,0) \neq 0.$$

L'équation $f(\mu, z) = 1$ peut donc être résolue par le théorème des fonctions implicites : il existe une fonction holomorphe $u(z)$ telle que $f(\mu, z) = 1$ si et seulement si $\mu = u(z)$. Il existe donc des couples (μ, z) arbitrairement proches de $(0,0)$ pour lesquels $\varphi^k_\mu(z) = z$.

Supposons maintenant que λ n'est pas une racine de l'unité. L'application $\mu \longmapsto \partial_z \varphi_\mu(\mu, 0)$ est un difféomorphisme local. Il existe donc μ_1 arbitrairement petit pour lequel $\lambda_1 := \partial_z \varphi(\mu_1, 0)$ est une racine de l'unité et $\partial_{\mu z}\varphi(\mu_1, 0) \neq 0$. On peut appliquer ce qui précède pour trouver des (μ_2, z_2) arbitrairement proches de $(\mu_1, 0)$ pour lesquels $\varphi^k(\mu_2, z_2) = z_2$ (où k est tel que $\lambda^k_1 = 1$). On notera, dans ce second cas, que la période k doit être choisie d'autant plus grande que l'on veut une orbite périodique plus proche de l'origine. ►

On comprend au vu des développements ci-dessus que toute valeur propre de module 1 crée la possibilité de phénomènes de bifurcations d'orbites périodiques (à période non fixée).

On dit qu'un point fixe est hyperbolique si le linéarisé n'a pas de valeur propre de module 1.

Théorème 4.8. *Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe C^1 dont 0 est un point fixe hyperbolique.*

Alors il existe un voisinage U de 0 tel que toute orbite $(x_n), n \in \mathbb{Z}$ contenue dans U est identiquement nulle. En particulier, aucune autre orbite périodique n'est entièrement contenue dans U.

Finalement, si $\varphi(\mu, x)$ est une famille C^1 d'applications telle que $\varphi_0 = \varphi$, alors pour tout μ petit, l'ouvert U contient une unique orbite entière de φ_μ, et cette orbite est un point fixe hyperbolique.

◄ Considérons directement une famille φ_μ. Comme 0 est non dégénéré, il existe une courbe $q(\mu)$ de points fixes de φ_μ.

Posons $L = \partial_x \varphi(0,0)$. L'hyperbolicité implique qu'il existe deux sous-espace E^s et E^u, invariants par $L(0)$, et tels que $L_{|E^s}$ et $L^{-1}_{|E^u}$ ont un rayon rayon spectral < 1. Il existe donc des constantes $a < 1$ et une norme Euclidienne sur E telle que $|L^{-1}_{|E^u}| < a$ et $|L_{|E^s}| < a$. L'application L a donc la propriété suivante : Il existe $a < 1$ tel que,

Si $|v_u| \geqslant |v_s|$, alors $|(Lv)_u| \geqslant a^{-1}|(Lv)_s|$ et $|(Lv)_u| \geqslant a^{-1}|v_u|$.

$|v_u| \leqslant |v_s|$, alors $|(Lv)_s| \leqslant a|(Lv)_u|$ et $|(Lv)_s| \geqslant a|v_s|$.

On vérifie que ces propriétés sont stables par petite perturbation de L, il existe donc $\epsilon > 0$ et un petit voisinage convexe U de 0 tel que $\partial_x \varphi(\mu, x)$ vérifie la propriété ci-dessus lorsque $(\mu, x) \in]-\epsilon, \epsilon[\times U$, avec une constante a qui n'est pas forcément celle de L, mais qui est uniforme. On peut supposer de plus en diminuant ϵ que $q(\mu) \in U$ pour tout $\mu \in]-\epsilon, \epsilon[$.

Si $x = (x_s, x_u)$ est une condition initiale dans U telle que $|x_u - q_u(\mu)| \geqslant |x_s - q_u(\mu)|$ alors $|\varphi^u_\mu(x) - q_u(\mu)| \geqslant |\varphi^s_\mu(x) - q_s(\mu)|$ et

$$|\varphi^u_\mu(x) - q_u(\mu)| \geqslant a^{-1}|x_u - q_u(\mu)|.$$

Par récurrence, on déduit que l'orbite sort de U On montre de la même façon que toute orbite dont la condition initiale $x \neq q(\mu)$ dans U satisfaisant $|x_u - q_u(\mu)| \leqslant |x_s - q_u(\mu)|$ sort de U dans le passé. En conséquence, la seule orbite entièrement contenue dans U est le point fixe $q(\mu)$. ►

L'énoncé ci-dessus et sa preuve s'étendent sans modification au cas où $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un espace de Banach, à condition de donner la définition suivante d'une application linéaire hyperbolique :

On dit que $L : B \longrightarrow B$ est hyperbolique si elle est continue et si il existe un décomposition $B = B^s \oplus B^u$ en deux sous-espaces fermés invariants par L tels que $|L^{-1}_{|B^u}| < a$ et $|L_{|B^s}| < a$, avec $a < 1$. Il est en fait équivalent de demander que le spectre de L soit disjoint du cercle unité.

Exercice 4.2. *Soit L un isomorphisme de B. Supposons qu'il existe une décomposition $B = E^s \oplus E^u$, une norme sur B, et $a > 1$ tels que :*

Pour tout $v = v_s + v_u$ vérifiant $|v_s| \leqslant |v_u|$, on a $|L_s v| \leqslant |L_u v|$ et $|Lv| \geqslant a|v|$;

Pour tout $v = v_s + v_u$ vérifiant $|v_u| \leqslant |v_s|$, on a $|L_u^{-1} v| \leqslant |L_s^{-1} v|$ et $|L^{-1} v| \geqslant a|v|$.

Montrer que L est hyperbolique.

On pourra montrer qu'il existe un application linéaire $A : E^s \longrightarrow E^u$, de norme $\leqslant 1$, dont le graphe est invariant par L.

5 Rotations quasi-périodiques, unique ergodicité

On considère le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. C'est un groupe de Lie Abélien, c'est à dire à la fois une variété et un groupe commutatif, et les opérations de groupe sont différentiables. Les fonctions différentiables sur $\mathbb{T}^d$ s'identifient aux fonctions différentiables de $\mathbb{R}^d$ qui sont $\mathbb{Z}^d$-périodiques.

Exercice 5.1. *Soit $\pi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ la projection canonique.*

Soit A une matrice de taille $d \times n$ à coefficients entiers. Montrer que A engendre une application différentiable $f_A : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^d$ telle que $f_A(\pi(x)) = \pi(A(x))$ pour toute $x \in \mathbb{R}^n$. On notera ci-dessous A l'application f_A.

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{T}^d$ une application continue. Montrer qu'il existe une application continue $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $f = \pi \circ F$.

Soit $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^d$ une application continue. Montrer qu'il existe une application continue $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $f \circ \pi = \pi \circ F$.

Soit $f : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{T}^d$ une application continue. Montrer qu'il existe une matrice A de taille $d \times n$ à coefficients entiers et une application continue $G : \mathbb{T}^n \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $f(x) = \pi \circ F(x) + Ax$.

On munit $\mathbb{T}^d$ de la distance $d(x, x') = \min_{y,y'} |y' - y|$ où le minimum est pris sur l'ensemble des représentants y et y' de x et x' dans $\mathbb{R}^d$. C'est un espace métrique compact. La distance d est invariante par translations, c'est à dire que $d(x + v, x' + v) = d(x, x')\ \forall v \in \mathbb{T}^d$.

On étudie ici la dynamique d'une translation $\varphi : x \longmapsto x + \omega$ où ω est vu soit comme un élément de $\mathbb{R}^d$ soit comme un élément de $\mathbb{T}^d$ (l'application φ ne dépend que de l'image de ω dans $\mathbb{T}^d$).

Commençons par motiver cette étude en expliquant comment cette dynamique apparaît dans les systèmes linéaires en présence de valeurs propres de module 1. Soit $R(\omega)$ la matrice 2×2 de la rotation d'angle $2\pi\omega$. Soit L La matrice $2d \times 2d$ diagonalisable par blocs 2×2, et dont les blocs diagonaux sont $R(\omega_1), \dots, R(\omega_d)$. Les valeurs propres complexes de L sont donc les nombres complexes $e^{2i\pi\omega_i}$. Notons (x_i, y_i) les coordonnées de $\mathbb{R}^{2d}$ correspondant à la décomposition par blocs. Les fonctions $n_i : x \longmapsto (x_i^2 + y_i^2)$ sont invariante par la dynamique de L, c'est à dire que $n_i(Lx) = n_i(x)$. Pour $r_1, \dots, r_d > 0$, le tore $T := \{x \in \mathbb{R}^{2d} : n_i(x) = r_i^2\ \forall \mathrm{i}\}$ est donc une sous-variété invariante. On parle de tore car cette sous-variété est difféomorphe à $\mathbb{T}^d$, un difféomorphisme est donné par l'application

$$J : \mathbb{T}^d \ni \theta = (\theta_1, \dots, \theta_d) \longmapsto (r_1 e^{2i\pi\theta_1}, \dots, r_d e^{2i\pi\theta_d}) \in \mathbb{C}^d = \mathbb{R}^{2d}.$$

En restriction à T, la dynamique de L est conjuguée à celle de la translation φ. Plus précisément, on a

$$L \circ J = \varphi \circ J.$$

On peut considérer le champ de vecteurs constant $V(\theta) = \omega$ sur $\mathbb{T}^d$, qui engendre le flot $\varphi^t(\theta) = \theta + t\omega$. De tels flots apparaissent notamment dans les équations linéaires $\dot{x} = Lx$ en présence de valeurs propres imaginaires pures de L. Contrairement au cas du temps discret, il faut se donner un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^d$ pour déterminer le flot, la projection de ω sur $\mathbb{T}^d$ n'est pas suffisante.

Chacun des flots φ^t est alors une translation du tore $\mathbb{T}^d$. De plus, si $\omega_d \neq 0$, alors l'application de retour associée à la section transverse $\theta_d = 0$ est la translation du tore $\mathbb{T}^{d-1}$ associée au vecteur $\tilde{\omega} = (\omega_1/\omega_d, \dots, \omega_{d-1}/\omega_d)$. Réciproquement, si ω est donné, alors la translation de vecteur ω est l'application de premier retour associée à la section de Poincaré d'équation $\theta_{d+1} = 0$ pour le flot engendré par le vecteur $(\omega, 1)$ sur $\mathbb{T}^{d+1}$. On s'attend donc à des similarités entre les propriétés de la translation de vecteur ω et le flot de vecteur $(\omega, 1)$, ce que les énoncés ci-dessous confirment.

Nous allons maintenant décrire la dynamique en fonction du vecteur ω. La première remarque, indépendante de ω, est que les orbites sont des translatées les unes des autres. Elles ont donc toutes les mêmes propriétés.

Cas rationnel. On dit que ω est rationnel si $\omega \in \mathbb{Q}^d$.

Les orbites de la translation φ sont périodiques si et seulement si le vecteur ω est rationnel, la période minimale est alors le plus petit entier T tel que $T\omega \in \mathbb{Z}^d$. Les orbites du flot φ^t sont périodiques si et seulement si la direction du vecteur ω est rationnelle, c'est à dite si ω est multiple d'un vecteur rationnel. La période minimale des orbites est alors le plus petit réel $T > 0$ tel que $T\omega \in \mathbb{Z}^d$.

On remarque que la translation engendrée par ω est périodique si et seulement si le flot engendré par $(\omega, 1)$ est périodique, et les période sont les mêmes.

Cas non résonnant. On dit que ω est non résonnant si il n'existe aucun vecteur entier non-nul $k \in \mathbb{Z}^d$ tel que $k \cdot \omega = 0$.

Théorème 5.1. *Les orbites du flot $(x + t\omega)$ sont denses dans $\mathbb{T}^d$ si et seulement si le vecteur ω est non résonnant.*

Les orbites de la translation $X = \omega$ sont denses dans $\mathbb{T}^d$ si et seulement si le vecteur $(\omega, 1)$ est non résonnant.

Lorsqu'on s'intéresse au temps discret, il est courant de dire aussi que ω est non résonnant lorsque $(\omega, 1)$ est non résonnant au sens ci-dessus, c'est à dire lorsque les orbites de la translation associée sont dense. Le même mot a donc deux sens différents suivant le contexte, mais ceci ne devrait pas trop prêter à confusion.

◄ On remarque pour commencer que les deux énoncés sont équivalents entre eux. En effet, si ω est non résonnant, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que (ω, α) est non résonnant, et alors $(\omega/\alpha, 1)$ est non résonnant.

Commençons par montrer la réciproque. Si $k \in \mathbb{Z}^d$ est une relation de résonance, alors k engendre une application différentiable $f : \theta \longrightarrow k \cdot \theta \mod 1$ de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{T}$, qui est une submersion surjective. L'orbite du point x_0 est contenue dans la fibre $f^{-1}(f(\theta_0))$, qui est une sous variété fermée de $\mathbb{T}^d$ de codimension 1, et n'est donc pas dense. Le sens direct découle immédiatement du Théorème 5.2 ci-dessous, qui en est une version plus quantitative. ►

Il est utile de considérer sur $\mathbb{T}^d$ des structures supplémentaires. Tout d'abord, nous munissons le tore d'une tribu, qui peut être définie comme la tribu borélienne, ou comme l'ensemble des parties B de $\mathbb{T}^d$ dont la préimage dans $\mathbb{R}^d$ est borélienne. On note qu'alors la bijection $\pi : [0, 1[^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ est bi-mesurable entre les tribus boréliennes. On munit $\mathbb{T}^d$ d'une mesure de probabilité λ, que nous appellerons mesure de Lebesgue (ou mesure de Haar), et qui est l'unique mesure de probabilité Borélienne invariante par translation. C'est aussi l'image directe par la projection de la mesure de Lebesque sur $[0, 1[^d$ (attention, ce n'est pas l'image directe par la projection de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).

On rappelle que, si $f : X \longrightarrow Y$ est une application mesurable entre espaces mesurés, l'image directe d'une mesure μ sur X est la mesure $f_*\mu$ sur Y telle que $f_*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$. (en langage probabiliste, c'est la loi de la variable aléatoire f). En termes d'intégrales, ceci s'écrit

$$\int_Y g \, d(f_*\mu) = \int_X g \circ f \, d\mu$$

pour toute fonction mesurable positive.

L'invariance par translation de la mesure λ est la propriété $\varphi_*\lambda = \lambda$, qui est satisfaite par toutes les translations. On notera dans la suite $S^n f$ la somme $f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}$.

Théorème 5.2 (Hermann Weyl)**.** *Soit φ une translation de vecteur non résonant (c'est à dire que $(\omega, 1)$ est non résonnant) sur le tore. Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{T}^d$, on a, en topologie uniforme,*

$$\frac{1}{n} S^n f = \frac{1}{n}\big(f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}\big) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^d} f d\lambda$$

Ce résultat implique la densité des orbites. En effet, si l'orbite de 0 n'était pas dense, il existerait une fonction f positive continue nulle sur l'orbite, mais non nulle. On a alors $f(0) + f \circ \varphi(0) + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}(0) = 0$, et $\int f d\lambda > 0$, ce qui est en contradiction avec le théorème.

◄ On commence par démontrer le résultat pour $f = e^{2i\pi k \cdot \theta}$, $k \in \mathbb{Z}^d$. Si $k \cdot \omega = 0$, alors $f \equiv 1$, donc le résultat est évident. Si $k \cdot \omega \neq 0$, on calcule :

$$f(\theta) + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}(\theta) = e^{2i\pi\theta}\big(1 + e^{2i\pi k \cdot \omega} + \cdots + e^{(n-1)2i\pi k \cdot \omega}\big) = e^{2i\pi\theta} \frac{1 - e^{n2i\pi k \cdot \omega}}{1 - e^{2i\pi k \cdot \omega}}.$$

Cette quantité est bornée, donc $\big(f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}\big)/n$ converge uniformément vers 0, qui est la moyenne de f.

Par linéarité, le résultat s'étend à tous les polynômes trigonométriques. En rappelant que les polynômes trigonométriques sont denses, pour la topologie uniforme, dans les fonctions continues, on peut alors étendre le résultat à toute fonction continue. En effet, soit f une fonction continue sur $\mathbb{T}^d$ et soit $\epsilon > 0$. Il existe alors g, polynôme trigonométrique tel que $|f - g| < \epsilon/10$. Il existe alors N tel que $|S^n g/n - \int g| < \epsilon/10$ pour tout $n \geqslant N$. Ceci implique que

$$|S^n f/n - \int f| \leqslant |S^n f/n - S^n g/n| + \left|S^n g/n - \int g\right| + \left|\int f - \int g\right| \leqslant 3\epsilon/10 < \epsilon. ►$$

Il existe aussi une version en temps continue du théorème, qui s'exprime par la convergence uniforme

$$\frac{1}{t}\int_0^t f \circ \varphi^s(x) ds \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^d} f d\lambda$$

lorsque $t \longrightarrow \infty$. La démonstration en est identique. On peut aussi la déduire de la variante discrète :

Exercice 5.2. *Soit ω non résonnant, soit $a > 0$ tel que (ω, a) est non résonnant. Montrer que l'énoncé en temps continu pour le vecteur ω se déduit de l'énoncé en temps discret pour le vecteur ω/a.*

Définition 5.3. *L'application $\varphi : X \longrightarrow X$ est dite uniquement ergodique si, pour chaque fonction continue f sur X, il existe une constante $c(f)$ telle que $S^n f/n \longrightarrow c(f)$ uniformément, où $S^n f = f + f \circ \varphi + \cdots + f \circ \varphi^{n-1}$.*

On verra plus loin (Théorème 8.6) qu'il suffit en fait d'avoir la convergence ponctuelle.

Une conséquence de la preuve ci-dessus est qu'il suffit d'avoir la convergence des sommes $S^n f/n$ sur une partie dense de $C(X)$ pour avoir l'unique ergodicité.

Nous avons démontré que les translations non résonnantes du tore sont uniquement ergodiques.

Si φ est uniquement ergodique, alors la fonction $f \mapsto c(f)$ est linéaire et positive sur $C^0(X)$, c'est à dire que $c(f) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$. Comme de plus $c(1) = 1$, on conclut par le théorème de représentation de Riesz qu'il existe une mesure de probabilité Borélienne m sur X telle que $c(f) = \int f dm$. La mesure de probabilité m est alors invariante par φ. En effet

$$\int (f\circ\varphi) dm = \lim S^n(f\circ\varphi)(x)/n = \lim \big(S^n f(x) + f\circ\varphi^n(x) - f(x)\big)/n = \lim S^n f(x)/n = \int f dm$$

pour toute fonction continue f et tout point x, donc $\varphi_* m = m$.

Propriété 5.4. *Si φ est uniquement ergodique, alors il existe une unique mesure de probabilité Borélienne invariante.*

On montrera plus tard que toute application continue d'un espace métrique compact admettant une unique probabilité invariante est uniquement ergodique (ce qui explique le nom).

◄ Soit m la probabilité pour laquelle $c(f) = \int f dm$. Comme $c(f\circ\varphi) = c(f)$, la mesure m est invariante. Soit μ une autre mesure invariante, alors $\int f d\mu = \int S^n f/n d\mu$ pour tout n. Par le théorème de convergence dominée, cette suite converge vers $\int (\int f dm) d\mu = \int f dm$, on a donc $\int f d\mu = \int f dm$ pour toute fonction continue f, et donc $\mu = m$. ►

La mesure invariante m décrit la répartition des orbites :

Proposition 5.5. *Soit φ une application uniquement ergodique de l'espace métrique compact X, et soit m sa mesure invariante.*

Soit A une partie de $\mathbb{T}^d$ tel que $m(\partial A) = 0$, et soit $N_A(n,\theta)$ le nombre de points parmi $x, \varphi(\theta), \dots, \varphi^{n-1}(\theta)$ qui sont dans A. Alors $N_A(n,\theta)/n \longrightarrow m(A)$ pour tout $x \in X$.

On peut en particulier appliquer ce résultat aux translations non résonnantes du tore, c'est le Théorème d'équirépartition de Weyl (dans ce cas, l'unique mesure invariante est la mesure de Lebesgue λ).

◄ L'énoncé ne découle pas directement de la définition car la fonction $f = 1_A(x)$ n'est pas continue. Par régularité de la mesure m, il existe, pour tout $\epsilon > 0$, un compact $K \subset A$ et un ouvert $U \supset A$ tels que

$$m(U) - \epsilon \leqslant m(\bar{A}) = m(A) = m(\mathring{A}) \leqslant m(K) + \epsilon.$$

On considère alors des fonctions continues h et $g : \mathbb{T}^d \longrightarrow [0,1]$ qui vérifient $h = 1$ sur $\bar{A}$ et 0 hors de U, et $g = 1$ sur K et 0 hors de $\mathring{A}$, de sorte que $g \leqslant 1_A \leqslant h$.

On a donc $S^n g \leqslant S^n_f \leqslant S^n_h$, donc

$$m(A) - \epsilon \leqslant \int g = \lim S^n g(\theta)/n \leqslant \liminf S^n f(\theta)/n \leqslant \limsup S^n f(\theta)/n \leqslant \lim S^n h(\theta)/n \int h \leqslant m(A) + \epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que $\limsup S^n f(\theta)/n = \liminf S^n f(\theta)/n = m(A)$ pour tout θ. ►

En fait, la convergence de $S^n f/n$ a lieu pour toutes les fonctions Riemann intégrables :

Exercice 5.3. *Pour toute fonction f, on note $I^-(f)$ le supremum des intégrales des fonctions continues inférieures à f, et $I^+(f)$ l'infimum des intégrales des fonctions continues supérieures à f.*

1. *En utilisant la séparabilité de $C(X,\mathbb{R})$, montrer qu'il existe deux suites g_n et h_n, croissantes et décroissantes, de fonctions continues, telles que $g_n \leqslant f \leqslant h_n$ et $\int h_n \longrightarrow I^-(f)$, $\int g_n \longrightarrow I^+(f)$.*
2. *Soient H et G les limites des suites h_n et g_n. Montrer que les fonctions H et $-G$ sont semi-continues inférieurement. Montrer que f est continue en x si et seulement si $H(x) = f(x) = G(x)$.*
3. *Montrer que f est Riemann intégrable si et seulement si $I^-(f) = I^+(f)$.*
4. *Montrer que $S^n f(x)/n \longrightarrow \int f$ pour tout x si f est Riemann intégrable.*

Cas général. Si $d = 1$, alors tout vecteur de rotation $\omega \in \mathbb{R}$ est soit rationnel soit non-résonnant. Ce n'est toutefois pas le cas en dimension supérieure.

On note $Z(\omega)$ le sous-groupe de résonance de ω, c'est à dire le sous-groupe de $\mathbb{Z}^d$ constitué des vecteurs ξ tels que $\xi\cdot\omega = 0$. On note $E(\omega)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$ engendré par $Z(\omega)$, et $r(\omega)$ sa dimension, c'est l'ordre de résonance de ω.

Bien sûr, dans le cas discret, ce sont $Z(\omega,1)$, $E(\omega,1)$, $r(\omega,1)$ qui sont pertinents.

Propriété 5.6. *Le vecteur ω est non résonnant si et seulement si $r(\omega) = 0$.*

Le vecteur ω engendre une direction rationnelle si et seulement si $r(\omega) = d - 1$. Pour le cas discret, ω est rationnel si et seulement si $r(\omega, 1) = d$.

◄ Le premier point est tautologique. Concernant le second, si $r(\omega) = d$ alors il existe $l_1, \dots, l_{d-1} \in \mathbb{Z}^d$, linéairement indépendants, tels que $l_i(\omega) \in \mathbb{Z}$. On ajoute un vecteur entier l_d, linéairement indépendant des autres, tel que $l_d \cdot \omega \neq 0$. Il existe donc une matrice A inversible, à coefficients entiers, telle que $A(\mathbb{R}\omega) = \{0_{d-1}\}\times\mathbb{R}$. La matrice A^{-1} est à coefficients rationnels, donc la droite $\mathbb{R}\omega$ est rationnelle.

Réciproquement, supposons ω engendre une droite rationnelle. On suppose aussi par exemple que $\omega_d \neq 0$. Alors le vecteur $\tilde{\omega} := (\omega/1/\omega_d, \dots, \omega_{d-1}/\omega_d)$ est rationnel, il existe donc un entier l tel que $l\omega_i/\omega_d \in \mathbb{Z}$ pour tout i. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}^{d-1}$, on a $k \cdot \tilde{\omega} \in \mathbb{Z}$ et donc $(k, -k \cdot \tilde{\omega}) \in Z(\omega)$. Ceci montre que $r(\omega) \geqslant d - 1$, et donc que $r(\omega) = d - 1$. ►

Théorème 5.7. *Considérons l'application $\varphi : \mathbb{T}^d \ni \theta \mapsto \theta + \omega \in \mathbb{T}^d$. Chaque orbite a pour adhérence une union finie de tores de dimension $d - r(\omega, 1)$.*

Dans le cas du flot $\theta + t\omega$, chaque orbite a pour adhérence un tore de dimension $d - r(\omega)$.

On peut illustrer cet énoncé en prenant $\omega = (1/2, a)$, avec a irrationnel. L'orbite (par la translation) de zéro est alors dense dans la sous variété $\{0\} \times \mathbb{T} \cup \{1/2\} \times \mathbb{T}$. Si l'on regarde maintenant le flot du vecteur $(1/2, a, 1)$ l'orbite de 0 est un tore de dimension 2. L'adhérence de l'orbite de 0 pour le système discret ci-dessus est l'intersection entre ce tore de dimension 2 et la section $\theta_3 = 0$. Cette intersection est la réunion de deux tores.

Pour démontrer, et préciser, ce théorème, nous allons considérer des changements de variables $\theta \mapsto A\theta$, avec $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$. On rappelle qu'une matrice A à coefficients entiers engendre une application différentiable de $\mathbb{T}^d$. Cette application est un difféomorphisme si et seulement si A admet une inverse à coefficients entiers, c'est à dire si et seulement si $\det A = \pm 1$. On appelle automorphisme du tore ces difféomorphismes. L'automorphisme du tore associé à la matrice $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ est encore noté A, il conjugue la translation de vecteur ω à la translation de vecteur $A\omega$. Le théorème précédent découle donc du résultat algébrique suivant :

Théorème 5.8. *Soit $\omega \in \mathbb{R}^d$. Il existe $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ tel que $A\omega = (0, \omega_n)$, où $\omega_n \in \mathbb{T}^{d-r(\omega)}$ est non résonnant.*

Pour le cas discret, on a : Soit $\omega \in \mathbb{R}^d$. Il existe $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ tel que $A\omega = (\omega_r, \omega_n)$, où $\omega_n \in \mathbb{T}^{d-r(\omega-1)}$ est non résonnant, et où ω_r est rationnel.

On dit qu'un sous-espace de $\mathbb{R}^d$ est rationnel si il est engendré par son intersection avec $\mathbb{Q}^d$.

Proposition 5.9. *Pour tout entier k, le groupe $Gl_d(\mathbb{Z})$ agit transitivement sur les sous-espaces rationnels de dimension k de $\mathbb{R}^d$.*

◄ Soit F un tel sous-espace et soit L une matrice rationnelle $d \times k$ dont F est l'image. En multipliant au besoin L par le produit de tous les dénominateurs de ses coefficients, on peut supposer que L est à coefficients entiers.

Nous allons montrer que l'on peut réduire L à une matrice $M = \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}$ qui est la juxtaposition d'un bloc D diagonal $k \times k$ et du bloc nul par opérations élémentaires entières sur ses lignes et ses colonnes (c'est à dire par multiplication à gauche et à droite par des matrices de $Gl_d(\mathbb{Z})$ et $Gl_k(\mathbb{Z})$.

On réduit la matrice en appliquant successivement la suite de deux opérations suivantes : Mettre le plus petit (en valeur absolue) coefficient a non nul en haut à droite, puis remplacer les autres coefficients de la premières ligne et de la première colonne par les restes de leur division modulo a.

Chaque étape de cette construction fait strictement diminuer au moins un des coefficients non diagonaux, donc on se ramène en un nombre fini d'étapes à une matrice dont tous les coefficients de la permière ligne et de la première colonne sont nuls, sauf le premier. On recommence en prenant pour pivot le coeff $(2, 2)$, etc …

En fait, on peut, en plus, obtenir que les coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_k$ de M sont des entiers tels que d_i divise d_{i+1} mais ce n'est pas nécessaire ici. Voire par exemple Artin, Algebra, section 12.4.

On a montré l'existence de deux matrices $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ et $B \in Gl_k(\mathbb{Z})$ telles que $ALB = M$. Ceci implique que $A(F) = \mathbb{Q}^k \times \{0_{d-k}\}$. ►

◄ On prouve maintenant le théorème.

Le sous-espace $E(\omega)$ engendré par $Z(\omega)$ est rationnel et de dimension $r(\omega)$, donc il existe une $B \in GL_d(\mathbb{Z})$ tel que $B(E(\omega)) = \mathbb{R}^{r(\omega)} \times \{0_{d-r(\omega)}\}$. On pose $A = B^t$, le groupe de résonance de $A\omega$ est $B(Z(\omega))$, ce qui implique que $A\omega$ est de la forme $(0, \omega_n)$ avec ω_n non résonnnant.

Soit $F(\omega)$ l'orthogonal de $Z(\omega)$ dans $\mathbb{Q}^d$, c'est à dire l'ensemble des vecteurs rationnels x tels que $l \cdot x = 0$ pour tout $l \in Z(\omega)$. Il existe un automorphisme $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ tel que $A(F(\omega)) = \{0_r\} \times \mathbb{Q}^{d-r}$.

On décompose $w := A\omega$ en deux composantes $w_r \in \mathbb{R}^r$ et $w_n \in \mathbb{R}^{d-r}$. Le groupe de résonances de w est l'ensemble des $l \circ A$, $l \in Z(\omega)$, c'est à dire que $Z(w) = A^t(Z(\omega)))$. Il est donc contenu dans $\mathbb{Z}^r \times \{0\}$. La première composante w_r est donc nulle. La seconde composante w_n n'est pas résonnante.

Le cas discret se démontre de la même façon en considérant le groupe $\tilde{Z}(\omega)$ constitué des éléments $k \in \mathbb{Z}^d$ tels que $k \cdot \omega \in \mathbb{Z}$. L'espace vectoriel $\tilde{E}(\omega)$ qu'il engendre est rationnel, et il est de dimension $r(\omega, 1)$. Il existe donc une matrice $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ telle que $\tilde{E}(A(\omega)) = \mathbb{R}^{r(\omega,1)} \times \{0_{d-r(\omega,1)}\}$, ce qui implique que $A\omega$ est de la forme voulue. ►

Mentionnons un contexte classique dans lequel les tores quasi-périodiques apparaissent : la mécanique céleste.

Dans un système composé de k planètes et d'un soleil de très grande masse, on peut en première approximation supposer que chacune des planètes suit un mouvement périodique elliptique déterminé par son interaction avec le soleil. On peut paramétrer cette orbite par un flot de translations sur le cercle $\mathbb{T}^1$, au vu de l'exercice ci-dessous.

Exercice 5.4. *Soit $V(x)$ un champ de vecteurs sur $\mathbb{T}^1$ qui admet une orbite périodique non constante de période minimale T. Montrer que le champ V est globalement conjugué au champ de vecteurs constant $W(x) = 1/T$.*

On a donc, dans cette approximation du problème planétaire, des tores invariants de dimension n (le nombre de planètes) sur lesquels la dynamique est donnée par le flot d'un champ de vecteurs constant dont les coordonnées sont les inverses des périodes des planètes (qui dépendent des orbites choisies, c'est à dire du tore choisi). L'espace des phases, qui est ici l'ensemble des positions et vitesses possibles des planètes, est un espace de dimension $6n$, qui se décompose comme une union de tores de dimension n (avec des singularités et des dégénérescences correspondant aux collisions) sur chacun desquels la dynamique est un flot quasi périodique. Contrairement au cas linéaire, le vecteur fréquence ω dépend du tore, il y a des tores résonnants et des tores non résonants.

Considérons maintenant le cas des tores de dimension infinie. On note $\mathbb{T} := \mathbb{T}^1$ et on considère le tore $\mathbb{T}^\infty = \mathbb{T}^\mathbb{N}$, muni de la topologie produit, qui en fait un espace compact métrisable. Comme les tores de dimension finie, $\mathbb{T}^\mathbb{N}$ est une groupe topologique Abélien compact, c'est à dire qu'il est muni d'une opération de groupe commutative, et que les opérations $(\theta, \theta') \mapsto \theta + \theta'$ et $\theta \mapsto -\theta$ sont continues. On munit le tore $\mathbb{T}^\infty$ de la distance $d(\theta, \theta') = \sum_n 2^{-n} d(\theta_n, \theta'_n)$, où d est la distance sur $\mathbb{T}$. C'est une distance invariante par translations, qui engendre la topologie produit. On munit aussi le tore $\mathbb{T}^\mathbb{N}$ de sa mesure de Haar, qui est le produit des mesures de Lebesgue (ou de Haar) sur le cercle. C'est l'unique mesure de probabilité invariante par translations.

On dit que $\omega \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ est non résonant si il n'existe aucune relation de résonance finie de la forme $n_{i_1}\omega_{i_1} + \cdots + n_{i_k}\omega_{i_k} = 0$ entre ses coefficients. Il est donc équivalent de demander que l'image de ω par toute projection sur un espace de coordonnées de dimension finie est non résonante. Comme en dimension finie, on a :

Proposition 5.10. *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
Le sous-groupe $\mathbb{R}\omega$ est dense dans $\mathbb{T}^\mathbb{N}$.
Le flot $\varphi^t(\theta) = \theta + t\omega$ est minimal (chaque orbite est dense).
Le vecteur ω est non résonant.

◄ Soit $P_d : \mathbb{T}^\infty \longrightarrow \mathbb{T}^d$ ou $\mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ la projection sur les d premiers facteurs. Si ω est non résonant, le sous groupe $\mathbb{R}\omega$ est envoyé dans le sous-groupe dense $\mathbb{R}P_d(\omega)$ pour tout d. Comme les fibres de la projection P_d (les pré-images des points) ont un diamètre qui tend vers 0 lorsque $d \longrightarrow \infty$, on conclut que $\mathbb{R}\omega$ est dense et que le flot $\varphi^t(\theta) = \theta + t\omega$ est minimal.

Réciproquement, si $\mathbb{R}\omega$ est dense, alors $\mathbb{R}P_d(\omega)$ l'est aussi pour tout d, donc $P_d(\omega)$ est non résonant pour tout d ce qui est équivalent au caractère non résonant de ω. ►

On vérifie facilement qu'il existe des vecteurs non résonants dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. Par exemple, si λ est la mesure de Lebesgue sur $[-1, 1]$ (divisée par 2 pour obtenir une probabilité), et si $\lambda^\mathbb{N}$ est la mesure produit, alors $\lambda^\mathbb{N}$-presque tout point $\omega \in [-1, 1]^\mathbb{N}$ est non résonant. En effet, notons R^d l'ensemble des vecteurs résonants de $\mathbb{R}^d$, pour $d \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$. Par définition,

$$R^\mathbb{N} = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} P_d^{-1}(R^d),$$

où $P_d : \mathbb{R}^\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est la projection sur les premiers facteurs. Comme R^d est de mesure nulle dans $[-1, 1]^d$ et comme $(P_d)_* \lambda^\mathbb{N} = \lambda^d$, on déduit que $P_d^{-1}(R^d)$ est de mesure nulle, et donc que $R^\mathbb{N}$ est de mesure nulle.

Complément : Fonctions quasi-périodiques et fréquences

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$) est quasi-périodique si il existe un entier d, un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^d$, et une fonction continue $g : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(t) = g(\omega t)$. Remarquons qu'il n'y a pas une unique façon de représenter une fonction f donnée de cette façon. On a vu dans ce qui précède que l'adhérence de l'orbite $\mathbb{R}\omega$ dans $\mathbb{T}^d$ est homéomorphe à un tore $\mathbb{T}^r$, $r \leqslant d$, et que la dynamique du flot $t\omega$ sur cette adhérence est conjuguée à un flot $t\tilde{\omega}$ non résonnant. Il est donc toujours possible de représenter la fonction quasi-périodique f a partir d'un vecteur fréquence non résonnant.

Pour une telle représentation non résonnante, on a

$$\frac{1}{t}\int_T^{T+t} f(s)ds \longrightarrow \int g d\theta$$

quand $T \longrightarrow \infty$, uniformément en T. C'est une conséquance de l'unique ergodicité du flot non résonnant de ω. Cette expression implique en particulier que la valeur moyenne est bien définie et ne dépend pas du choix des paramètres d, ω, g de la représentation non résonnante de f, on la notera $\int f$.

On peut alors définir la transformée de fourier de f

$$\hat{f}(\alpha) := \int f(t)e^{-2i\pi\alpha t}$$

en tirant parti du fait que la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-2i\pi\alpha t}$ est quasi-périodique si f l'est.

On dit que α est une fréquence de f si $\hat{f}(\alpha) \neq 0$, et on note Ω le sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par les fréquences de f.

Proposition 5.11. *Si $f(t) = g(\omega t)$, alors le groupe des fréquences de f est contenu dans le sous-groupe engendré par les composantes de ω.*

En particulier, le groupe des fréquences de f est de type fini.

◄ Si ω est résonnant, il existe une matrice $A \in GL_d(\mathbb{Z})$ telle que $A\omega = (\omega_n, 0)$ avec ω_n non résonnant. Le groupe engendré par les coordonnées de ω_n est alors le même que le groupe engendré par les coordonnées de ω. Cette remarque permet de se restreindre au cas où ω est non-résonant ce que nous supposons dans la suite.

Il existe une suite g_n de polynômes trigonométriques sur $\mathbb{T}^d$ qui converge uniformément vers g. Les fonctions associées $f_n(t) := g_n(\omega t)$ convergent donc uniformément vers f, et les transformées de Fourier convergent ponctuellement vers celle de f.

Les fréquences des fonctions f_n sont toutes de la forme $k \cdot \omega$, avec $k \in \mathbb{Z}^d$, c'est à dire qu'elles sont toutes dans le groupe engendré par les composantes de ω. A la limite, on obtient que $\hat{f} = \lim \hat{f}_n = 0$ si α n'est pas dans ce groupe, c'est à dire que toutes les fréquences de f sont dans ce groupe. ►

Comme le groupe Ω engendré par les fréquences est de type fini, il est isomorphe à $\mathbb{Z}^r$ pour un entier r. Autrement dit, il admet des bases, c'est à dire des familles $a_1, \dots, a_r$ telles que tout élément de Ω s'écrit de manière unique comme une somme $k_1 a_1 + \cdots + k_r a_r$.

Proposition 5.12. *Soit $a_1, \dots, a_n$ une partie génératrice de Ω, et soit $a = (a_1, \dots, a_n)$.*

Il existe alors une fonction continue h sur $\mathbb{T}^n$ telle que $f(t) = h(at)$.

On remarque que cette représentation est non-résonnante si et seulement si $a_1, \dots, a_n$ est une base de Ω.

◄ On a $f(t) = g(\omega t)$ pour un certain vecteur non-résonnant $\omega \in \mathbb{R}^d$. On a alors $\hat{g}(k) = \hat{f}(k \cdot \omega)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$. Considérons le groupe $Z \subset \mathbb{Z}^d$ des vecteurs k tels que $k \cdot \omega \in \Omega$. Les coefficients de Fourier $\hat{g}(k), k \notin Z$ sont donc nuls.

Considérons le groupe $Z \subset \mathbb{Z}^d$ des vecteurs k tels que $k \cdot \omega \in \Omega$. Au vu de la Proposition 5.9 (ou plutôt de sa preuve), il existe un élément $A \in Gl_d(\mathbb{Z})$ et des entiers $l_1, \dots, l_r$ tels que $A(Z)$ est le sous groupe engendré par les $l_i e_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, où e_i est la base standard de $\mathbb{R}^d$. Quitte à remplacer g par $g \circ {}^t A$ et ω par ${}^t A^{-1}\omega$, on peut donc supposer que Z est le groupe engendré par les $l_i e_i$. Les fréquences $l_i \omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ forment alors une base de Ω.

On note $|(k_1, \dots, k_d)| : \max |k_i|$. On définit les sommes partielles

$$S^n g(\theta) := \sum_{|k| \leqslant n} \hat{g}_k e^{2i\pi k \cdot \theta}.$$

Les fonctions $S^n g$ ne convergent pas forcément uniformément vers g, mais on sait par la Théorème de Fejer que c'est le cas des moyennes $M^n g := (S^1 g + \cdots + S^n g)/n$. La fonction $M^n g$ est un polynôme trigonométrique dont tous les coefficients correspondant à des multi-indices $k \notin Z$ sont nuls. Il existe donc un polynôme trigonométrique p_n sur $\mathbb{T}^r$ tel que $M^n g(\theta_1, \dots, \theta_d) = p_n(l_1\theta_1, \dots, l_r\theta_r)$. La suite de fonctions p_n est de Cauchy, elle converge uniformément vers une limite $p : \mathbb{T}^r \longrightarrow \mathbb{C}$. A la limite, on a

$$f(t) = p(l_1\omega_1 t, \dots, l_r\omega_r t).$$

On a donc montré que la fonction f peut être représentée à l'aide du vecteur fréquence $\tilde{\omega} := (l_1\omega_1, \dots, l_r\omega_r)$.

Si maintenant $a_1, \dots, a_n$ est une famille génératrice de Ω, et $a = (a_1, \dots, a_n)$, alors il existe une matrice A de taille $r \times n$ à coefficients entiers telle que $Aa = \tilde{\omega}$. La matrice A engendre une application continue $A : \mathbb{T}^r \longrightarrow \mathbb{T}^n$, et on a $f(t) = (g \circ A)(at)$. ►

6 Dynamiques isométriques, minimalité, transitivité

Dans ce chapitre, X est un espace métrique, le plus souvent compact, et on considère une application continue $\varphi : X \longrightarrow X$.

On dit que le compact positivement invariant $Y \subset X$ est minimal si tout compact non vide positivement invariant minimal contenu dans Y est égal à Y. Comme tout compact positivement invariant contient un compact invariant, ceci implique que Y est en fait invariant.

On dit que φ est minimale si X est un compact invariant minimal.

Propriété 6.1. *L'application φ est minimale si et seulement si toutes ses orbites sont denses dans X. C'est aussi équivalent à la condition que $\omega(x) = X$ pour tout x.*

◄ Si φ est minimale, alors $\omega(x) = X$ pour tout x, puisque c'est un compact invariant non-vide. Ceci implique que l'orbite de x est dense. Si toutes les orbites sont denses, alors il n'existe pas de compact positivement invariant non trivial. ►

Proposition 6.2. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue du métrique compact X. Il existe un compact invariant minimal.*

◄ On peut utiliser le Lemme de Zorn. Nous allons donner une preuve plus constructive issue des notes de Milnor. On considère une base d'ouverts dénombrable U_i. Pour chaque i, on note V_i le passé de U_i, c'est à dire $\cap_{j\geqslant 0}\varphi^{-j}(U_i)$. On construit par récurrence une suite décroissante de compacts invariants non-vides Y_n tels que $Y_0 = X$. On pose alors $Y_{n-1} \cap (X - V_n)$ si cet ensemble est non vide (c'est un compact invariant), et $Y_n = Y_{n-1} = Y_{n-1} \cap V_n$ dans l'autre cas, c'est alors clairement un compact non vide invariant. On considère $Y = \cap Y_n$, qui est un compact non-vide invariant.

Soit $H \subset \mathbb{N}$ l'ensemble des indices i tels que $U_i \cap Y$ est non-vide. Pour $i \in H$, on a $Y \subset Y_i \subset V_i$, ce qui montre que toute orbite de Y passe par U_i. Comme les ouverts $U_i \cap Y, i \in H$ constituent une base d'ouverts de Y, ceci implique la minimalité de Y. ►

Nous donnons maintenant une caractérisation des orbites dont l'adhérence est minimale. On dit que T est une ϵ-période du point x si $d(x, \varphi^T(x)) < \epsilon$.

Proposition 6.3. *L'adhérence de l'orbite de x est minimale si et seulement si x a la propriété suivante : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que chaque intervalle de longueur N contient une ϵ-période de x.*

◄ Supposons que la propriété sur les ϵ-périodes est satisfaite par x, et montrons la minimalité de l'adhérence de $O^+(x)$. Soit y et z deux points de l'adhérence de $O^+(x)$. Fixons $\epsilon > 0$. On veut montrer que l'orbite de y intersecte $B(z, \epsilon)$. Il existe k tel que $d(\varphi^k(x), z) < \epsilon/2$. Il existe donc ϵ_1 tel que $d(\varphi^k(x'), z) < \epsilon$ lorsque $d(x, x') < \epsilon_1$. Soit N tel que tout intervalle de temps de longueur N contient un temps T pour lequel $d(\varphi^T(x), x) < \epsilon_1/2$. Comme X est compact, les applications φ^i sont uniformément continues, il existe donc $\delta > 0$ tel que $\varphi^i(q, q') < \epsilon_1$ si $d(q, q') < \delta$ et si $i \in \{0, 1, \dots, N\}$. Comme y est dans l'adhérence de l'orbite de x, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $d(\varphi^t(x), y) < \delta$. Il existe ensuite un entier $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ tel que $d(\varphi^{t+i}(x), x) < \epsilon_1/2$. Alors,

$$d(\varphi^i(y), x) < d(\varphi^i(y), \varphi^i \circ \varphi^t(x)) + d(\varphi^{i+t}(x), x) < \epsilon_1$$

et donc $d(\varphi^{i+k}(y), z) < \epsilon$.

Soit x un point qui n'est pas presque périodique, soit Y l'adhérence de son image. Il existe $\epsilon > 0$ et une suite a_n de temps tel que, pour chaque n, aucun des points $\varphi^{a_n}(x), \dots, \varphi^{a_n+n}(x)$ n'est dans $B(x, \epsilon)$. On peut supposer en extrayant une sous-suite que $\varphi^{a_n}(x)$ a une limite $y \in Y$. Pour tout $k \geqslant 0$, le point $\varphi^{a_n+k}(x)$ est hors de la boule $B(x, \epsilon)$. A la limite, on déduit que $d(\varphi^k(y), x) \geqslant \epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $k \geqslant 0$, x n'est pas dans l'adhérence de l'orbite de y, et donc Y n'est pas minimal. ►

Étudions maintenant le lien entre minimalité et unique ergodicité.

Proposition 6.4. *Soit φ une application continue d'un espace métrique compact X. Supposons que φ est uniquement ergodique de mesure invariante m, et soit Y le support de m. Alors Y est invariant et $\varphi_{|Y}$ est minimal.*

Le support d'une mesure est le complémentaire du plus grand ouvert de mesure nulle.
◄ Le complémentaire $X - Y$ est un ouvert de mesure nulle, donc c'est aussi le cas de sa préimage $\varphi^{-1}(X - Y)$. Ceci implique que $\varphi^{-1}(X - Y)$ est disjoint de Y, c'est à dire que Y est positivement invariant. Soit Z un fermé positivement invariant contenu dans Y, et soit $f : X \longrightarrow [0, 1]$ une fonction continue nulle sur Z et strictement positive sur $X - Z$. La première propriété implique que $S^n f(x) = 0$ pour tout $x \in Z$, et donc que $\int f dm = 0$ si Z est non vide. La seconde propriété implique que $\int f dm > 0$ si $Z \neq Y$. Z est donc soit vide soit égal à Y. ►

Réciproquement, il est tentant de penser que tout système minimal est uniquement ergodique, mais ce n'est en général pas le cas. Le lemme suivant sera utile sur les applications minimales. Soit $\psi : X \longrightarrow X$ une application minimale et $a : X \longrightarrow \mathbb{T}$ une application continue. Considérons l'application fibrée

$$\varphi : X \times \mathbb{T} \ni (x, \theta) \longmapsto (\psi(x), \theta + a(x)) \in X \times \mathbb{T}.$$

Lemme 6.5. *Ou bien l'application φ est minimale, ou bien il existe $k \in \mathbb{N}$ et une fonction continue $f : X \longmapsto \mathbb{T}$ telle que le graphe de f est invariant par l'application $(x, \theta) \longmapsto (\psi(x), \theta + ka(x)$, c'est à dire telle que $f(\psi(x)) = f(x) + ka(x)$ pour tout x.*

En particulier, si a est une constante, l'application f réalise une semi conjugaison entre l'application φ et la translation $\theta \longmapsto \theta + ka$.
◄ Soit $Y \subsetneq X \times \mathbb{T}$ un compact invariant non vide. La projection de Y sur X est un compact invariant non vide de X, donc c'est X. Notons τ_z l'application $\mathbb{T} \ni \theta \longmapsto \theta + z \in \mathbb{T}$, et aussi l'application $X \times \mathbb{T} \ni (x, \theta) \longmapsto (x, \theta + z) \in X \times \mathbb{T}$. On remarque que les applications τ_z commutent avec φ. Pour tout $z \in \mathbb{T}$, l'ensembles $\tau_z(K)$ est un compact invariant, et donc $\tau_z(K) \cap K$ est soit vide soit égal à K. On note S l'ensemble des éléments $z \in \mathbb{T}$ tels que $\tau_z(K) = K$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$. Comme $Y \neq X \times \mathbb{T}$, $S \neq \mathbb{T}$, donc il existe un entier k tel que $S = \mathbb{Z}/k \mod 1$. Si $k = 1$, alors Y contient un point par fibre $\{x\} \times \mathbb{T}$, c'est donc le graphe d'une fonction de $f : X \longrightarrow \mathbb{T}$. La fermeture de Y implique que cette fonction est continue. En général, l'image de Y par le revêtement $X \times \mathbb{T} \ni (x, \theta) \longmapsto (x, k\theta) \in X \times \mathbb{T}$ est aussi un compact qui contient un point et un seul par fibre, et qui est donc le graphe d'une fonction continue $f : X \longmapsto \mathbb{T}$. On a donc pour cette fonction $f(\psi(x)) = f(x) + ka(x)$. ►

La minimalité est une façon de dire que les orbites remplissent l'espace X. Il est utile de considérer des notions plus faibles dans la même direction. On relaxe temporairement l'hypothèse de compacité de X.

L'application $\varphi : X \longrightarrow X$ est dite topologiquement transitive si, pour tous ouverts non vides U et V, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi^{-n}(V) \cap U$ est non-vide. Il est clair qu'une application minimale est transitive, la réciproque n'est pas vraie.

Voici deux exemples de dynamiques transitives : L'application $\varphi : \theta \longmapsto 2\theta$ sur $\mathbb{T}$. Pour montrer la transitivité, on constate que l'image d'un intervalle I de longueur l est un intervalle de longueur $\min(2l, 1)$. Pour n assez grand, $\varphi^n(I)$ est donc de longueur 1. On verra ci-dessous qu'il existe alors une orbite dense. Il n'est pas évident de donner explicitement une telle orbite.

Dans le second exemple, $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites de zéros et de uns, et l'application est le décalage σ qui à la suite $a_0, a_1, \dots$ associe la suite $a_1, a_2, \dots$. L'espace X est muni de la topologie produit, c'est un espace compact métrisable. Il y a de nombreuses distances possibles, comme $d(a, b) = \sum 2^{-i}|a_i - b_i|$ ou $D(a, b) = 2^{-k}$, où k est le plus grand entier tel que les suites a et b coïncident jusqu'au rang k. Cette seconde distance est ultramétrique, c'est à dire que $D(a, b) \leqslant \max(d(a, a'), d(a', b)$ pour tout a'. On remarque que $D(\sigma(a), \sigma(b)) = 2D(a, b)$ si $D(a, b) < 1$: on a une dilatation comme dans l'exemple précédent. On montre alors la transitivité comme pour l'exemple précédent : si U est un ouvert de X, alors il existe n tel que $\sigma(U) = X$. Concrètement, U contient un cylindre, c'est à dire l'ensemble des suites de X dont les k premiers termes sont fixés (c'est aussi une boule de rayon 2^{-k} pour la distance D), et il est évident que l'image d'un tel cylindre par σ^{k+1} est X entier.

En fait, ces deux exemples sont fortement reliés. En effet on peu considérer l'application

$$p : X \ni (a_i) \longmapsto \sum_i 2^{-i} a_i \mod 1 \in \mathbb{T}.$$

Cette application est continue, et c'est une semi-conjugaison entre φ et σ, c'est à dire que $\varphi \circ p = p \circ \varphi$. La transitivité de φ découle ainsi de celle de σ. De plus, l'image d'une condition initiale dont l'orbite est dense est une condition initiale dont l'orbite et dense (ceci permet de décrire certaines conditions initiales pour φ dont l'orbite est dense.) Même si p n'est pas injective, elle est très proche de l'être. En effet tous les points ont une unique préimage, sauf un nombre dénombrable de points, qui ont chacun deux préimages.

Exercice 6.1. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue topologiquement transitive (où X est un espace métrique, ou même topologique quelconque). Si X admet un point isolé, montrer que X est fini.*

Propriété 6.6. *Si $\varphi : X \longrightarrow X$ est transitive, alors pour tous ouverts U et V, il existe des entiers n arbitrairement grands pour lesquels $\varphi^{-n}(V) \cap U$ est non vide.*

◄ On remarque pour commencer que l'image de φ est dense. Sinon, le complémentaire de $\varphi(X)$ contient un ouvert U. Pour tout ouvert V disjoint de U et tout $n \in \mathbb{N}$, l'ouvert $\varphi^{-n}(U) \cap V$ est alors vide, ce qui contredit la transitivité. C'est le cas pour $n = 0$ car U et V sont disjoints, et c'est le cas pour $n > 0$ car $\varphi^{-n}(U)$ est vide.

Fixons $N \geqslant 0$, et posons $W = \varphi^{-N}(V)$, c'est un ouvert non-vide. La transitivité de φ implique l'existence d'un entier $k \geqslant 0$ tel que $\varphi^{-k}(W) \cap U$ est non vide, c'est à dire tel que $\varphi^{-N-k}(V) \cap U$ est non vide. ►

Proposition 6.7. *Supposons que X est un espace métrique séparable et ayant la propriété de Baire (par exemple un espace complet ou un espace localement compact). L'application continue $\varphi : X \longrightarrow X$ est transitive si et seulement si il existe un point x tel que $\omega(x) = X$ (en particulier, l'orbite de x est dense).*

Réciproquement, si il existe un point x tel que $\omega(x) = X$, alors le système est transitif.

La dynamique $\theta \mapsto 2\theta$ sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est transitive, mais n'a pas d'orbite dense. Tous ses points sont pré-périodiques.
◄ On considère une base dénombrable d'ouverts, U_i. On définit $V(k,i) := \cup_{n\geqslant k}\varphi^{-n}(U_i)$. C'est l'ensemble des points x pour lesquels il existe $n \geqslant k$ tel que $\varphi^n(x) \in U_i$. La propriété précédent implique que $V(k,i)$ est un ouvert dense. La propriété de Baire implique alors que l'intersection $G := \cap_{i,k}V(k,i)$ est dense. Soit x un point de G, et U un ouvert. Il existe alors i tel que $\bar{U}_i \subset U$. Il existe une suite strictement croissante n_k telle que $\varphi^{n_k}(x)$ est contenu dans U_i pour tout k. Les valeurs d'adhérence de cette suite sont des points de $\omega(x)$ contenus dans $\bar{U}_i$, donc dans U. L'ensemble $\omega(x)$ intersecte tous les ouverts, donc il est dense. ►

Exercice 6.2. *Supposons que X n'a pas de point isolé et que l'orbite positive de x_0 est dense. Montrer qu'alors $\omega(x_0) = X$. Le système est donc transitif.*

Exercice 6.3. *Soit φ un homéomorphisme de l'espace métrique compact X sans point isolé. Supposons qu'il existe une orbite $\{\varphi^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ qui est dense. Montrer qu'alors il existe une orbite positive $\{\varphi^n(y), n \in \mathbb{N}\}$ qui est dense. Donner un contre exemple si X a des points isolés (on pourra s'inspirer de la dynamique représentée par le premier dessin du chapitre 2).*

On étudie maintenant la dynamique engendrée par les isométries de X. Ces dynamiques ont de nombreux points communs avec les dynamiques des translations du tore. On commence par quelques propriétés générales sur les isométries.

Proposition 6.8. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue telle que $d(\varphi(x), \varphi(x')) \geqslant d(x, x')$ pour tout x, x' dans X. Alors, φ est un homéomorphisme isométrique.*

Ce résultat implique en particulier que toute isométrie est un homéomorphisme (lorsque X est un espace métrique compact).
◄ Montrons que φ est surjective. Pour tout $x_0 \in X$, on note D la distance $d(x_0, \varphi(X))$. On a donc $d(x_0, \varphi^k(x_0)) \geqslant D$ pour tout $k \geqslant 0$. En conséquence, $d(x_n, x_m) \geqslant D$ pour tous n et m dans $\mathbb{N}$, où $x_n := \varphi^n(x_0)$. Comme X est compact, la suite x_n a une valeur d'adhérence, ce qui implique que $D = 0$ et donc que $x_0 \in \varphi(X)$.

On considère alors l'inverse ψ de φ, et on conclut grâce au lemme suivant. ►

Lemme 6.9. *Soit $\psi : X \longrightarrow X$ une application 1-Lipschitz et surjective. Alors ψ est une isométrie.*

◄ Si ψ n'est pas une isométrie, il existe $\epsilon > 0$ et x, x' tels que $d(\psi(x), \psi(x')) \leqslant d(x, x') - 4\epsilon$. Soit N le cardinal de la plus petite partie ϵ-dense de X. et soit Y une partie ϵ-dense de cardinal N.

L'image $\psi(Y)$ d'une partie ϵ-dense Y est une partie ϵ-dense. En effet, tout point $x \in X$ est l'image d'un point z, il existe alors $y \in Y$ tel que $d(z, y) \leqslant \epsilon$. Comme φ est 1-Lipschitzienne, ceci implique que $d(x, \psi(y)) \leqslant d(z, y) \leqslant \epsilon$.

L'ensemble E des parties ϵ-denses est un compact de X^N, qui est positivement invariant par l'action diagonale Ψ de ψ sur X^N.

La fonction $F(Y) := \sum_{y\neq y'} d(y, y')$ est continue sur E, et elle vérifie $F\circ\Psi \leqslant F - 2\epsilon$. Ceci est une contradiction. ►

Proposition 6.10. *Le groupe $iso(X)$ des isométries de X, muni de la distance uniforme, est un groupe topologique compact.*

◄ L'ensemble $iso(X)$, défini comme l'ensemble des applications continues préservant la distance, est clairement fermé dans $C(X, X)$, donc compact par le théorème d'Ascoli.

On vérifie que $d(\varphi^{-1}, \psi^{-1}) = d(\varphi, \psi)$ pour tous $\varphi, \psi \in iso(X)$. De plus, on a

$$d(\psi\circ\varphi_1, \psi\circ\varphi_2) = d(\varphi_1, \varphi_2) = d(\varphi_1\circ\psi, \varphi_2\circ\psi),$$

ce qui implique que les opérations de groupe sont continues (les translations sont des isométries de $iso(X)$). ►

Exercice 6.4. *On dit que φ^t est un flot isométrique sur X si c'est un flot continu tel que φ^t est une isométrie pour tout x. Montrer que φ^t est un flot isométrique si et seulement si c'est un morphisme de groupe continu de $\mathbb{R}$ dans $iso(X)$.*

Avant de commencer l'étude des isométries (qui peuvent sembler une classe très restreinte de systèmes), on note que la possibilité de changer de distance permet d'étendre le champ de cette étude :

Proposition 6.11. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ un homéomorphisme. Supposons que les applications $\varphi^n, n \in \mathbb{Z}$ sont équicontinues. Alors il existe une distance D sur X, qui engendre la topologie de X, et pour laquelle φ est une isométrie.*

◄ On pose $D(x, y) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} d(\varphi^n(x), \varphi^n(y))$. Il est évident que φ est une isométrie pour D. L'équicontinuité des applications φ^n implique que D et d engendrent la même topologie. ►

Théorème 6.12. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une isométrie d'un espace métrique compact. Si φ est minimale, elle est uniquement ergodique.*

◄ Soit f une fonction continue sur X. Elle est uniformément continue. Comme φ est une isométrie, les fonctions $f\circ\varphi^k$ sont uniformément équicontinues, et uniformément bornées. il en est donc de même des fonctions $S^n f/n$. Par le théorème d'Ascoli, la suite $S^n f/n$ admet une valeur d'adhérence g, qui est la limite de $S^n f/n$ le long d'une sous-suite n_k. Montrons que g est invariante. On a

$$g\circ\varphi = \lim(f\circ\varphi + \cdots + f\circ\varphi^{n_k})/n_k = \lim(S^{n_k} f/n_k) + (f\circ\varphi^{n_k} - f)/n_k = g.$$

La minimalité implique alors que g est constante (les ensembles $g = a, a \in \mathbb{R}$ sont des fermés invariants, donc chacun est soit vide, soit X entier). Il reste à démontrer que $S^n f/n$ converge uniformément vers g. On considère la suite $M_n := \max_x S^n f(x)$. Comme $S^{n+m} f = S^n f + (S^m f)\circ\varphi^n$, on a $M_{n+m} \leqslant M_n + M_m$. Un lemme très classique (lemme sous-additif, voire par exemple wikipedia) affirme alors que M_n/n converge vers $M = \inf M_n/n$. De la même façon, la suite $m_n = \min S^n f$ est sur additive, donc converge vers $m = \sup m_n/n$. Pour $\epsilon > 0$ et k assez grand, on a $g - \epsilon \leqslant S^{n_k} f/n_k \leqslant g + \epsilon$, et donc

$$g - \epsilon \leqslant m_{n_k}/n_k \leqslant m \leqslant M \leqslant M_{n_k}/n_k \leqslant g + \epsilon.$$

On a donc $M = m = g$, c'est à dire que $S^n f/n$ converge uniformément vers g. ►

Addendum 6.13. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une isométrie. Alors il existe une projection continue P de $C(X, \mathbb{R})$ sur le sous-espace I des fonctions continues invariantes, telle que $S^n f/n \longrightarrow Pf$ uniformément pour tout $f \in C(X, \mathbb{R})$.*

La différence par rapport à l'énoncé précédent est que le sous-espace I ne se réduit pas forcément aux fonctions constantes.

◄ On montre comme ci-dessus que $S^n f/n$ admet une sous-suite qui tend uniformément vers une fonction continue invariante g. L'argument ci-dessus appliqué à la fonction $f - g$ montre alors que $S^n f/n \longrightarrow g$ uniformément. L'application linéaire $f \longmapsto g$ est clairement continue, à image dans I. ►

Propriété 6.14. *Si φ est une isométrie d'un espace métrique X, alors l'adhérence de chaque orbite positive est un ensemble invariant minimal.*

Ceci implique qu'on peut partitionner X en compacts invariants minimaux disjoints (qui sont les adhérences des orbites). L'étude de la dynamique des isométries se réduit donc pour l'essentiel à l'étude des dynamiques isométriques minimales.

◄ On considère la fermeture Y de l'orbite $O^+(z)$. C'est un ensemble compact positivement invariant, $\varphi(Y) \subset Y$. Comme φ est une isométrie, on a $\varphi(Y) = Y$. Soient x et y des points de Y et $B(y, \epsilon)$ une boule ouverte. On doit montrer que l'orbite $O^+(x)$ entre dans $B(y, \epsilon)$. Il existe un temps $i \in \mathbb{N}$ tels que $d(\varphi^i(z), x) < \epsilon/2$. Il existe alors $j \in \mathbb{N}$ tel que $d(\varphi^j(z), \varphi^{-i}(y)) \leqslant \epsilon/2$. On a alors

$$d(\varphi^j(x), y) \leqslant d(\varphi^j(x), \varphi^{i+j}(z)) + d(\varphi^{i+j}(z), y) = d(x, \varphi^i(z)) + d(\varphi^j(z), \varphi^{-i}(y) < \epsilon. \blacktriangleright$$

En fait, le passage au contexte plus général des isométries n'élargit pas énormément la classe des translations des tores étudiées au chapitre précédent.

Proposition 6.15. *Soit X un espace métrique compact et φ une isométrie minimale. Alors il existe un plongement topologique (une immersion continue) de X dans $iso(X)$ dont l'image est un sous groupe abélien, et qui conjugue φ à une translation.*

Autrement dit, il existe sur X une structure de groupe topologique Abélien (de topologie compatible avec la distance initiale) pour laquelle φ est une translation.

◄ On considère l'adhérence G, dans $iso(X)$, de la suite $\varphi^n, n \in \mathbb{Z}$. C'est un sous-groupe Abélien car les applications φ^n commutent entre elles. Fixons un point $x_0 \in X$. L'application $\psi : g \longmapsto g(x_0)$ est continue de G dans X. Son image contient l'orbite de x_0, qui est dense, et donc elle est surjective. Pour tout $g \in G$, on a $\psi(\varphi \circ g) = \varphi(g(x_0)) = \varphi(\psi(g))$, c'est à dire que ψ est une semi-conjugaison entre la translations de G donné par φ et φ vue comme application de X.

Montrons que ψ est injective. On considère pour ceci une isométrie $\phi \in G$ telle que $\phi(x_0) = x_0$, et on montre que ϕ est l'identité. Comme $\phi \in G$, il existe une suite t_n de temps telle que $\varphi^{t_n} \longrightarrow \phi$ uniformément. On a donc $\varphi^{t_n}(x_0) \longrightarrow x_0$. Pour tout $x \in X$, il existe une suite s_n telle que $\varphi^{s_n}(x_0) \longrightarrow x$.

$$\begin{aligned} d(\phi(x), x) &\leqslant d(\phi(x), \varphi^{t_n}(x)) + d(\varphi^{t_n}(x), \varphi^{t_n+s_n}(x_0)) + d(\varphi^{s_n+t_n}(x_0)), \varphi^{s_n}(x_0)) + d(\varphi^{s_n}(x_0), x) \\ &\leqslant d(\phi(x), \varphi^{t_n}(x)) + d(x, \varphi^{s_n}(x_0)) + d(\varphi^{t_n}(x_0), x_0) + d(\varphi^{s_n}(x_0), x) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

donc $\phi(x) = x$. Ceci montre l'injectivité de ψ, qui est donc un homéomorphisme. ►

Réciproquement, tout groupe topologique métrisable compact admet une distance invariante par translation, donnée par exemple par $D(g, g') = \sup_{h \in G} d(g + h, g' + h)$. Donc il y a une parfaite correspondance entre les dynamique des translations minimales des groupes Abéliens compacts et les dynamiques des isométries minimales des espaces métriques compacts. On peut aller plus loin dans la description des isométries :

Théorème 6.16. *Soit X un espace métrique, et φ une isométrie minimale.*

Alors il existe un vecteur fréquence $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et un plongement topologique $j : X \longrightarrow \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, dont l'image est un sous-groupe, et tel que $j \circ \varphi = j + \omega$.

Ce théorème est essentiellement un résultat sur les groupes topologiques. On peut en effet supposer au vu de la proposition précédente que X est un groupe topologique abélien et φ une translation. Le théorème ci-dessus est donc une conséquence immédiate de :

Théorème 6.17. *Soit G un groupe topologique Abélien métrisable compact. Alors il existe un morphisme de groupe continu et injectif $j : G \longrightarrow \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$.*

On considère l'ensemble C des morphismes continus de G dans $\mathbb{T}$. Il est aussi muni d'une structure de groupe abélien (l'addition ponctuelle), c'est le groupe dual de G pour la théorie de Pontryagin (mais nous ne supposons pas cette théorie connue du lecteur). Les éléments de C sont aussi appelés caractères de G.

Lemme 6.18. *Si G est métrisable, le groupe C est dénombrable.*

◄ Nous munissons C de la topologie de la convergence uniforme. C'est alors un espace métrique séparable, comme sous-ensemble de $C(G, \mathbb{T})$ qui est séparable. Montrons que C est discret, c'est à dire que chacun de ses éléments est isolé. Au vu de la structure de groupe, il suffit de montrer que le caractère nul $\gamma \equiv 0$ est isolé.

L'image d'un caractère γ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$. Un tel sous groupe n'est contenu dans un petit voisinage de 0 que si il est égal à $\{0\}$. Les caractères uniformément proches de 0 sont donc nuls. ►

Le résultat essentiel est le suivant. Il admet des extensions, d'un coté, à tous les groupes topologiques compacts (le Théorème de Peter Weyl), et de l'autre à tous les groupes Abéliens localement compacts (Dualité de Pontryagin).

Théorème 6.19. *Si G est un groupe abélien compact, les éléments de C séparent les points de G.*

◄ Théorème 6.17 : Il suffit de considérer le morphisme continu $j : G \longrightarrow \mathbb{T}^C = \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ dont les coordonnées sont les caractères de G. L'injectivité de ce morphisme est précisément le Théorème 6.19. ►

Il nous reste à démontrer le théorème 6.19. Rappelons pour commencer que G est muni d'une distance invariante par translation d (on peut l'obtenir à partir de n'importe quelle distance δ par l'expression $d(g, g') = \max_{h \in G} \delta(g + h, g' + h)$). On peut aussi supposer que d est invariante par symétrie : $d(g, g') = d(-g, -g')$.

Propriété 6.20. *G est muni d'une unique mesure de probabilité Borélienne invariante par translations. On l'appelle mesure de Haar. Cette mesure est aussi invariante par la symétrie $g \longmapsto -g$.*

◄ On considère l'espace de Banach $B = C(X, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme, et une suite g_i dense dans G. On note aussi g_i les translations de G définies par les éléments g_i, ce sont des isométries. Notons I_i le sous-espace fermé des fonctions invariantes par g_i. Comme le suite g_i est dense, $\cap_i I_i$ est la droite des fonctions constantes. Par l'addendum 6.13, il existe des projections continues P_i de B sur I_i. De plus, comme les translations par g_i commutent entre elles, il en est de même des projections P_i, puisque $P_i f = \lim(f \circ g_i + \cdots + f \circ g_i^n)/n$. Remarquons finalement que si ρ est un module de continuité de f, alors c'est aussi un module de continuité de $P_i f$ (car g_i est une isométrie). On définit, pour toute fonction f la suite $f_i = P_i \circ P_{i-1} \circ \cdots \circ P_1 f$. Cette suite est équicontinue et equibornée et elle admet donc une valeur d'adhérence c, qui appartient à $\cap_i I_i$ et donc qui est constante. On montre comme dans la preuve de la proposition **??** que la suite f_i converge uniformément vers c. L'application $f \mapsto c(f)$ est alors une forme linéaire positive sur B, et $c(1) = 1$. Il existe donc une mesure de probabilité μ sur G telle que $c(f) = \int f d\mu$. POur toute fonctions continue f et tout i, on a

$$P_i \circ P_{i-1} \circ \cdots \circ P_1(f \circ g_i) = (P_i \circ P_{i-1} \circ \cdots \circ P_1 f) \circ g_i = P_i \circ P_{i-1} \circ \cdots \circ P_1 f.$$

La mesure μ est donc invariante par toutes les translations g_i et donc par toutes les translations.

Si η est une autre mesure de probabilité invariante, alors pour toute fonction continue f on a

$$\int\int f(x+g)d\eta(x)d\mu(g) = \int\int f(x)d\eta(x)d\mu(g) = \int f(x)d\eta(x)$$
$$\int\int f(x+g)d\mu(g)d\eta(x)) = \int\int f(g)d\mu(g)d\eta(x) = \int f(g)d\mu(g),$$

donc $\int f d\mu = \int f d\eta$. Comme cette égalité est satisfaite pour toute fonction continue, on conclut que $f = g$.

Finalement, si μ^- est l'image directe de μ par la symétrie $g \mapsto -g$, alors μ^- est une mesure de probabilité invariante par translations, donc elle est égale à μ. ►

On considère une fonctions continue $\theta : [0, \infty[\longrightarrow [0, 1]$ supportée sur $[0, 1]$. On considère alors la suite de fonctions continues

$$\chi_n(g) = a_n \theta(nd(0, g))$$

où la suite a_n est choisie de sorte que $\int f_n d\mu = 1$. On définit sur G la convolution des fonctions par

$$\xi * \zeta(g) := \int \xi(h)\zeta(g-h)d\mu(h) = \int \zeta(h)\xi(g-h)d\mu(h).$$

L'égalité découle de l'invariance de μ par l'application $h \mapsto g - h$.

Lemme 6.21. *Si ζ est une fonction continue, alors $\chi_n * \zeta \longrightarrow \zeta$ uniformément.*

◄ Si ρ est un module de continuité de ζ, on vérifie que $|\chi_n * \zeta - \zeta| \leqslant \rho(1/n)$. ►

Lemme 6.22. *Pour chaque n fixé, les fonctions $\chi_n * \zeta$, $\|\zeta\|_{L^1} \leqslant 1$ sont uniformément équicontinues.*

◄ Soit ρ_n un module de continuité de χ_n. L'expression $\chi_n * \zeta = \int \zeta(h)\chi_n(g-h)d\mu(h)$ implique que $\chi_n * \zeta$ est une fonction continue de module $\|\zeta\|_{L^1}\rho_n$. ►

Soit H l'espace de Hilbert $L^2(G, \mu)$.

Lemme 6.23. *L'application linéaire $R_n : \zeta \mapsto \chi_n * \zeta$ est continue, compacte et symétrique de H dans H.*

◄ La continuité est facile. Montrons la symétrie. On utilise dans le calcul ci-dessous que $\chi_n(-g) = \chi_n(g)$:

$$\begin{aligned}\int (R_n\zeta)(g)\xi(g)d\mu(g) &= \int\int \zeta(h)\chi_n(g-h)\xi(g)d\mu(h)d\mu(g) \\ &= \int\int \zeta(h)\chi_n(h-g)\xi(g)d\mu(g)d\mu(h) = \int (R_n\xi)(h)\zeta(h)d\mu(h).\end{aligned}$$

Il reste à montrer que R_n est un opérateur compact, c'est à dire que l'image de la boule unité est relativement compacte. Comme $\|\zeta\|_{L^1} \leqslant 1$ sur la boule unité de H, on déduit que l'image de la boule unité par R_n est uniformément équicontinue. Elle est aussi équibornée, donc relativement compacte en topologie uniforme, donc relativement compacte en topologie L^2. ►

◄ Théorème 6.19 : Fixons un point non nul $g_0 \in G$. On veut trouver un caractère γ tel que $\gamma(g_0) \neq 0$. Il existe une fonction continue ζ qui vérifie $\zeta(0) \neq \zeta(g_0)$. Au vu du premier lemme, il existe donc n tel que $\chi_n * \zeta(g_0) \neq \chi_n * \zeta(0)$. Autrement dit, il existe n tel que l'image de R_n contient une fonction qui sépare g_0 de 0.

Le théorème spectral des opérateurs symétriques compacts nous dit que les espaces propres de R_n associés aux valeurs propres réelle non nulles sont de dimension finie et engendrent un sous-espace dense dans l'image de R_n. Il existe donc une valeur propre non nulle λ, tel que l'espace propre associé $E \subset H$ est de dimension finie et contient une fonction qui sépare g_0 et 0. Comme E est contenu dans l'image de R_n, il est en particulier constitué de fonctions continues. L'espace E est muni d'une structure Euclidienne obtenue par restriction de celle de H.

Chaque translation $T_g : f \mapsto f \circ g$ commute avec R_n, et donc préserve l'espace propre E. La restriction U_g de T_g à E est une isométrie linéaire. L'application $g \mapsto U_g$ est un morphisme de groupe continu de G dans $O(E)$, le groupe orthogonal de E. Comme le groupe G est commutatif, les applications U_g commutent entre elles. Elles sont donc simultanément diagonalisables dans $\mathbb{C}$, avec des valeurs propres complexes $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_d(g)$ de module 1, où d est la dimension (réelle) de E. Comme $g \mapsto U_g$ est un morphisme de groupe continu, les applications $\lambda_i(g)$ sont des morphismes de groupe continus de G dans $\mathbb{S}$, le groupe multiplicatif des complexes de module 1. L'un des morphismes λ_i vérifie $\lambda_i(g_0) \neq 1$, sinon U_{g_0} serait l'identité. Comme $\mathbb{S} \approx \mathbb{T}$, on a bien trouvé un morphisme continu de G dans $\mathbb{T}$ qui est non-nul en g_0. ►

Complément : Système minimal non uniquement ergodique

On donne ici une variante simple d'un exemple de Furstenberg donnant un homéomorphisme minimal non uniquement ergodique. L'exemple initial de Furstenberg est plus régulier (il est même analytique), c'est en ceci que la construction ci-dessous est légèrement simplifiée.

Nous aurons besoin du préliminaire suivant. Soit $\psi : X \longrightarrow X$ une application minimale et $a : X \longrightarrow \mathbb{T}$ une application continue. Considérons l'application fibrée

$$\varphi : X \times \mathbb{T} \ni (x, \theta) \longmapsto (\psi(x), \theta + a(x)) \in X \times \mathbb{T}.$$

Lemme 6.24. *Ou bien l'application φ est minimale, ou bien il existe $k \in \mathbb{N}$ et une fonction continue $f : X \longmapsto \mathbb{T}$ telle que le graphe de f est invariant par l'application $(x, \theta) \longmapsto (\psi(x), \theta + ka(x)$, c'est à dire telle que $f(\psi(x)) = f(x) + ka(x)$ pour tout x.*

En particulier, si a est une constante, l'application f réalise une semi conjugaison entre l'application φ et la translation $\theta \longmapsto \theta + ka$.
◄ Soit $Y \subsetneq X \times \mathbb{T}$ un compact invariant non vide. La projection de Y sur X est un compact invariant non vide de X, donc c'est X. Notons τ_z l'application $\mathbb{T} \ni \theta \longmapsto \theta + z \in \mathbb{T}$, et aussi l'application $X \times \mathbb{T} \ni (x, \theta) \longmapsto (x, \theta + z) \in X \times \mathbb{T}$. On remarque que les applications τ_z commutent avec φ. Pour tout $z \in \mathbb{T}$, l'ensembles $\tau_z(K)$ est un compact invariant, et donc $\tau_z(K) \cap K$ est soit vide soit égal à K. On note S l'ensemble des éléments $z \in \mathbb{T}$ tels que $\tau_z(K) = K$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}$. Comme $Y \neq X \times \mathbb{T}$, $S \neq \mathbb{T}$, donc il existe un entier k tel que $S = \mathbb{Z}/k \mod 1$. Si $k = 1$, alors Y contient un point par fibre $\{x\} \times \mathbb{T}$, c'est donc le graphe d'une fonction de $f : X \longrightarrow \mathbb{T}$. La fermeture de Y implique que cette fonction est continue. En général, l'image de Y par le revêtement $X \times \mathbb{T} \ni (x, \theta) \longmapsto (x, k\theta) \in X \times \mathbb{T}$ est aussi un compact qui contient un point et un seul par fibre, et qui est donc le graphe d'une fonction continue $f : X \longmapsto \mathbb{T}$. On a donc pour cette fonction $f(\psi(x)) = f(x) + ka(x)$. ►

L'exemple sera de la forme

$$\varphi : \mathbb{T}^2 \ni (x, \theta) \longmapsto (x + \alpha, \theta + A(x)) \in \mathbb{T}^2$$

avec α irrationnel et $A : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Toute application φ de cette forme est un homéomorphisme qui préserve la mesure de Lebesgue. En effet, par Fubini,

$$\int f \circ \varphi d\lambda = \int \int f(x + \alpha, \theta + A(x)) d\theta dx = \int \int f(x + \alpha, \theta) d\theta dx = \int f(x, \theta) d\theta dx.$$

On considère un suite strictement croissante q_n d'entiers tels que $|e^{2i\pi q_n \alpha} - 1| \leqslant 2^{-n}$. Une telle suite existe car la suite $z_k := e^{2i\pi k\alpha}$ est dans dans le cercle unité (α est irrationnel). On pose alors, formellement,

$$G(x) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} e^{2i\pi q_n x},$$

puis

$$A(x) := G(x + \alpha) - G(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{2i\pi q_n \alpha} - 1}{n} e^{2i\pi q_n x}.$$

La série définissant A est uniformément convergente, la fonction A est donc continue, et elle est de moyenne nulle sur $\mathbb{T}$.

La série définissant G converge dans L^2, et nous permet donc de définir G comme une fonction L^2. On remarque, formellement, que $G(0) = \sum_{n \geqslant 1} 1/n$ diverge vers $+\infty$. Ceci implique que la fonction G n'est pas continue. En effet, si la fonction G était continue, alors le théorème de Fejer donnerait la convergence de Césaro uniforme des sommes de Fourier partielles de G vers la fonction G. Ceci est en contradiction avec le fait que les sommes de Fourier partielles de G au point 0 divergent vers $+\infty$ (car il en est alors de même de leur moyenne de Cesaro).

Proposition 6.25. *L'application φ est minimale.*

◄ Sinon, il existerait un entier k et une fonction continue $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$ telle que $f(x + \alpha) = f(x) + kA(x)$ pour tout x. La fonction f est alors de la forme $f(x) = F(x) + lx \mod 1$, où $F : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et l est un entier. On a

$$F(x + \alpha) - F(x) = kA(x) - l\alpha.$$

En prenant la moyenne sur $\mathbb{T}$, on voit que $l\alpha = 0$, donc

$$F(x + \alpha) - F(x) = kA(x).$$

Cette égalité permet d'exprimer les coefficients de Fourier non nuls de la fonction F en fonction de ceux de la fonction A :

$$\hat{F}(m) = \frac{k}{e^{2i\pi m\alpha} - 1}\hat{A}(m).$$

La série de Fourier de $\hat{F}$ est donc la même, au terme constant près, que celle de kG. Ceci implique que $F-kG$ est constante, et donc que F n'est pas continue, une contradiction. ►

Proposition 6.26. *L'application φ n'est pas uniquement ergodique.*

◄ Nous avons vu que la mesure de lebesgue bidimensionnelle λ est invariante par φ. Nous allons montrer l'existence d'une autre probabilité invariante, ce qui montre que φ n'est pas uniquement ergodique.

Ceci découle de l'existence de la fonction mesurable G telle que $G(x+\alpha) - G(x) = A(x)$ presque partout. On pose alors $g = G \mod 1 : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T}$, de sorte que $g(x+\alpha) - g(x) = a(x)$ presque partout, où $a = A \mod 1$. Considérons l'application mesurable $h : x \mapsto (x, g(x))$. L'image directe μ de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{T}$ par cette application est invariante par φ. En effet

$$\int f\circ\varphi d\mu = \int f(x+\alpha, g(x)+a(x))dx = \int f(x+\alpha, g(x+\alpha))dx = \int f(x, g(x))dx = \int f d\mu.$$

La mesure de probabilité μ est différente de la mesure de Lebesgue bidimensionnelle sur $\mathbb{T}^2$, l'application φ n'est donc pas uniquement ergodique. ►

Complément : Fonctions presque périodiques

Pendant des siècles, l'observation des mouvements des planètes a été au centre des préoccupations scientifiques. Ces mouvements sont régis par des phénomènes essentiellement périodiques. Le jour, l'année les périodes de rotations des planètes, etc.. Si Y est un espace métrique, on dit que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ est quasi-périodique si elle est régie par une nombre fini de périodes, c'est à dire si il existe un tore $\mathbb{T}^d$ de dimension finie, une collection de fréquences $\omega \in \mathbb{R}^d$ et une application $g : \mathbb{T}^d \longrightarrow Y$ telle que $f(t) = g(t\omega)$. Le cas $d = 1$ est celui des fonctions périodiques. Même si de très bonnes approximations quasipériodiques du mouvement des planètes ont été obtenues dès l'antiquité, il n'y a pas lieu de penser que le mouvement des planètes soit régi exactement par un nombre fini de périodes. En effet, les trajectoires des planètes ne sont périodiques qu'en première approximation. Il y a des phénomènes séculaires, causés par les interactions gravitationnelles entre les planètes, de déformation lente des orbites. Ces phénomènes sont eux-même périodiques (de période beaucoup plus longue) en première approximation, mais on ne peut raffiner la description des mouvement observés qu'en ajoutant des périodes, et ce indéfiniment. On modélise ceci par les courbes presque périodiques. La courbe $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ est dite presque périodique si il existe un vecteur $\omega \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ et une fonction continue $g : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \longrightarrow Y$ telle que $f(t) = g(t\omega)$. On parle en particulier de fonction presque périodique lorsque $Y = \mathbb{R}$. La définition de presque périodicité s'attache à formaliser un certain type de description des trajectoires des planètes utilisé dans l'histoire. Nous n'affirmons pas ici que les trajectoires des planètes sont effectivement presque périodiques. Cette définition (qui n'est pas la plus classique) rend évidentes un certain nombre de propriétés classiques des fonctions presque périodiques.

Propriété 6.27. *Les fonctions presque périodiques sont bornées et uniformément continues. L'espace des fonctions presque périodiques est une algèbre (c'est à dire un sous-espace vectoriel stable par multiplication) fermée de l'espace $BC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues bornées, muni de la norme uniforme. Le même résultat est aussi valable pour les fonctions presque périodiques à valeurs complexes.*

◄ Si $f = g(t\omega)$ et $f' = g'(t\omega')$ sont des fonctions presque périodiques, alors la courbe (f, f') est presque périodique. En effet elle s'écrit $(f, f') = h(tw)$, avec $w := (\omega, \omega') \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et

$$h : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} = \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \ni (\theta, \theta') \longmapsto (f(\theta)), f'(\theta')) \in \mathbb{R}^2.$$

On déduite que toute fonction de la forme $\chi \circ (f, f')$, où $\chi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue est presque périodique. Les fonctions presque périodiques forment donc une algèbre.

Soit $f_1, f_2, \dots$ une suite de fonctions presque périodiques qui converge uniformément vers une limite f. Si chacune des fonctions f_i se factorise par la courbe $t\omega_i$, $\omega_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors toutes les fonctions f se factorisent par la courbe tw avec $w = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il existe donc des fonctions continues $g_i : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f_i(t) = g_i(tw)$. Soit G la fermeture de la courbe tw dans $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Comme la suite de fonctions f_i est de Cauchy pour la norme uniforme, la suite des fonctions g_i est de de Cauchy dans $C(G, \mathbb{R})$, donc elle converge vers une limite continue $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction g se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ par le théorème d'extension de Tietze (on rappelle que $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ est un espace métrique). On appelle encore g cette extension. On a alors $f = g(tw)$, donc f est presque périodique. ►

La démonstration ci-dessus pose une question naturelle. Pour chaque fonction presque périodique, il existe un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que f se factorise par la courbe $\mathbb{R} \ni t \longmapsto t\omega \in \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$. Cependant, le vecteur ω dépend de la fonction f. Peut-on trouver une courbe universelle qui factorise toutes les fonctions presque périodiques ? La réponse est positive, en voici une construction. On considère $\Omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, le vecteur tel que $\Omega(a) = a$, et on considère la courbe $\mathbb{R} \ni t \longmapsto t\Omega \in \mathbb{T}^{\mathbb{R}}$. Le produit $\mathbb{T}^{\mathbb{R}}$ est un groupe topologique compact, mais non métrisable. Toute fonction presque périodique se factorise par la courbe ci-dessus. En effet, pour tout $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, il existe une application continue $P : \mathbb{T}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ telle que $P(t\Omega) = t\omega$. La fermeture B de la courbe $t\Omega$ dans $\mathbb{T}^{\mathbb{R}}$ est appelée groupe de Bohr (ou compactifié de Bohr de la droite réelle). C'est un groupe Abélien compact (mais non métrisable), muni d'un morphisme de groupe continu $\Omega(t) : \mathbb{R} \longrightarrow B$ d'image dense.

Exercice 6.5. *Montrer que le groupe B et le morphisme continu $\Omega : \mathbb{R} \longrightarrow B$ sont caractérisés par la propriété universelle suivante : Tout morphisme de groupe $f : \mathbb{R} \longrightarrow G$ dans un groupe Abélien compact G se factorise par Ω.*

On admettra pour ceci l'extension suivante du théorème 6.17 : Si G est un groupe Abélien compact, alors il existe un ensemble Z et un morphisme continu injectif $j : G \longrightarrow \mathbb{T}^Z$.

Les fonctions presque périodiques admettent une valeur moyenne :

Propriété 6.28. *Soit $f(t) = g(\omega t)$ une fonction presque périodique. Il existe alors un réel $\int f$ tel que*

$$\frac{1}{2t} \int_{t_0 - t}^{t_0 + t} f(s)ds \longrightarrow \int f$$

uniformément par rapport à t_0.

◄ Soit K l'adhérence dans $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ de l'orbite $t\omega$. Comme le flot est isométrique, sa restriction à K est uniquement ergodique. La valeur moyenne de f est alors l'intégrale de g par rapport à l'unique mesure de probabilité invariante du flot $x + t\omega$ sur K. ►

Si $f(t) = g(\omega t)$ avec ω non résonnant, alors $\int f = \int g d\theta$, puisque l'unique mesure invariante est la mesure de Haar $d\theta$. Contrairement à ce que pourrait laisser croire le cas des fonctions quasi-périodiques, on ne peut pas forcément représenter la fonction presque périodique f à l'aide d'un vecteur non-résonnant. On a toutefois :

Propriété 6.29. *Toute fonction presque périodique f peut être représentée de la forme $f = g(\omega t)$ avec un vecteur $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui a la propriété suivante : Il existe un vecteur non résonnant $\tilde{\omega}$ (avec un nombre fini ou infini de coordonnées) tel que chaque composante de ω est un multiple rationnel d'une composante de $\tilde{\omega}$.*

◄ On écrit $f = g(\alpha t)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'ayant pas deux coordonnées égales. On note par le même symbole un vecteur et l'ensemble de ses coordonnées (qui est donc une partie de $\mathbb{R}$), tous les vecteurs que l'on considère ici n'ont pas deux coordonnées égales. On considère une partie $\tilde{\omega} \subset \alpha$ qui est libre sur $\mathbb{Q}$ (c'est à dire non résonnante) et telle que le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $\tilde{\omega}$ contient α. On considère un vecteur ω dont les coordonnées sont les multiples rationnels des coordonnées de $\tilde{\alpha}$. A priori, ce n'est pas nécessairement le cas des coordonnées de α, mais nous allons montrer que la fonction f peut être représentée avec le vecteur ω. Les fonctions quasi-périodiques $f_d(t) = f(t\alpha_1, \ldots, t\alpha_d, 0, 0, \ldots)$ convergent uniformément vers f. Il suffit donc de constater que chacune de ces fonctions peut être représentée avec le vecteur ω. Ceci découle de notre étude des fonctions quasi-périodiques, puisque le groupe engendré par les coefficients de $\tilde{\omega}$, qui est exactement le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par ces coefficients, contient les coordonnées de α. ►

Propriété 6.30 (Théorème de Bohr)**.** *Dans $BC(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'espace P des fonctions presque périodiques est la fermeture de l'espace vectoriel T engendré par les fonctions $t \mapsto e^{2i\pi tp}$, $p \in \mathbb{R}$.*

Si ce théorème devient ici une simple propriété, c'est que nous avons adopté une définition qui le rend facile. Le vrai théorème consiste à montrer que notre définition est équivalente aux définitions classiques, ce que nous ferons ensuite.
◄ Soit Q l'espace vectoriel des fonctions quasi-périodiques, c'est à dire des fonctions de la forme $f = g(t\omega)$ avec $\omega \in \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$.

Montrons d'abord que Q est dense dans P. Si f est une fonction presque périodique, $f = g(t\omega)$ avec $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\omega^d = (\omega_1, \ldots, \omega_d, 0, 0, \ldots)$ et on Considère la projection $P^d : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{T}^d$ sur les premiers facteurs. Le diamètre de ses fibres tend vers 0 uniformément. Ceci implique que la distance (dans $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$) $d(t\omega^d, t\omega)$ tend vers 0 lorsque d tend vers l'infini, uniformément en t. La suite $g(t\omega^d)$ de fonctions quasi périodiques tend donc uniformément vers la fonction $f = g(t\omega)$.

Il nous reste à démontrer que T est dense dans Q. Ceci découle du fait que, pour chaque n fixé, les polynômes trigonométriques sur $\mathbb{T}^n$ sont uniformément denses dans les fonctions continues. Ils constituent en effet une algèbre de fonctions stable par conjugaison et qui sépare les points. La densité découle donc du théorème de Stone Weierstrass. ►

Revenons maintenant à des définitions a priori plus faibles des fonctions presque périodiques. Le résultat suivant est le point difficile du théorème de Bohr, nous le réduisons à notre étude précédente des isométries.

Théorème 6.31. *La courbe $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ est presque périodique si et seulement si il existe un espace métrique compact X, un flot isométrique minimal φ^t sur X, un point $x_0 \in X$, et une fonction continue $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = g(\varphi^t(x_0))$.*

◄ Si f est presque périodique, elle s'écrit $f(t) = g(t\omega)$. On note alors X l'adhérence de $\mathbb{R}\omega$ dans $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, et $\varphi^t(x) = x + t\omega$. C'est un flot isométrique minimal, et $f(t) = g(\varphi^t(0))$.

La réciproque découle du Théorème 6.16. ►

On note $BC(\mathbb{R}, Y)$ l'espace des courbes continues et bornées, muni de la distance uniforme, et $BUC(\mathbb{R}, Y) \subset BC(\mathbb{R}, Y)$ l'espace des courbes uniformément continues bornées.

Corollaire 6.32. *Soit Y un espace métrique. La courbe $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ est presque périodique si et seulement si f est bornée et si l'espace des translatées $f(\cdot + s)$, $s \in \mathbb{R}$ est relativement compacte dans $BC(\mathbb{R}, Y)$ pour la distance uniforme.*

◄ Supposons que l'ensemble des fonctions $f(\cdot + T)$ est relativement compacte. Il en est alors de même de la restriction de ces fonctions au compact $[-1, 2]$ (car l'application $f \mapsto f_{|[-1,2]}$ est continue). Par la réciproque du théorème d'Ascoli, ceci implique que les fonctions $f(\cdot + n)$, $n \in \mathbb{Z}$ sont uniformément équicontinues sur $[-1, 2]$, et donc que la fonction f est uniformément continue.

On définit sur $BUC(\mathbb{R}, Y)$ (espace des fonctions uniformément continues bornées, muni de la distance uniforme) le flot isométrique $\tau_s f$ par $\tau_s f := f(\cdot + s)$ et l'application continue $g : BUC(\mathbb{R}, Y) \longrightarrow Y$ par $g(f) := f(0)$. Si l'adhérence X de l'orbite $\{\tau_s f, s \in \mathbb{R}\}$ est compacte, alors par la propriété 6.14 le flot isométrique τ en restriction à X est minimal. Les conditions du théorème précédent sont satisfaites, donc f est presque périodique.

Réciproquement, si f est presque périodique, alors elle s'écrit $f(t) = h(t\omega)$, avec $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $h \in C(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}, Y)$. L'application $\theta \mapsto h(\cdot + \theta)$ est continue de $\mathbb{T}^N$ dans $C(\mathbb{T}^{\mathbb{N}}, Y)$, son image X est donc compacte. L'application

$$X \ni \xi \mapsto (t \mapsto \xi(t\omega)) \in BC(\mathbb{R}, Y)$$

est continue, son image est donc un compact de $BC(\mathbb{R}, Y)$ qui contient les translatées de f. ►

Définition 6.33. *On appelle flot isométrique canonique associé à la fonction presque périodique f le flot de translations sur l'adhérence X des translatées de f dans l'espace $BUC(\mathbb{R}, Y)$.*

Corollaire 6.34. *Si f est presque périodique, alors elle satisfait la propriété AP suivante :*

Pour toute $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que tout intervalle de longueur T contient un réel s pour lequel $d(\tau_s f, f) < \epsilon$.

◄ Cette propriété découle de la minimalité du flot isométrique $\tau_s : f \mapsto f(\cdot + s)$ sur la fermeture X de l'orbite de f dans $BC(\mathbb{R}, Y)$, au vu de la proposition 6.3 (adaptée au cas du temps continu). ►

On arrive ainsi à la caractérisation classique des fonctions presque périodiques :

Proposition 6.35. *Si Y est un espace métrique complet, une courbe $f : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ est presque périodique si et seulement si elle vérifie la propriété AP du corollaire ci-dessus.*

◄ On remarque pour commencer que :

L'image d'une courbe continue f vérifiant la propriété AP est relativement compacte dans Y.

Comme Y est complet, il suffit de montrer que cette image est précompacte, c'est à dire peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ϵ pour tout $\epsilon > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$, on considère le T donné par la propriété P. Le compact $f([0, T])$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ϵ, il existe donc un ensemble fini $C \in f([0, T])$ tel que les boules de rayon ϵ centrées sur C recouvrent $f([0, T])$. Montrons que les boules de rayon 2ϵ centrées en C recouvrent $f(\mathbb{R})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe une ϵ-période $s \in [t - T, T]$. Alors, $t - s \in [0, T]$ et $d(f(t - s), f(t)) < \epsilon$. Ceci implique que $d(f(t), C) \leqslant d(f(t), f(t - s)) + d(f(t - s), C) < 2\epsilon$.

Nous avons besoins d'un second résultat intermédiaire :

Toute courbe continue vérifiant la propriété AP est uniformément continue. Sinon, il existe deux suites t_n et t'_n telles que $|t'_n - t_n| \longrightarrow 0$ et telles que $d(f(t_n), f(t'_n) \geqslant 3\epsilon$, avec $\epsilon > 0$. En translatant par des ϵ-périodes, on trouve des suites bornée s_n, s'_n telles que $|s'_n - s_n| \longrightarrow 0$ et $d(f(s_n), f(s'_n)) \geqslant \epsilon$. Ceci contredit la continuité de f.

Terminons maintenant la démonstration. La courbe $s \mapsto f(\cdot + s)$ est continue sur l'espace métrique complet $BUC(\mathbb{R}, Y)$, et elle vérifie la propriété AP. Son image est donc relativement compacte. ►

Fréquences. Si f est une fonction presque périodique, alors la fonction $f(t)e^{2i\pi\alpha t}$ est presque périodique pour tout α. Elle admet donc une valeur moyenne, ce qui permet de définir le coefficient de Fourier

$$\hat{f}(\alpha) := \int f(t)e^{-2i\pi\alpha t}.$$

On dit que α est une fréquence de f si $\hat{f}(\alpha) \neq 0$.

Proposition 6.36. *Soit $f(t) = g(\omega t), \omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une fonction presque périodique. Les fréquences de f sont contenus dans le groupe $\langle\omega\rangle \subset \mathbb{R}$ engendré par les composantes de ω. Elles sont donc dénombrable.*

◄ La suite de fonctions quasipériodiques $f_n(t) := g_n(t\omega_1, \ldots, t\omega_n, 0, 0, \ldots)$ converge uniformément vers f.

Nous avons vu que les fréquences des fonctions f_n sont contenues dans le groupe engendré par $\omega_1, \ldots, \omega_n$, donc dans $\langle\omega\rangle$. Comme $\hat{f}_n(\alpha) \longrightarrow \hat{f}(\alpha)$ pour tout α on conclut que les fréquences de f sont contenues dans $\langle\omega\rangle$, c'est à dire que $\hat{f}(\alpha) = 0$ pour $\alpha \notin \langle\omega\rangle$. ►

Réciproquement, on a :

Proposition 6.37. *Soit f une fonction presque périodique, et soit $\alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un vecteur dont les coordonnées engendrent additivement les fréquences de f. Alors il existe une fonction continue $h : \mathbb{T}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(t) = h(\alpha t)$.*

◄ Cet énoncé découle du Lemme suivant. En effet, chacun des polynômes approchant f est représentable par la fréquence α, il en est donc de même de la limite f. ►

Lemme 6.38. *Si f est presque périodique, elle est limite uniforme de polynômes trigonométriques dont les fréquences sont des fréquences de f.*

◄ On note $F_n(\theta) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ le noyau de Fejer

$$F_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{2i\pi k\theta} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)\pi\theta)}{\sin(\pi\theta)} \right)^2 .$$

C'est une approximation de l'identité, c'est à dire que $\int F_n d\theta = 1$, $F_n \geqslant 0$, et pour tout fermé $A \subset \mathbb{T}$ disjoint de 0 on a $\int_A F_n \longrightarrow 0$. On considère la version multi dimensionnelle $F_n^d(\theta_1, \dots, \theta_d) = F_n(\theta_1) \dots F_n(\theta_d)$. Les fonctions F_n^d sont des polynômes trigonométriques sur $\mathbb{T}^d$.

Lorsque g est une fonction sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$, on note g_d a la fois la fonction sur $\mathbb{T}^d$ donnée par $g_d(\theta_1, \dots, \theta_d) = g(\theta_1, \dots, \theta_d, 0, 0, \dots)$, et la fonction sur $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ donnée par $g_d(\theta) = g(\theta_1, \dots, \theta_d, 0, 0, \dots)$.

Soit $f(t) = g(\omega t)$ une fonction presque périodique. Fixons $\epsilon > 0$, et d tel que $|g - g_d| \leqslant \epsilon/3$ uniformément. Posons $\omega^d = (\omega_1, \dots, \omega_d)$, et soient $a_1, \dots, a_k$ une base du groupe engendré par $\omega_1, \dots, \omega_d$. Il existe donc une matrice entière A de taille $d \times k$ telle que $\omega^d = Aa$, et le vecteur $a := (a_1, \dots, a_k)$ est non résonnant. On pose $\tilde{g}(\theta_1, \dots, \theta_k, \xi) = g(A(\theta_1, \dots, \theta_k), \xi)$, de sorte que $f(t) = \tilde{g}(\tilde{\omega}t)$, où $\tilde{\omega}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ obtenu en remplaçant les d premières coordonnées de ω par les k coordonnées de a.

On note $X \subset \mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ l'adhérence de la droite $\mathbb{R}\tilde{\omega}$, et μ l'unique mesure de probabilité invariante du flot de translation sur X. C'est donc une mesure invariante par toutes les translations de X (qui est un groupe topologique compact métrisable). Comme le vecteur a est non résonnant, X se projette surjectivement sur le tore $\mathbb{T}^k$ des premières coordonnées et la projection de la mesure invariante μ sur ce facteur est la mesure de Haar $d\theta$.

On considère sur X les fonctions

$$p(x) := \int_X F_n^k(\theta^k) \tilde{g}(x - \theta) d\mu(\theta) \quad , \quad h(x) := \int_{\mathbb{T}^k} F_n^k(\theta) \tilde{g}_k(x - \theta) d\theta = \int_X F_n^k(\theta^k) \tilde{g}_k(x - \theta) d\mu(\theta).$$

La fonction h est donc vue à la fois comme une fonction sur X qui ne dépend que des k premières coordonnées, et comme une fonction sur $\mathbb{T}^k$.

Comme $|\tilde{g} - \tilde{g}_k| = |g - g_d| \leqslant \epsilon/3$, on a $|h - p| \leqslant \epsilon/3$. De plus, lorsque n est assez grand, $|h - \tilde{g}_k| \leqslant \epsilon/3$, et donc finalement $|p - \tilde{g}| \leqslant \epsilon$.

Il nous reste à démontrer que la fonction $p(\tilde{\omega}t)$ est un polynôme trigonométrique dont les fréquences sont des fréquences de f.

Pour le vérifier, on rappelle d'abord que $F_n^k(\theta)$ est un polynôme trigonométrique sur $\mathbb{T}^k$. Pour un monôme $e^{2i\pi u \cdot \theta}$, où u est un vecteur de $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ avec un nombre fini de coordonnées non nulles, on a :

$$p_u(x) := \int_X e^{2i\pi u \cdot \theta} \tilde{g}(x - \theta) d\mu(\theta) = \int_X e^{2i\pi u \cdot (x - \theta)} \tilde{g}(\theta) d\mu(\theta) = \hat{f}(u \cdot \tilde{\omega}) e^{2i\pi u \cdot x}.$$

La fonction correspondante $p_u(\tilde{\omega}t)$ est un monôme qui n'est non nul que si sa fréquence est une fréquence de f. Le polynôme $p(\tilde{\omega}t)$ est la somme d'un nombre fini de monômes de ce type, ce qui démontre le résultat. ►

7 Relations dynamiques

On continue à travailler sur un espace métrique X, souvent supposé compact. Une relation sur X est une partie de $X \times X$. Toute application φ engendre une relation, qui est donnée par le graphe de φ. Si $R \subset X \times X$ est une relation, on note $R(x)$ l'ensemble $\{y \in X : (x, y) \in R\}$. On peut penser à R comme déterminant une dynamique multivaluée où $R(x)$ est l'ensemble des successeurs possibles du point x. On note aussi xRy pour $(x, y) \in R$. Une relation est dite fermée ou ouverte si elle l'est en tant que sous-ensemble de $X \times X$. Toute application $\varphi : X \longrightarrow X$ engendre une relation, le graphe de φ. Si φ est continue, alors son graphe est fermé, la réciproque est vraie si X est compact.

Une relation est dite transitive si xRy et yRz impliquent xRz. Si R et R' sont des relations, on définit la composition $R' \circ R$ comme l'ensemble des couples (x, y) tels que il existe z vérifiant $xRzR'y$. La relation R est donc transitive si et seulement si $R \circ R \subset R$. On définit par récurrence les relations $R^{\circ n} = R^{\circ (n-1)} \circ R$, et $R^{\circ 0}$ est la diagonale. On définit finalement

$$R^t := \bigcup_{n \geqslant 1} R^{\circ n},$$

c'est la plus petite relation transitive contenant R. Si X est compact, la composée de deux relations fermées est fermée, plus précisément :

Propriété 7.1. *Si X est compact, la composition de deux relations fermées est une relation fermée.*

◄ Soient A et B deux relations fermées. Soient $z_n \longrightarrow z$ et $x_n \longrightarrow x$ des suites telles que $x_n B \circ A z_n$. Il existe alors une suite y_n telle que $x_n A y_n B z_n$. On extrait une sous-suite de sorte que y_n converge vers une limite y, on a alors $xAyBz$ puisque A et B sont fermées, et donc $x(B \circ A)y$. ►

Dans le cas ou R est la relation déterminée par une application φ, $R^t(x)$ est l'orbite future O^+ de x, définie par $O^+(x) = \{\varphi(x), \varphi^2(x), \dots\}$. Si R est une relation ouverte, alors R^t est aussi une relation ouverte. Par contre, même si R est une relation fermée, ce n'est pas nécessairement le cas de R^t. En particulier, la relation O^+ n'est presque jamais fermée pour un système dynamique.

On peut considérer la fermeture d'une relation, mais la fermeture d'une relation transitive n'est en général pas transitive. En particulier, la fermeture de la relation O^+ associée à un système dynamique n'est en général pas transitive. On prendra garde au fait que $\overline{O^+}(x)$ en général n'est pas égal à la fermeture de $O^+(x)$. De la meme façon, la relations $\omega(x)$ n'est pas fermée en général (même si $\omega(x)$ est fermé pour tout x).

Concernant cette relation ω associée à une application φ, on vérifie facilement :

Propriété 7.2. *$\varphi \circ \omega = \omega = \omega \circ \varphi$. La relation ω est transitive.*

Le point x est dit récurrent si $x \in \omega(x)$.

Propriété 7.3. *L'ensemble R des points récurrents vérifie $\varphi(R) = R$.*

◄ On a $\varphi(\omega(x)) = \omega(x)$, et $\omega(x) = \omega(\varphi(x))$. Si x est récurrent, alors $x \in \omega(x) = \omega(\varphi(x))$, donc $\varphi(x) \in \omega(\varphi(x))$. Réciproquement soit $x \in \omega(x)$ un point récurrent. Comme $\varphi(\omega(x)) = \omega(x)$, il existe $y \in \omega(x)$ tel que $\varphi(y) = x$. Alors, $y \in \omega(x) = \omega(y)$, donc y est récurrent. On a montré que $x \in \varphi(R)$. ►

L'ensemble des points récurrents n'est pas forcément fermé. Un exemple est donné par le doublement $\theta \longmapsto 2\theta$ sur $\mathbb{T}$. Le point $1/2$ n'est pas récurrent (il est pré-periodique, mais pas périodique), alors que les points récurrents sont denses puisque l'application est transitive. Ceci implique que la relation ω n'est pas fermée.

Si φ est une application continue, on note F la fermeture de la relation O^+. Autrement dit, $y \in F(x)$ si et seulement si, pour tous voisinages U et V de x et Y, il existe $n \geqslant 1$ tel que $\varphi^{-n}(V) \cap U$ est non-vide. Autrement dit, pour toute $\epsilon > 0$, il existe x' tel que $d(x, x') \leqslant \epsilon$ et tel que l'orbite $O^+(x')$ intersecte $B(y, \epsilon)$.

Une variante consiste à considérer la fermeture F_* de la relation ω. On a $y \in F_*(x)$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x' \in B(x, \epsilon)$ et $n \geqslant 1/\epsilon$ tel que $d(\varphi^n(x'), y) \leqslant \epsilon$.

Propriété 7.4. *Soit φ une application continue de l'espace métrique X. On a alors*

$F = F_* \cup O^+$ (la réunion n'est pas forcément disjointe).

$\varphi \circ F_* \subset F_* \subset F_* \circ \varphi$, la première inclusion est une égalité si X est compacte, et la seconde est une égalité si φ est un homéomorphisme.

$\varphi \circ F \cup \varphi \subset F \subset F \circ \varphi \cup \varphi$, la première inclusion est une égalité si X est compacte, et la seconde est une égalité si φ est un homéomorphisme.

Les inclusions $\varphi\circ F \subset F$ et $\varphi\circ F_* \subset F_*$ affirment que les ensembles $F(x)$ et $F_*(x)$ sont positivement invariants pour tout x.
◄ la relation $F_* \cup O^+$ est fermée et contient O^+, donc elle contient F, ceci montre la première relation.

Si $y \in F_*(x)$, alors il existe $x_n \longrightarrow x$ et $k_n \longrightarrow \infty$ tels que $\varphi^{k_n}(x_n) \longrightarrow y$. Alors on a $\varphi^{k_n+1}(x_n) \longrightarrow \varphi(y)$ donc $\varphi(y) \subset F_*(x)$. On a aussi $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ et $\varphi^{k_n-1}(\varphi(x_n)) \longrightarrow y$, donc $y \in F_*(\varphi(x))$. On a montré les inclusions $F_*\circ\varphi \subset F_* \subset \varphi\circ F_*$.

Si X est compact, alors la suite $\varphi^{k_n-1}(x_n)$ a un point d'accumulation z. Ce point appartient donc à $F_*(x)$, et de plus $\varphi(z) = y$, donc $y \in \varphi(F_*(x))$.

Si φ est un homéomorphisme et si $y \in F_*(\varphi(x))$, il existe $z_n \longrightarrow \varphi(x)$ et $k_n \longrightarrow \infty$ tels que $\varphi^{k_n}(z_n) \longrightarrow y$. Alors, $x_n := \varphi^{-1}(z_n) \longrightarrow x$ et $\varphi^{k_n+1}(x_n) \longrightarrow y$, donc $y \in F_*(x)$.

Les relations concernant F sont une conséquences des deux premières. ►

Le point x est dit non-errant si $x \in F(x)$, on note Ω l'ensemble des points non-errants. Au vu de la propriété $F = F_* \cup O^+$, on constate que x est non errant si et seulement si $x \in F_*(x)$.

Propriété 7.5. *L'ensemble Ω des points non-errants est fermé et positivement invariant, il est invariant si X est compact et si φ est un homéomorphisme.*

◄ Si $x \in F_*(x)$, alors $\varphi(x) \in \varphi\circ F_*(x) \subset F_*(\varphi(x))$. Si $y \in F_*(y)$, et si X est compact, il existe $x \in F_*(y)$ tel que $\varphi(x) = y$. Alors, $x \in F_*(\varphi(x)) = F_*(x)$. ►

Propriété 7.6. *Pour tout $x \in X$, l'ensemble limite $\omega(x)$ est contenu dans l'ensemble non errant. En particulier, tout point récurrent est non errant.*

◄ Soit $y \in \omega(x)$ et soit U un voisinage de y. Il existe alors n et $m \geqslant n+1$ tels que $\varphi^n(x) \in U$ et $\varphi^m(x) \in U$, et donc $\varphi^{m-n}(U) \cap U$ est non vide. ►

Dans le cas d'un flot, on dit que le point x est non errant si, pour tout voisinage U de x, il existe des temps t arbitrairement grands pour lesquels $\varphi^{-t}(U) \cap U$ est non-vide. Cela revient à dire que xF_*x, où F_* est la fermeture de la relation ω.

Proposition 7.7. *Soit V un champ de vecteurs complet sur la variété X. Le point $x \in X$ est errant si et seulement si il existe une boite de flot globale autour de l'orbite de x, c'est à dire un ouvert invariant U contenant X et un difféomorphisme $\psi : U \longrightarrow W \times \mathbb{R}$ tel que $\psi_* V = (0,1)$, où W est un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$.*

◄ On considère un plongement F d'un voisinage ouvert W de 0 dans $\mathbb{R}^{d-1}$ telle que $F(0) = x$ et $dF_0(\mathbb{R}^{d-1})$ est un supplémentaire de $V(x)$. On considère alors l'application $\phi(y,t) = \varphi(t, F(y))$. Nous avons déjà démontré que ϕ est un difféomorphisme local en $(0,0)$. Comme $\phi(y, t+s) = \varphi^t(\phi(y,s))$, on a $d\phi_{(0,t)} = d\varphi_0^t \circ d\phi_{(0,0)}$, donc ϕ est un difféomorphisme local en chaque point $(0,t)$.

Montrons maintenant que ϕ est injectif sur $W \times \mathbb{R}$ si W est assez petit. Sinon, il existe deux suites y_n et z_n tendant vers 0 deux suites de temps $t_n \geqslant s_n$ telles que $\phi(y_n, t_n) = \phi(z_n, s_n)$, c'est à dire $\varphi^{t_n - s_n}(y_n) = z_n$.

Puisque x est errant, la suite $t_n - s_n$ est bornée. On peut donc supposer qu'elle converge vers une limite τ, et alors $\varphi^\tau(x) = x$. Comme le point x n'est pas périodique, on a $\tau = 0$. Comme l'application ϕ est injective au voisinage de $(0,0)$, c'est une contradiction. ►

Exercice 7.1. *Soit V un champ de vecteurs C^1 sur une variété X, x un point de X, et $T > 0$ un temps tel que l'orbite $t \longmapsto \varphi^t(x)$ est injective sur $[0,T]$. Montrer que ce segment d'orbite est contenu dans un tube de flot, c'est à dire qu'il existe un ouvert U de X et un difféomorphisme $\psi : U \longrightarrow W \times]a,b[$ tel que $\psi(x) = (0,0)$, $\psi_* V \equiv (0,1)$ et $[0,T] \subset]a,b[$.*

On remarque que les relations F et F_* ne sont pas transitives. Il faut prendre garde aussi au fait que $\Omega(\varphi_{|\Omega})$ n'est pas forcément égal à Ω.

Une relation est dite réflexive si elle contient la diagonale, c'est à dire si xRx pour tout x. On peut évidemment rendre une relation réflexive en lui ajoutant la diagonale Δ, c'est à dire en considérant la relation $R^r = R \cup \Delta$. Cette opération préserve le caractère transitif ou fermé, on a donc $R^{tr} = R^{rt}$.

On suppose dans toute la suite que X est compact.

Étant donnée une relation R, on note A la plus petite relation fermée et transitive contenant R. On pensera en particulier au cas où R est la relation donnée par une application continue φ. Cette relation a été notamment étudiée par Akin et Auslander.

Lemme 7.8. *Soit R une relation fermée sur l'espace métrique compact X, on a $R\circ A \cup R = A = A\circ R \cup R$.*

En particulier, l'ensemble $A(x)$ est un compact positivement invariant pour tout x.

◄ Posons $B = A \circ R \cup R$. On a $B \subset A \circ A \cup A \subset A$. Réciproquement B est fermée, et $B \circ B \subset A \circ B = A \circ R \subset B$, donc B est transitive. La relation B étant une relation fermée et transitive qui contient R, elle contient A. La preuve de la seconde égalité est identique. ►

La relation A admet une caractérisation très naturelle en terme de fonctions de Lyapounov. On dit que f est une fonction de Lyapounov pour la relation R si $f(x) \geqslant f(y)$ lorsque xRy. Remarquons pour commencer que les relations R et A ont les mêmes fonctions de Lyapounov.

Propriété 7.9. *Pour toute relation R, les relations R, R^t, R^{tr}, A, A^r ont les mêmes fonctions de Lyapounov.*

◄ Toutes les relations considérées contiennent R, donc toute fonction de Lyapounov pour l'une de ces relations est une fonction de Lyapounov pour R. Réciproquement, si f est une fonction de Lyapounov pour R, alors la relation $F(x) := \{y : f(y) \leqslant f(x)\}$ est fermée, transitive et réflexive. Comme elle contient R, elle contient donc A^r, c'est à dire que f est une fonction de Lyapounov pour A^r, donc pour toutes les autres relations considérées. ►

Théorème 7.10. *Soit R une relation quelconque. La relation $A^r = A \cup \Delta$ est caractérisé par la propriété suivante : $xA^r y$ si et seulement si $f(y) \leqslant f(x)$ pour toute fonction de Lyapounov f (pour R ou, c'est équivalent, pour A^r).*

Ce théorème est un cas particulier du résultat suivant, appliqué à la relation A^r.

Théorème 7.11. *Soit R une relation réflexive, transitive et fermée sur l'espace métrique compact X. Alors la relation R est déterminée par ses fonctions de Lyapounov, c'est à dire que xRy si et seulement si $f(x) \geqslant f(y)$ pour toute fonction de Lyapounov f pour R.*

◄ On doit montrer que, pour $y \notin R(x)$, il existe une fonction de Lyapounov f pour R telle que $f(y) > f(x)$.

La preuve est similaire à celle du Lemme d'Urysohn. Le point clé est l'énoncé suivant :

Si Y est un ensemble positivement invariant par R, c'est à dire que $R(x) \subset Y$ pour $x \in Y$, alors tout voisinage U de Y contient un fermé positivement invariant Y_1 qui contient Y dans son intérieur.

Pour montrer montrer cet énoncé, on définit $U_1 := \{x : R(x) \subset U\}$. C'est un ouvert positivement invariant par R et qui contient Y. On considère ensuite un compact F qui est contenu dans U_1 et contient Y dans son intérieur, puis $F_1 := \cup_{x \in F} R(x)$, qui est un compact positivement invariant et contenant F. Comme $F \subset U_1$, on a $F_1 \subset U$. Le fermé F_1 est l'ensemble cherché.

Cet énoncé nous permet, comme dans le preuve du Lemme d'Urysohn d'associer récursivement à tout rationnel dyadique $a \in [0, 1[$, un fermé F_a positivement invariant par R de sorte que : $F_0 = R(x)$, tous les F_a sont disjoints de y, et F_a est contenu dans l'intérieur de F_b si $a < b$. On pose $F_1 = X$.

On définit alors, pour tout $t \in [0, 1]$ le fermé $F_t := \cap_{a \geqslant t} F_a$ où l'intersection est prise sur les a dyadiques plus grands que t. Chaque F_t est un fermé positivement invariant. On considère alors la fonction f telle que $\{f \leqslant t\} = F_t$, c'est à dire la fonction qui vaut t précisément sur $F_t - \cap_{s<t} F_s$. Les ensembles $\{f \leqslant t\} = F_t$ sont fermés. Les ensembles $\{f < t\} = \cup_{s<t} F_s$ sont ouverts. En effet, cette réunion est aussi la réunion des intérieures des F_s, $s < t$. La fonction f est donc continue. C'est une fonction de Lyapounov pour R puisque ses sous-niveaux $\{f \leqslant t\}$ sont positivement invariants. ►

On dit que la relation R est transitive au sens généralisé si la relation A associée est totale (égale à $X \times X$). Cette condition est donc équivalente à la non-existence d'une fonction de Lyapounov continue.

Exercice 7.2. *Soit $V(x) : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive C^∞, interprétée comme un champ de vecteurs.*

Si V est strictement positive en dehors d'un nombre fini $k \geqslant 2$ de points, montrer que le flot est transitif au sens généralisé, mais pas transitif.

Addendum 7.12. *Soit B une relation réflexive transitive fermée sur l'espace métrique compact X. Il existe une fonction de Lyapounov h pour B telle que :*

Si $y \in B(x)$ et $x \notin B(y)$, alors $h(y) < h(x)$.

◄ L'espace $C(X)$, muni de la topologie uniforme est séparable. Il en est donc de même de l'ensemble des fonctions de Lyapounov continues à valeurs dans $[0, 1]$. On considère une suite dense f_n, et on pose $h = \sum 2^{-n} f_n$. Si $y \in B(x)$, alors $f_n(y) \leqslant f_n(x)$ pour tout n, donc $h(y) \leqslant h(x)$. De plus, Si $h(y) = h(x)$, alors $f_n(y) = f_n(x)$ pour tout n, et par densité $f(y) = f(x)$ pour toute fonction de Lyapounov f à valeurs dans $[0, 1]$, donc pour toute fonction de Lyapounov f, donc $x \in B(y)$. ►

Cet Addendum est un résultat classique en économie mathématique (il se généralise aux espaces localement compacts) Supposons par exemple que B est de plus une relation totale, c'est à dire que xBy ou yBx pour tous x et y. Une telle relation peut décrire les préférences d'un agent par rapport à diverses circonstances paramétrées par les points de X. Notons que B n'est pas forcément une relation d'ordre, on peut avoir xBy et yBx avec $x \neq y$, les points x et y étant alors indifférents aux yeux de l'agent. Ce qui précède donne l'existence d'une fonction d'utilité pour la relation B, c'est à dire d'une fonction h telle que $h(x) \geqslant h(y)$ si et seulement si xBy (plus la valeur de h est basse, plus l'agent est content). En effet, étant donnés deux point x et y, on a l'un des trois cas suivants :

$y \in B(x)$ et $x \notin B(y)$, et alors $h(y) < h(x)$.

$y \in B(x)$ et $x \in B(y)$, et alors $h(y) = h(x)$,

$y \notin B(x)$ et $x \in B(y)$, et alors $h(y) > h(x)$.

Comme les situations partitionnent $X \times X$, les trois implications sont des équivalences.

Dans ce cas, la relation B est déterminée par une seule fonction h. On peut modéliser le comportement de cet agent en disant qu'il cherche à minimiser la fonction h.

Le cas général, où la relation n'est pas totale, modélise une situation ou les préférences de l'agent ne sont pas entièrement connues (peut-être même pas par lui-même). On ne peut pas décrire exactement cette situation par une seule fonction d'utilité. Chaque fonction h donnée par la proposition, dans ce cas, est compatible avec les préférences de l'agent, mais "décide à sa place" dans le cas ou aucune préférence n'est connue. Il y a plusieurs façons de le faire.

On s'intéresse maintenant à la notion de récurrence associée à une relation, et notamment à une relation transitive fermée. On rappelle que x est un point neutre de la fonction de Lyapounov f (pour la relation R) si il existe $y \in R(x)$ tel que $f(y) = f(x)$. Sinon, c'est un point stricte.

Proposition 7.13. *Soit B une relation transitive fermée sur l'espace métrique compact X. Le point x vérifie xBx si et seulement si x est neutre pour toute fonction de Lyapounov (pour B). De plus, il existe une fonction de Lyapounov h dont les points neutres sont exactement les points de B.*

◄ Le second point est une conséquence du premier point au vu de l'addendum ci-dessus.

Si xBx, alors toute fonction de Lyapounov est neutre en x, puisque on a $f(y) = f(x)$ en prenant $y = x$.

Supposons que x est neutre pour toute fonction de Lyapounov, en particulier pour la fonction h de l'addendum précédent. Alors il existe $y \in B(x)$ tel que $h(y) = h(x)$, ce qui implique que $x \in B(y)$, et donc xBx. ►

Dans le cas où B est la relation A associée à une dynamique R, on a le raffinement suivant :

Proposition 7.14. *Soit R une relation fermée, et A la relation transitive fermée associée.*

Si f est une fonction de Lyapounov (pour R ou pour A, on a vu que c'est équivalent) alors ses points neutres en tant que fonction de Lyapounov pour R sont les mêmes que ses points neutres en tant que fonction de Lyapounov pour A.

En particulier, on a xAx si et seulement si toute fonction de Lyapounov est neutre en x.

Dans le cas où R est la relation donnée par une application continue, la récurrence associée à A est appelée récurrence généralisée. Un point x est donc récurrent au sens généralisé (c'est à dire que xAx) si et seulement si il est neutre pour toute fonction de Lyapounov continue.

◄ C'est une conséquence de la relation $A = A \circ R \cup R$. En effet Si x est un point neutre de f pour A, alors il existe $y \in A(x)$ tel que $f(y) = f(x)$. La relation xAy implique que, soit xRy, soit il existe z tel que $xRzAy$.

Dans le premier cas, x est un point neutre de f (pour la relation R).

Dans le second cas, on a $f(x) \geqslant f(z) \geqslant f(y)$ et $f(y) = f(x)$ donc $f(z) = f(x)$, donc x est neutre pour f en tant que fonction de Lyapounov de R. ►

Propriété 7.15. *L'ensemble des points récurrents au sens généralisé d'une application φ sur un espace métrique compact X est un compact positivement invariant par φ.*

◄ On a $A = A \circ \varphi \cup \varphi$. Si $x \in A(x)$, soit $x \in A(\varphi(x))$ soit x est un point fixe, ce qui implique aussi l'inclusion $x \in A(\varphi(x))$. On a alors $\varphi(x) \in A(\varphi(x))$ (car $\varphi \circ A \subset A$). ►

La relation A associée à une application φ a de nombreuses propriétés utile, mais sa définition est indirecte et peu constructive. On considère souvent une autre relation transitive et fermée associée à φ, ou plus généralement à une relation ferée R. On munit ici $X \times X$ de la distance $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d(x_1, y_1), d(x_2, y_2))$. On considère alors la relation ouvert R_ϵ constituée de l'ensemble des paires (x, y) telles que $d((x, y), R) < \epsilon$, et de la relation transitive R_ϵ^t associée. On pose alors $C := \cap_{\epsilon>0} R_\epsilon^t$. Autrement dit, xCy si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ telle que $x_i R_\epsilon x_{i+1}$.

Proposition 7.16. *Pour toute relation R, la relation C associée est fermée et transitive. Plus généralement, pour tout $\delta \geqslant 0$, la relation $C_\delta := \cap_{\epsilon>\delta} R_\epsilon^t$ est fermée et transitive.*

La relation C contient donc la relation A. Si X est un espace connexe et R est la diagonale (le graphe de l'application identité), alors $R = A \subsetneq C = X \times X$.

On remarque que $R^t_\delta \subset C_\delta \subset R^t_\epsilon$ pour tout $\epsilon > \delta$.

◄ La transitivité est claire, montrons la fermeture. Considérons $(x, y) \in \overline{C_\delta}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc $(x_n, y_n) \in R^t_{\delta+1/n}$ tel que $x_n \longrightarrow x$ et $y_n \longrightarrow y$. En notant $\delta_n := d(x_n, x) + d(y_n, y)$, on voit que $(x, y) \in R^t_{\delta_n+\delta+1/n}$ pour tout $n > 0$, et donc que $xC_\delta y$. ►

Nous allons maintenant chercher à caractériser la relation C en termes de fonctions de Lyapounov. On dit que f est une fonction de Lyapounov stable pour R si il existe une relation ouverte contenant R et pour laquelle f est une fonction de Lyapounov. On dit que x est un point neutre de la fonction f si il existe $y \in R(x)$ tel que $f(y) = f(x)$, sinon, c'est un point strict. On dit que a est une valeur neutre de f si il existe un point neutre x tel que $f(x) = a$, sinon, c'est une valeur stricte (en particulier, les points de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans l'image de f sont des valeurs strictes). On dit que f est une bonne fonction de Lyapounov si c'est une fonction de Lyapounov dont les valeurs strites sont denses dans $\mathbb{R}$.

Théorème 7.17. *Soit R une relation fermée. La relation $C^r = C \cup \Delta$ est caractérisée par chacune des propriétés suivantes :*
$xC^r y$ si et seulement si $f(y) \leqslant f(x)$ pour toute fonction de Lyapounov stable f pour R.
$xC^r y$ si et seulement si $f(y) \leqslant f(x)$ pour toute bonne fonction de Lyapounov f pour R.
De plus, les fonctions de Lyapounov stables sont denses dans les bonnes fonctions de Lyapounov en topologie uniforme.

Quelques digressions seront utiles pour la démonstration. Soit f une fonction continue sur X. On dit que $a \in \mathbb{R}$ est une valeur extrémale de la fonction f si il existe un extremum local x tel que $f(a) = x$.

Lemme 7.18. *L'ensemble des valeurs extrémales d'une fonction continue sur un espace métrique compact est dénombrable.*

◄ Il suffit de le montrer pour les valeurs des minima locaux.

Soit M_n l'ensemble des points de X tels que $f(x') \geqslant f(x)$ pour tout $x' \in B(x, 1/n)$. Si x et y sont deux points différents de $M(n)$, alors ou bien $d(x, y) \geqslant 1/n$ ou bien $f(x) = f(y)$. On en déduit que $f(M_n)$ est fini. En effet, on peut trouver dans M_n une partie Z qui a la propriété que $f(Z) = f(M_n)$ et que $d(z, z') \geqslant 1/n$ si $z \neq z'$ sont des points de Z. Une telle partie Z dans l'espace métrique compact X est nécessairement finie.

L'ensemble des minima locaux est la réunion des $M_n, n \geqslant 1$. Les valeurs correspondante forment donc une réunion dénombrable d'ensembles finis, c'est donc un ensemble dénombrable. ►

Lemme 7.19. *Soit U une relation ouverte. Toute fonction de Lyapounov pour U est bonne. En conséquence, pour toute relation R, si f est une fonction de Lyapounov stable pour R, alors c'est une bonne fonction de Lyapounov pour R.*

Si R est une relation contenue dans U, alors toute fonction de Lyapounov pour U est donc une bonne fonction de Lyapounov pour R.

◄ Soit x un point neutre de f. Il existe donc $y \in U(x)$ tel que $f(y) = f(x)$. On a donc $f \geqslant f(x)$ sur l'ouvert $U^{-1}(y)$, qui contient x. On conclut que x est un minimum local de f, et donc que $f(x)$ est une valeur extrémale de f.

Pour montrer la seconde partie de l'énoncé, on constate simplement que toute valeur neutre de f en tant que fonction de Lyapounov pour R est une valeur neutre de f en tant que fonction de Lyapounov pour U. ►

Lemme 7.20. *Toute fonction de Lyapounov stable est une bonne fonction de Lyapounov.*

◄ Soit U une relation ouverte et f une fonction de Lyapounov pour U. Soit x un point neutre de f (en tant que fonction de Lyapounov pour R). Pour tout $y \in R(x)$ on a donc $f(x) = f(y)$. Tout point x' dans l'ouvert $U^{-1}(y)$ vérifie donc $f(x') \geqslant f(y) = f(x)$. On conclut que x est un minimum local de f. Les valeurs neutres de f sont donc contenues dans les valeurs extremales de f, elles sont donc dénombrables. ►

◄ Démonstration du théorème 7.17.

Supposons qu'il existe une bonne fonction de Lyapounov f pour R telle que $f(y) > f(x)$. Il existe alors une valeur stricte a de f telle que $f(x) < a < f(y)$. Par un argument de compacité, il existe $\delta > 0$ tel que $f(y') < a - \delta$ pour tout $x' \in f^{-1}(a)$ et tout $y' \in R(x')$. Il existe alors $\epsilon > 0$ tel que $f(x') \leqslant a$ et $x' R_\epsilon y'$ impliquent que $f(y') \leqslant a$. C'est donc aussi le cas si $x' R^t_\epsilon y'$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $y \notin R^t_\epsilon(x)$, et donc $y \notin C(x)$.

Supposons maintenant que $y \notin C^r(x)$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $y \notin R^t_{2\delta}(x)$ et donc $y \notin C_\delta$, où $C_\delta = \cap_{\epsilon > \delta} R^t_\epsilon$. Comme la relation C_δ est fermée et transitive, il existe une fonction de Lyapounov f pour C_δ telle que $f(y) > f(x)$. La fonction f est alors une fonction de Lyapounov pour R^t_δ, c'est donc une fonction de Lyapounov forte pour R.

Montrons maintenant la densité des fonctions de Lyapounov stables. Soit f une bonne fonction de Lyapounov. On se fixe $\epsilon > 0$, et on considère une suite finie $a_1 < \cdots < a_k$ telle que $a_{i+1} < a_i + \epsilon$ et telle que $a_1 \leqslant \min f$ et $a_k \geqslant \max f$. Chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ contient une valeur stricte b_i de f. Il existe alors $c_i \in]a_i, b_i[$ et $\delta_i > 0$ tels que

$$f(x) \leqslant b_i, xR_{\delta_i}y \Rightarrow f(y) < c_i.$$

Considérons une fonction continue $g_i : X \longrightarrow [a_i, a_{i+1}]$ qui est égale à a_i sur $\{f \leqslant c_i\}$ et à a_{i+1} sur $\{f \geqslant b_i\}$. Par construction, g_i est une fonction de Lyapounov pour R_{δ_i}, et a_i, a_{i+1} sont ses seules valeurs neutres. On recolle les fonctions g_i en considérant la fonction g qui est égale à g_i sur $f^{-1}([a_i, a_{i+1}])$. C'est une fonction continue, avec $g = a_i$ sur $\{f = a_i\}$. C'est de plus une fonction de Lyapounov pour R_δ, avec $\delta = \min_i \delta_i$, et donc une fonction de Lyapounov forte pour R. Comme $f^{-1}([a_i, a_{i+1}]) \subset g^{-1}([a_i, a_{i+1}])$, on a $\|g - f\| \leqslant \epsilon$. ►

On s'intéresse maintenant à la notion de récurrence associée à la relation C. On commence par un lemme :

Lemme 7.21. *On a $C = C \circ R \cup R = C^r \circ R$. En conséquence, si f est une fonction de Lyapounov pour C, alors ses points neutres en tant que fonction de Lyapounov pour C sont identiques à ses points neutres en tant que fonction de Lyapounov pour R.*

◄ La seconde partie découle de la première comme pour la relation A.

Pour démontrer la première partie, on pose $B = C \circ R \cup R$. C'est une relation fermée et transitive contenant R. On constate d'abord que $B \subset C$. Réciproquement, Supposons que xCy. Si xRy, alors xBy. Sinon, il existe $\delta > 0$ tel que $y \notin R_\epsilon(x)$. Pour $\eta \in]0, \delta[$, il existe $k \geqslant 2$ tel que $y \in R_\eta^k(x)$.

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, \epsilon[$ tel que $R_\eta \circ R_\eta \subset R_\epsilon \circ R$, et donc $R_\eta^k \subset R_\epsilon^{k-1} \circ R$ pour tout $k \geqslant 2$. Il existe donc k tel que $x(R_\epsilon^{k-1} \circ R)y$. On a donc $x(R_\epsilon^t \circ R)y$ pour toute $\epsilon > 0$ et donc $x(C \circ R)y$. ►

Proposition 7.22. *Soit R une relation fermée et C la relation associée. Pour $x \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

— *xCx,*
— *Toute bonne fonction de Lyapounov (de R) est neutre en x,*
— *Toute fonction de Lyapounov stable est neutre en x.*

La notion de récurrence associée à la relation C est appelée récurrence par chaînes.

◄ Supposons que xCx et que f est une bonne fonction de Lyapounov pour R. Alors f est une fonction de Lyapounov pour C, et x est un point neutre. Au vu du lemme ci-dessus, x est neutre en tant que fonction de Lyapounov pour R.

Comme toute fonction de Lyapounov forte est une bonne fonction de Lyapounov, le second point implique le troisième.

Soit f_n une suite de bonnes fonctions de Lyapounov dense dans l'ensemble des bonnes fonctions de Lyapounov. Soit $h = \sum 2^{-n} f_n$. C'est une fonction de Lyapounov pour la relation C, qui a la propriété que si $y \in C(x)$ et $x \notin C(y)$, alors $h(y) < h(x)$.

Supposons que toute bonne fonction de Lyapounov est neutre en x. C'est alors le cas pour les fonctions $h_k := \sum_{n \leqslant k} 2^{-n} f_n$, qui sont des bonnes fonctions de Lyapounov. Il existe donc $y_k \in C(x)$ tel que $h_k(y_k) = h_k(x)$. Comme $C(x)$ est compact, on obtient à la limite l'existence de $y \in C(x)$ tel que $h(y) = h(x)$, c'est à dire qe la fonction h est neutre en x. Alors, $f_n(y) = f_n(x)$ pour tout n, donc $f(y) = f(x)$ pour toute bonne fonction de Lyapounov f, ce qui implique que yCx, et donc xCx. ►

Soit $CC(R) \subset X$ l'ensemble récurrent par chaînes de la relation R, c'est à dire l'ensemble des points x tels que xCx. Par définition, la restriction à $CC(R)$ de la relation C est réflexive, elle est aussi transitive et fermée. La symétrisée D, définie par $xDy \Leftrightarrow xCy$ et yCx est une relation d'équivalence.

Théorème 7.23. *L'ensemble $CC(R)$ est intérieurement récurrent par chaînes, les classes d'équivalences de la restriction de D à $CC(R)$ sont intérieurement transitives par chaînes.*

◄ Nous allons prouver la seconde affirmation, la première en découle. On considère donc une classe d'équivalence K pour la relation D sur $CC(R)$.

Notons $C_\delta(K)$ l'image de par C_δ c'est à dire le compact $\cup_{x \in K} C_\delta(x)$, et $C_\delta^{-1}(K)$ le préimage $\{x \in X : C_\delta(x) \cap K \neq \emptyset\}$. On a

$$K = C(K) \cap C^{-1}(K) = \cap_{\delta > 0} C_\delta(K) \cap C_\delta^{-1}(K)$$

et donc, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $C_\delta(K) \cap C_\delta^{-1}(K) \subset K_\epsilon$, l'ensemble des points dont la distance à K est inférieure à ϵ.

Soient maintenant x et y deux points de K, et $\epsilon > 0$. On considère $\delta \in]0, \epsilon[$ tel que $C_\delta(K) \cap C_\delta^{-1}(K) \subset K_\epsilon$.

On considère maintenant une suite $x = x_0, x_1, \dots, x_k = y$ telle que $x_i R_\delta x_{i+1}$. Il existe des points $y_0 = x, y_1, \dots, y_k = y$ de K tels que $d(x_i, y_i) < \epsilon$. On a donc $y_i R_{\epsilon+\delta} y_{i+1}$ et donc $y_i R_{2\epsilon} y_{i+1}$.

Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on conclut que $x C_K y$, où C_K est la relation de chaînes associée à la restriction de R à K. ►

Soit X une variété Riemannienne, c'est à dire que chacun des espaces tangents $T_x X$ est muni d'un produit scalaire. Si f est une fonction lisse sur X, alors le gradient inverse $V(x)$ de f est le champ de vecteurs sur X tel que $\langle V(x), \cdot \rangle = -df_x$ pour tout x. La fonction f est, de manière évidente, une fonction de Lyapounov pour le champ V.

Exercice 7.3. *Supposons que la fonction f est minorée et propre. Montrer que le flot de V est complet.*

En s'inspirant de cette situation, on dit que f est une fonction de Lyapounov régulière du champ V si c'est une fonction lisse telle que $df_x \cdot V(x) < 0$ sauf aux points où $df_x = 0$. Dans le cas des applications, on dit que f est une fonction de Lyapounov régulière si c'est une fonction de Lyapounov lisse telle que $f \circ \varphi(x) < f(x)$ pour tout x qui n'est pas un point critique de f. Autrement dit, on demande que les points neutres de f soient des points critiques de f. En conséquence, les valeurs neutres de f sont des valeurs critiques. La remarque suivante contribue à justifier la notion de bonne fonction de Lyapounov :

Proposition 7.24. *Toute fonction de Lyapounov régulière est une bonne fonction de Lyapounov.*

◄ Au vu du théorème de Sard, l'ensemble des valeurs régulières est de mesure totale, donc il est dense. ►

Proposition 7.25. *Toute fonction fonction de Lyapounov stable de classe C^∞ est régulière.*

◄ Nous avons vu que les points neutres de f sont des points extrema locaux, donc des points critiques. ►

Le résultat suivant montre finalement que, dans le cas où X est une variété, on peut peut remplacer les fonctions de Lyapounov stables ou les bonnes fonctions de Lyapounov dans La caractérisation de la relation C.

Proposition 7.26. *Les fonctions de Lyapounov régulières sont denses pour la topologie uniforme dans les fonctions de Lyapounov stables.*

◄ On peut régulariser par convolution une fonction de Lyapounov stable en restant une fonction de Lyapounov. ►

8 Mesures invariantes, mesures ergodiques

On s'intéresse pour commencer à l'existence de mesures de probabilité invariantes pour une application, c'est à dire de mesures telles que $\varphi_* m = m$.

Propriété 8.1. *Pour que la mesure m soit invariante, il suffit qu'il existe une famille $\mathcal{Y}$ d'ensembles Boréliens qui est stable par intersections finies et qui engendre la tribu Borélienne pour laquelle $\varphi_* m(Y) = m(Y)$ pour tout $Y \in \mathcal{Y}$.*

Il suffit aussi qu'il existe une partie $\mathcal{F} \subset C(X)$ engendrant un sous-espace dense, telle que $\int f \circ \varphi dm = \int f dm$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

◄ La première partie découle du résultat classique de théorie de la mesure selon lequel deux mesures finies qui coïncident sur une famille d'ensembles stable par intersections finies coïncident sur la tribu engendrée par cette partie (c'est le théorème de classe monotone). La seconde affirmation est laissée en exercice. ►

Exercice 8.1. *Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{T} \ni x \mapsto 2x \in \mathbb{T}$ préserve la mesure de Lebesgue.*

Une première fois en montrant que, si $I \subset \mathbb{T}$ est un intervalle de longueur $l < 1$, alors la préimage de $\varphi^{-1}(I)$ est la réunion de deux intervalles disjoints de longueur $l/2$.

Une seconde fois en montrant que $\int e_k \circ \varphi d\lambda = \int e_k d\lambda$ pour tout k, où $e_k(x) = \exp(2i\pi kx)$.

La mesure de dirac δ_x est invariante si et seulement si x est un point fixe, puisque $\varphi_* \delta_x = \delta_{\varphi(x)}$. De la même façon, si x est un point fixe de période T, alors la mesure $(\delta_x + \delta_{\varphi(x)} + \cdots + \delta_{\varphi^{T-1}(x)})/T$ est invariante.

Le résultat suivant est donc évident si il existe un point fixe ou une orbite périodique.

Théorème 8.2. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une application continue, où X est un espace métrique compact.*

L'application φ admet une mesure de probabilité invariante.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons étudier l'espace $\mathcal{P}(X)$ des mesures de probabilité Boréliennes sur X. On rappelle que cet espace s'identifie au convexe fermé des formes linéaires continues l sur $C(X)$ qui sont positives ($l(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$) et vérifient $l(1) = 1$. Un exemple de mesure de probabilité est le Dirac δ_x au point x, qui correspond à la fonctionnelle d'évaluation $f \mapsto f(x)$.

On munit $\mathcal{P}(X)$ de la topologie faible-$*$, c'est à dire de la topolgie engendrée par les applications linéaires $\mu \mapsto \int f d\mu, f \in C(X)$.

Cette topologie est métrisable et compacte. C'est un fait général (la boule unité du dual d'un espace de Banach séparable est un espace métrisable compact), mais nous allons en donner une présentation *ad hoc*.

On définit pour ceci la distance

$$D(\mu, \eta) = \sup_{f \in Lip_1(X)} \left(\int f d\mu - \int f d\eta \right)$$

où Lip_a est l'ensemble des fonctions a-Lipschitz.

Proposition 8.3. *D est une distance, et la convergence associée est la convergence faible-*.*

◄ Montrons d'abord que c'est bien une distance. L'inégalité triangulaire est claire. De plus, si $D(\mu, \eta) = 0$, alors $\int f d\mu = \int f d\eta$ pour toute fonction Lipschitz, et donc pour toute fonction continue, par densité.

Montrons maintenant que $\mu_n \longrightarrow \mu$ pour la distance D si et seulement si $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$ pour tout $f \in C(X)$.

Supposons pour commencer que $D(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$. Ceci implique que $\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$ pour toute fonction Lipschitz f. Les éléments de $\mathcal{P}(X)$ sont tous 1-Lipschitz en tant que fonctions sur $C(X)$. La convergence sur la partie dense des fonctions Lipschitz implique donc la convergence sur tout $C(X)$.

Pour la réciproque, on fixe un point x_0 et on note L l'ensemble des fonctions 1-Lipschitz qui sont nulles en x_0. Par Ascoli, c'est un compact, et de plus on voit que

$$D(\mu, \eta) = \sup_{f \in L} \left(\int f d\mu - \int f d\eta \right).$$

Comme les éléments de $\mathcal{P}(X)$ sont tous 1-Lipschitz en tant que fonctionnelles sur L, et que L est compact, la convergence ponctuelle implique la convergence uniforme, c'est à dire que $D(\mu_n, \mu) \longrightarrow 0$ si μ_n converge vers μ pour la topologie faible-$*$. ►

Exercice 8.2. *Montrer que l'application $X \ni x \mapsto \delta_x \in \mathcal{P}(X)$ est un plongement isométrique de (X, d) dans $(\mathcal{P}(X), D)$.*

Proposition 8.4. *$(\mathcal{P}(X), D)$ est un espace métrique compact.*

◄ Par Ascoli, l'espace des fonctionnelles 1-Lipschitz sur le métrique compact L qui valent 0 en 0 est compact. $\mathcal{P}(X)$ est un fermé de cet espace. ►

La démonstration du théorème est maintenant facile :
◄ Pour tout $\mu \in \mathcal{P}(X)$, on pose $S_*^n\mu = \mu + \varphi_*\mu + \cdots + \varphi_*^{n-1}\mu$, de sorte que $S_*^n\mu/n \in \mathcal{P}(X)$. Par compacité, il existe une sous-suite n_k telle que $S_*^{n_k}\mu/n_k$ converge vers une limite m dans $\mathcal{P}(X)$. Montrons que m est invariante. On a

$$\varphi_*(S_*^{n_k}\mu/n_k) = (S_*^{n_k}\mu + \varphi_*^{n_k}\mu - \mu)/n_k$$

qui a la limite donne $\varphi_* m = m$. ►

Exercice 8.3. *Soit $\varphi(t,x) = \varphi^t(x)$ un flot continu sur l'espace métrique compact X. Pour tout $\mu \in \mathcal{P}^1(X)$, on définit $S_*^t\mu := \int_0^t \varphi_*^s\mu ds$. Pour éviter de devoir définir une intégrale sur l'espace des mesures, on peut la définir plus précisément comme l'unique mesure telle que*

$$\int f d(S_*^t\mu) = \int_0^t \int_X f\circ\varphi^s d\mu ds.$$

Montrer que toute les valeurs d'adhérence η de $S_*^t\mu/t$ sont des mesures de probabilités invariantes par le flot, c'est à dire que $\varphi_*^t\eta = \eta$ pour tout t.

L'existence de mesure invariante permet de donner une preuve plus élégante de l'énoncé suivant, qui avait été auparavant résolu par de l'algèbre linéaire (exercice 2.1).

Propriété 8.5. *Soit A un isomorphisme de l'espace Euclidien E tel que les $A^n, n \in \mathbb{Z}$ sont bornés. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel A est une isométrie.*

◄ On considère, dans $GL(E)$, la fermeture K de la suite $A^n, n \in \mathbb{Z}$. C'est un compact, qui est invariant par multiplication par A. On a donc un homéomorphisme $\varphi : K \longrightarrow K$, donné par $\varphi(M) = MA$. Il existe alors sur K une mesure de probabilité μ invariante par φ. On définit alors la norme Euclidienne

$$\|v\|^2 = \int_K |Mv|^2 d\mu(M),$$

et on constate que $\|Av\|^2 = \int_K |\varphi(M)v|^2 d\mu(M) = \|v\|^2$ par invariance de la mesure μ. ►

Revenons maintenant au cas des applications uniquement ergodiques.

Théorème 8.6. *Soit $\varphi : X \longrightarrow X$ une applications continue de l'espace métrique compact X. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *Pour toute fonction f, la suite $S^n f/n$ converge ponctuellement vers une constante.*
- *Il existe une unique mesure de probabilité invariante*
- *Pour tout $\mu \in \mathcal{P}(X)$, la suite de mesures $S_*^n\mu$ converge vers une limite m indépendante de μ, et cette convergence est uniforme en μ.*
- *φ est uniquement ergodique : Pour toute fonction f, la suite $S^n f/n$ converge uniformément vers une constante.*

◄ Supposons le premier point et posons $l(f) = \lim S^n f/n$. Soit μ une probabilité invariante. Pour toute fonction continue f, on a $\int S^n f/n d\mu = \int f d\mu$. De plus, comme $S^n f/n \longrightarrow l(f)$ ponctuellement, on a $\int S^n f dm \longrightarrow l(f)$ par le théorème de convergence dominée, et donc $\int f d\mu = l(f)$. Il y a donc une seule mesure invariante.

Comme $S^n(f\circ\varphi) = S^n f + f\circ\varphi^{n+1} - f\circ\varphi$, on a

$$\int (f\circ\varphi) dm = \lim S^n(f\circ\varphi)/n = \lim S^n f/n = \int f dm$$

donc la mesure m est invariante.

Supposons qu'il existe une unique mesure de probabilités invariante m. Alors pour tout $\mu \in \mathcal{P}(X)$, m est la seule valeur d'adhérence de la suite $S_*^n\mu$, ce qui implique que cette suite converge vers m. Supposons que la convergence n'est pas uniforme par rapport à μ. Il existe alors une suite μ_n de mesures de probabilité telle que $D(S_*^n\mu_n/n, m) \geqslant \epsilon > 0$. Posons $\eta_n := S_*^n\mu_n/n$. Soit η_k une sous-suite le long de laquelle η_{n_k} converge vers un limite η. On va montrer que η est invariante, donc que $\eta = m$, ce qui est une contradiction. Comme précédemment, l'invariance de η s'obtient par passage à la limite dans l'égalité $\varphi_*\eta_n = \eta_n + (\varphi_*^n\mu_n - \mu_n)/n$.

En supposant le troisième point, on a en particulier convergence, uniforme en x, des mesures $S^n_*\delta_x/n$ vers m. Pour toute fonction Lipschitz f, on a donc

$$S^n f(x)/n = \int f d(S^n_*\delta_x/n) \longrightarrow \int f dm$$

uniformément en x. Par un argument de densité déjà utilisé, on en déduit que cette convergence uniforme a lieu pour tout $f \in C(X)$. ►

Exercice 8.4. *Soit $Y \subset X$ un compact invariant asymptotiquement stable de bassin B et soit m une mesure de probabilité invariante. Montrer que $m(B) = m(Y)$.*

Si x_1 et x_2 sont deux points fixes de φ, alors toute combinaison convexe de δ_{x_1} et de δ_{x_2} est une mesure de probabilité invariante pour φ. Pourtant, les mesures δ_{x_1} et δ_{x_2} ont un sens dynamique plus clair que la mesure $(\delta_{x_1} + \delta_{x_2})/2$.

Cette remarque conduit à la notion de mesure ergodique.

Propriété 8.7. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une mesure de probabilité m invariante par une application mesurable $\varphi : X \longrightarrow X$.*

— *Tout ensemble mesurable A tel que $\varphi^{-1}(A) = A$ est de mesure 1 ou 0.*

— *Toute fonction mesurable f telle que $f\circ\varphi = f$ est constante presque partout.*

— *Toute fonction mesurable bornée f telle que $f\circ\varphi = f$ p.p. est constante presque partout.*

On dit alors que la mesure m est ergodique.

On dira parfois que φ est ergodique pour la mesure m, où juste que φ est ergodique lorsque la mesure m est sous-entendue. Cette terminologie ne doit pas faire oublier que l'ergodicité est une propriété d'une masure invariante particulière, alors que l'unique ergodicité est une propriété d'une système dynamique topologique.

◄ Suposons le premier point et considérons une fonction invariante f. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f > a\}$ est invariant, il est donc de mesure 0 ou 1. Comme $\cap_n\{f > n\}$ est vide, on a $m(\{f > a\}) = 0$ pour a assez grand. De même $m(\{f > a\}) = 1$ pour a assez petit. Il existe donc une unique valeur de transition b telle que $m(\{f > b\}) = 0$ et $m(\{f > a\}) = 1$ pour $a < b$, c'est à dire que $f = a$ p.p.

Soit maintenant f une fonctions telle que $f\circ\varphi = f$ p.p. Posons $g = \limsup f\circ\varphi^n$, de sorte que $g\circ\varphi = g$. Si l'on a supposé le second point, alors la fonction g est constante presque partout. Il reste à montrer que la fonction g est presque partout égale à la fonction f. Soit Z l'ensemble de mesure pleine sur lequel $f\circ\varphi = f$. Alors $f\circ\varphi^2 = f\circ\varphi$ sur $Z_1 := \varphi^{-1}(Z)$. On montre ainsi que

$$f = f\circ\varphi = f\circ\varphi^2 = \cdots$$

sur $A := \cap_{i\geqslant 0}\varphi^{-i}(Z)$. Comme φ préserve la mesure m, chacun des ensembles $\varphi^{-i}(Z)$ est de mesure pleine, et donc aussi l'ensemble A. Clairement, $f = g$ sur A.

Finalement, on déduit le premier point du troisième en utilisant la fonction indicatrice de A. ►

L'unique mesure invariante d'un système uniquement ergodique est ergodique. En effet, pour tout ensemble mesurable invariant A de mesure strictement positive, la mesure $m_A(Y) := m(Y \cap A)/m(A)$ est invariante. Comme $m_A(A) = 1$, on conclut que $m_A \neq m$ si $m(A) \neq 1$, ce qui contredit l'unique ergodicité.

Dans le cas où φ est une application continue d'un espace métrique compact X, on peut donner une caractérisation différente de l'ergodicité. On remarque pour commencer que l'ensemble $\mathcal{PI}$ des mesures de probabilité invariantes est une partie convexe et compacte de $\mathcal{P}(X)$. Dans un convexe C, on dit que le point x est extrémal si il n'est pas une combinaison convexe non-triviale d'autres points de C.

Proposition 8.8. *La mesure invariante m est ergodique si et seulement si c'est un point extrémal du convexe $\mathcal{PI}$.*

◄ Si m n'est pas ergodique, alors il existe une partition de X en deux ensembles mesurables invariants A et B de mesure srictement positive. On pose alors $m_A(Y) = m(A\cap Y)/m(A)$ et $m_B(Y) = m(B\cap Y)/m(B)$, ce sont des mesures invariantes et $m = m(A)m_A + m(B)m_B$, donc m n'est pas extrémale.

On montrera la réciproque plus tard. ►

Nous allons maintenant montrer que toute application continue d'un espace métrique compact admet une mesure invariante ergodique. C'est un résultat semblable à celui qui donne l'existence de compacts invariants minimaux.

Théorème 8.9. *Il existe une mesure invariante ergodique.*

De plus, toute mesure invariante peut être approchée par des combinaisons convexes finies de mesures ergodiques.

Dans un espace vectoriel, on dit qu'une partie C est convexe si elle est stable par combinaisons convexes finies. L'enveloppe convexe d'une partie est le plus petit ensemble convexe contenant cette partie, c'est l'ensemble des combinaisons convexes finies d'éléments de cette partie. L'énoncé ci-dessus est un cas particulier du théorème de Krein-Milman, qui affirme qu'une partie convexe et compacte d'un espace vectoriel topologique est la fermeture de l'enveloppe convexe des ses points extrémaux. La preuve, dans le cas général, que nous donnons ci-dessous n'est pas très différente de la preuve générale. Nous tirons toutefois partie d'un argument de séparabilité spécifique.

◄ Considérons une suite $f_i, i \geqslant 1$ dense dense dans $C(X)$. Soit $\mathcal{P}_1$ l'ensemble des mesures $m \in \mathcal{P}$ qui minimisent la fonctions $m \mapsto \int f_1 dm$ sur $\mathcal{P}$. On définit ensuite par récurrence une suite décroissante de convexes compacts tels que $\mathcal{P}_{i+1}$ est l'ensemble des minima de la fonction $m \mapsto f_i dm$ sur $\mathcal{P}_i$. L'intersection $\mathcal{P}_\infty$ des ces compacts est non vide. Montrons que toute mesure $m \in \mathcal{P}_\infty$ est ergodique.

Supposons que m s'écrit $m = t\mu_1 + (1-t)\mu_0$ où μ_0 et μ_1 sont invariantes et où $t \in]0,1[$. On montre alors par récurrence que la propriété suivante est vraie pour tout i : $\int f_i d\mu_0 = \int f_i d\mu_1 = \int f_i dm$ donc μ_0, μ_1 appartiennent à $\mathcal{P}_i$. L'égalité $\int f_i d\mu_0 = \int f_i d\mu_1$ pour tout i implique que $\mu_0 = \mu_1$ par densité des f_i.

Nous avons montré l'existence d'une mesure extrémale, donc ergodique. Le fait que le convexe compact non vide $\mathcal{P}_\infty$ ne contient que des points extrémaux montre qu'il ne contient qu'un seul point. Ceci implique que le diamètre des compacts convexes $\mathcal{P}_i$ tend vers 0.

Considérons maintenant une mesure invariante quelconque μ, et pour tout k, considérons le convexe compact K_k constitué des mesures η telles que $\int f_i d\mu = \int f_i d\eta$ pour tout $i \leqslant k$. Les K_k forment une intersection décroissante de parties compactes non vides de $\mathcal{P}$, dont l'intersection est le point μ. Leur diamètre tend donc vers 0. La seconde partie du théorème est démontrée si chaque K_k contient une combinaison convexe finie de mesures invariantes extrémales, ce que nous allons maintenant montrer.

On considère l'application

$$L : \mathcal{P} \ni \eta \longrightarrow \left(\int f_1 d\eta, \dots, \int f_k d\eta \right) \in \mathbb{R}^k.$$

Son image C est un convexe compact de $\mathbb{R}^k$. Par le théorème de Minkowski, chaque point de C est une combinaison convexe de points extrémaux de C (en fait, de $k+1$ points extrémaux). En particulier,

$$L(\mu) = a_0 e_0 + \cdots + a_k e_k$$

où les e_i sont des points extrémaux de C, avec $a_i \geqslant 0$, $\sum a_i = 1$. Une légère modification de l'argument précédent montre de plus que chaque point extrémal de C est l'image d'un point extrémal de $\mathcal{P}$, donc il existe des mesures extrémales $\mu_0, \dots, \mu_k$ telles que $L(\mu_i) = e_i$. On a alors $L(a_0\mu_0 + \cdots + a_k\mu_k) = L(\mu)$ c'est à dire que $a_0\mu_0 + \cdots + a_k\mu_k \in K_k$. ►

Le résultat suivant fait un parallèle avec l'unique ergodicité.

Théorème 8.10. *La mesure m est ergodique si et seulement si* $S^n f/n \longrightarrow \int f dm$ *dans* $L^2(X,m)$ *pour tout* $f \in L^2(X,m)$.

C'est le théorème ergodique en moyenne de Von Neumann. L'énoncé est aussi vrai dans L^1, mais la démonstration dans L^2 est particulièrement simple. On commence par le

Lemme 8.11. *L'espace des fonctions* f *telles que* $S^n f/n \longrightarrow \int f dm$ *dans* $L^2(X,m)$ *est un fermé de* $L^2(X,m)$.

◄ Ceci découle du fait que les applications $f \mapsto S^n f/n$ et $f \mapsto \int f dm$ sont 1-Lipshitz de $L^2(X,m)$ dans lui-même. La seconde affirmation découle du calcul

$$\left| \int f dm - \int g dm \right| \leqslant \int |f-g| dm \leqslant \sqrt{\int (f-g)^2 dm} = \|f-g\|. \text{ ►}$$

◄ Supposons que le critère de convergence a lieu. Alors toute fonction $f \in L^2$ qui vérifie $f \circ \varphi = f$ est égale dans L^2 (c'est à dire p.p.) à sa moyenne $\int f dm$. En particulier, toute fonction mesurable bornée vérifiant $f \circ \varphi = f$ p.p. est presque partout constante.

Réciproquement, Posons $H = L^2(X,m)$, c'est un espace de Hilbert. Soit $T : H \longrightarrow H$ l'application $f \mapsto f \circ \varphi$. L'invariance de m implique que T est unitaire, c'est à dire que

$$\langle Tf, Tg \rangle = \int (f \circ \varphi)(g \circ \varphi) dm = \int f g dm = \langle f, g \rangle.$$

L'ergodicité de m est équivalente au fait que le noyau de $T - I$ est réduit aux fonctions constantes, que l'on identifie à $\mathbb{R}$.

L'orthogonal de $\mathbb{R}$ est l'espace E des fonctions de moyenne nulle, il contient l'image de $T-I$. Montrons que cette image est dense dans E. Il suffit pour ceci de démontrer que toute fonction orthogonale à $\mathrm{im}(T-I)$ est constante. Si f est une telle fonction, alors pour tout $g \in H$ on a $\langle g, Tf\rangle = \langle g, f\rangle$ et en particulier $\langle f, Tf\rangle = \|f\|^2 (= \|Tf\|^2)$. Calculons maintenant

$$\|Tf - f\|^2 = \|Tf\|^2 + \|f\|^2 - 2\langle f, Tf\rangle = 0$$

donc $Tf = f$, donc f est constante. On a montré que le sous-espace $\mathbb{R} \oplus \mathrm{im}(T-I)$ est dense dans H.

On vérifie facilement que $S^n f \longrightarrow 0$ si $f \in \mathrm{im}(T-I)$, et que $S^n f/n \longrightarrow f = \int f dm$ si f est constante. L'énoncé en découle par densité de $\ker(T-I) \oplus \mathrm{im}(T-I)$ dans H. ►

En fait, les arguments de la preuve précédente montrent

Propriété 8.12. *Même en l'absence d'ergodicité, on a $H = \ker(T-I) \oplus \overline{\mathrm{im}(T-I)}$ donc $S^n f/n \longrightarrow \pi f$ dans L^2 pour toute fonction $f \in H$, où π est la projection orthogonale sur l'espace des fonctions invariantes.*

Revenons maintenant au fait que les mesures ergodiques sont extrémales.
◄ Soit $m = t\mu_1 + (1-t)\mu_0$ une mesure invariante, où μ_0 et μ_1 sont des mesures invariantes et $t \in]0,1[$. Si m est ergodique, les mesures μ_0 et μ_1 le sont aussi. Pour toute fonction mesurable bornée f, on a donc $S^n f/n \longrightarrow \int f dm$ dans $L^2(X,m)$. Comme $\mu_1 \leqslant m/t$ et $\mu_0 \leqslant m/(1-t)$, on déduit que $S^n f/n \longrightarrow \int f dm$ dans $L^2(X,\mu_0)$ et dans $L^2(X,\mu_1)$.

Comme par ailleurs $S^n f/n \longrightarrow \int f d\mu_0$ dans $L^2(X,\mu_0)$ et $S^n f/n \longrightarrow \int f d\mu_1$ dans $L^2(X,\mu_1)$ on a, pour toute fonction mesurable bornée $\int f d\mu_0 = \int f dm = \int f d\mu_1$, c'est à dire que $\mu_0 = m = \mu_1$. ►

Propriété 8.13. *L'application $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{T}$ est ergodique. Plus précisément, la mesure de lebesgue λ est ergodique pour cette application.*

Cette application n'est pas uniquement ergodique, car λ est une mesure invariante, et le dirac δ_0 en est une autre.
◄ Posons $f_k = e^{2i\pi kx}$. Les fonctions f_k constituent une base orthonormée de $H = L^2(\mathbb{T},\lambda)$. On a $Tf_k = f_{2k}$. Comme les vecteurs f_k sont orthogonaux, on obtient, pour $k \neq 0$ que

$$\|S^n f_k\| = \|f_k + Tf_k + \dots + T^{n-1}f_k\| = \sqrt{n}$$

et donc $S^n f_k/n \longrightarrow 0$. Par ailleurs, $S^n f_0/n = f_0 \longrightarrow f_0 = 1$. On déduit que la convergence L^2 a lieu sur l'espace dense engendré par les f_k, et donc que l'application est ergodique. ►

On dit que la mesure m est mélangeante si

$$\int f\circ\varphi^n g dm \longrightarrow \int f dm \int g dm$$

pour toutes fonctions f et g dans $L^2(X,m)$, c'est à dire si

$$f\circ\varphi^n \rightharpoonup \int f dm$$

dans $L^2(X,m)$ pour toute $f \in L^2(X,m)$.

Exercice 8.5. *Montrer que, pour l'application $x \mapsto 2x$ de $X = \mathbb{T}$, la mesure de Lebesgue est mélangeante.*

Propriété 8.14. *Toute mesure de probabilité invariante mélangeante est ergodique.*

◄ Soit $f \in L^2(m)$ une fonction invariante. Si m est mélangeante, $f = f\circ\varphi^n \rightharpoonup \int f dm$ donc $f = \int f dm$. ►

9 Théorèmes Ergodiques

Le contexte de ce chapitre est celui d'un espace de probabilité (X, m) et d'une application mesurable $\varphi : X \longrightarrow X$ qui préserve la mesure m. On considère la tribu $\mathcal{I}$ des ensembles invariants, c'est à dire des ensembles A tels que $\varphi^{-1}(A) = A$.

Le premier résultat est le théorème de récurrence de Poincaré.

Théorème 9.1. *Soit A un ensemble mesurable de mesure strictement positive. Alors presque tous les points $x \in A$ reviennent dans A une infinité de fois.*

◄ Soit R l'ensemble des points de A qui ne reviennent pas dans A. Les préimages $\varphi^{-i}(R)$ sont deux à deux disjointes. En effet, si il existe $i < j$ tels que $\varphi^i(x) \in R$ et $\varphi^j(x) \in R$ Alors $\varphi^{j-i}(\varphi^i(x)) \in R \subset A$, ce qui contredit la définition de R.

Comme $\sum_{i\geqslant 0} m(\varphi^{-i}(R)) = \sum_{i\geqslant 0} m(R) < \infty$, on a $m(R) = 0$.

Soit $B = A - \cup_{i\geqslant 0} A \cap \varphi^{-i}(R)$. On a $m(B) = m(A)$, et les points de B reviennent dans A une infinité de fois. ►

On peut quantifier mieux les temps de retours. Pour tout ensemble mesurable A et tout x, on note $T_A(x)$ le premier temps $n \geqslant 1$ pour lequel $\varphi^n(x) \in A$ (on pose $T_A(x) = \infty$ si le point x ne revient pas dans A).

Théorème 9.2 (Kac)**.** *On a l'inégalité $\int_A T_A dm \leqslant 1$, avec égalité dans le cas où m est ergodique.*

◄ Soit $A_i, i \geqslant 1$ l'ensemble des points de A sur lesquels $T_A = i$. L'ensemble A est donc la réunion disjointe des ensembles A_i et d'un ensemble de mesure nulle.

On a $\varphi^{-1}(A) \cap A = A_1$, et on note $B_1 := \varphi^{-1}(A) - A_1$. On a donc $m(B_1) = m(A) - m(A_1) = \sum_{i\geqslant 2} m(A_i)$.

Soit B_i l'ensemble des points de $X - A$ sur en lesquels $T_A = i$. C'est donc le complémentaire de $\varphi^{-(i-1)}(A)$ dans $\varphi^{-i}(A)$. La réunion $B = A \cup B_1 \cup B_2 \cup \cdots$ est invariante, elle est donc de mesure 1 dans le cas ergodique.

On remarque que $\varphi^{-2}(A)$ est la réunion disjointe de A_2, de $\varphi^{-1}(A_1)$, et de B_2, donc que $m(B_2) = \sum_{i\geqslant 3} m(A_i)$. De la même façon, on a $m(B_k) = \sum_{i\geqslant k+1} m(A_i)$, donc

$$\begin{aligned}1 \geqslant m(B) = m(A) + m(B_1) + m(B_2) + \cdots &= \sum_{i\geqslant 1} m(A_i) + \sum_{i\geqslant 2} m(A_i) + \cdots \\ &= m(A_1) + 2m(A_2) + 3m(A_3) + \cdots = \int_A T_A dm.\end{aligned}$$

L'inégalité est de plus une égalité dans le cas ergodique. ►

Propriété 9.3. *Une fonction mesurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est invariante si et seulement si elle est mesurable par rapport à la tribu invariante $\mathcal{I}$.*

◄ Il est clair qu'une fonction Borel mesurable et invariante est $\mathcal{I}$-mesurable.

Réciproquement, soit f une fonction $\mathcal{I}$-mesurable. Alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f = a\}$ est invariant, ce qui implique que f est invariante. ►

Le cas où m est ergodique correspond au cas ou les fonctions $\mathcal{I}$-mesurables sont presque constantes (c'est à dire égales à une constante en dehors d'une ensemble de mesure nulle).

Pour toute fonction $f \in L^1(X)$ on note f_I l'espérance conditionnelle de f relativement à la tribu $\mathcal{I}$. C'est l'unique fonction invariante pour laquelle $\int_A f dm = \int_A f_I dm$ pour tout ensemble invariant A. Bien entendu, cette condition ne détermine f_I que modulo égalité p.p., c'est en ce sens qu'il faut considérer l'unicité. On supposera cependant toujours que f_I est invariante partout, et pas seulement presque partout. Dans le cas ergodique, $f_I = \int f dm$.

Pour rappel on peut déduire l'existence d'une telle fonction du théorème de Radon-Nikodym appliqué aux mesures $fm << m$ sur la tribu $\mathcal{I}$. Ce théorème nous donne en effet une densité I-mesurable pour la mesure $(fm)_{|\mathcal{I}}$ par rapport à la mesure $m_{|\mathcal{I}}$, qui est précisément la fonction f_I cherchée.

Le résultat majeur de la théorie ergodique est le Théorème Ergodique de Birkhoff que voici.

Théorème 9.4. *Soit (X, m) un espace de probabilité et φ une application mesurable de X qui préserve m. Pour toute fonction $f \in L^1(X, m)$, on a*

$$S^n f/n \longrightarrow f_I$$

presque partout.

◄ Posons $M^n f = \max(f, f + f\circ\varphi, \ldots, S^n f)$ et $Mf = \sup_{n\geqslant 0} M^n f$. La fonction Mf prend ses valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on a

$$M^{n+1} f = \max(f + M^n f\circ\varphi, f) = f + M^n f\circ\varphi + \max(0, -M^n f\circ\varphi),$$

et donc

$$Mf = f + Mf\circ\varphi + \max(0, -Mf\circ\varphi).$$

Lemme 9.5. *L'ensemble $A := \{Mf = +\infty\}$ est invariant, c'est à dire que $\varphi^{-1}(A) = A$.*

◄ On le déduite de l'identité ci-dessus car $\max(0, -Mf\circ\varphi)$ est positif et fini en tout x. ►

Lemme 9.6. *On a $\int_A f \geqslant 0$.*

◄ En posant $g_n := \max(0, -M^n f\circ\varphi)$, on a, pour tout n

$$\begin{aligned}\int f dm &= \int_A M^{n+1} f dm - \int_A M^n f\circ\varphi dm - \int_A g_n dm \\ &= \int_A M^{n+1} f - M^n f dm - \int_A g_n dm \geqslant - \int_A g_n dm.\end{aligned}$$

Dans ce calcul, on a utilisé d'abord l'invariance de la mesure m, puis le fait évident que $M^{n+1}f \geqslant M^n f$. Comme g_n décroit vers 0, le théorème de convergence monotone implique que $\int g_n dm$ décroit vers 0, on obtient l'inégalité souhaitée à la limite. ►

Pour terminer la preuve du théorème, on applique ce qui précède à la fonction $h = f - f_I - \epsilon$. En notant encore A l'ensemble $\{Mh = \infty\}$, on déduit que $\int_A hdm \geqslant 0$. Comme A est invariant, on a d'autre part $\int_A h = -\epsilon m(A)$, et donc $m(A) = 0$. On a donc $Mh < \infty$ presque partout, ce qui implique que $\limsup S^n h/n \leqslant 0$ presque partout. On a donc $\limsup S^n f/n \leqslant \epsilon + f_I$ presque partout, et comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on obtient

$$\limsup S^n f/n \leqslant f_I.$$

L'inégalité opposée s'obtient de la même façon (ou en appliquant ce qui précède à la fonction $-f$). Le théorème ergodique est prouvé. ►

Supposons que φ admet une inverse mesurable. Cette inverse préserve alors la mesure m, et le théorème ergodique s'applique dont aussi en temps négatif :

$$S^{-n} f/n \longrightarrow f_I$$

presque partout. Il est intéressant de remarquer en particulier que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} S^n f(x)/n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S^{-n} f(x)/n$$

pour presque tout point x, ce qui n'est pas une évidence.

Corollaire 9.7. *Deux mesures invariantes ergodiques différentes d'une même application mesurable sont mutuellement singulières. En conséquence, toute mesure invariante ergodique est extrémale.*

◄ Soient μ_0 et μ_1 deux mesures invariantes ergodiques. Pour toute fonction f mesurable bornée, on a $S^n f/n \longrightarrow \int f d\mu_0$ sur un ensemble mesurable A_0 qui vérifie $\mu_0(A_0) = 1$. On a aussi $S^n f/n \longrightarrow \int f d\mu_1$ sur un ensemble mesurable A_1 qui vérifie $\mu_1(A_1) = 1$. Si les mesures μ_0 et μ_1 sont différentes, alors il existe une fonction f pour laquelle $\int f d\mu_0 \neq \int f d\mu_1$, les ensembles A_0 et A_1 correspondant sont disjoints.

Soit $m = t\mu_1 + (1-t)\mu_0$ une mesure invariante, où μ_0 et μ_1 sont des mesures invariantes et $t \in]0, 1[$. Si m est ergodique, les mesures μ_0 et μ_1 le sont aussi. Mais les mesures m et μ_0 ne peuvent pas être mutuellement singulières, ce qui est une contradiction. ►

On déduit de la convergence presque partout des résultats de convergence en moyenne. On commence par un lemme utile sur l'espérance conditionnelle :

Lemme 9.8. *Soit $p \in [1, \infty)$. Pour tout $f \in L^p$, on a $|f_I|^p \leqslant (|f|^p)_I$. En conséquence, $f_I \in L^p$ et $\|f_I\|_p \leqslant \|f\|_p$.*

C'est un cas particulier de l'inégalité de Jensen, qui affirme que $(g\circ f)_I \leqslant g\circ(f_I)$ pour toute fonction convexe g.
◄ La fonction $t \mapsto |t|^p$ est convexe, et s'écrit comme un supremum de de fonctions linéaires,

$$|t|^p = \max_{s\in\mathbb{R}} st - a(s) \quad , \quad |t|^p = \sup_{s\in\mathbb{Q}} st - a(s)$$

où $a(s) = |s/p|^{q-1}/q$ (mais la valeur n'est pas importante). On a donc $|f|^p = \sup_s sf - a(s)$. Pour tout $s \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $|f|^p_I(x) \geqslant sf_I(x) - a(s)$ pour presque tout x. Sur un ensemble de mesure totale, cette inégalité est satisfaite pour tout $s \in \mathbb{Q}$, et on déduit que

$$|f|^p_I(x) \geqslant \sup_s sf_I(x) - a(s) = |f_I(x)|^p. \text{ ►}$$

Dans le cas $p = 2$, on comprend bien le résultat ci-dessus en remarquant que f_I est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace fermé $L^2(X, I, m) \subset L^2(X, m)$ des fonctions invariantes de carré intégrable. En effet, en notant g ce projeté, on a que $\langle g, h\rangle = \langle f, h\rangle$ pour toute $h \in L^2(X, I, m)$. En prenant pour h la fonction caractéristique d'un ensemble invariant A, on déduit que $\int_A g = \int_A f$, ce qui montre que $g = f_I$.

Théorème 9.9. *Soit $p \in [1, \infty)$ et $p \in L^p(X, m)$, on a $S^n f/n \longrightarrow f_I$ dans L^p.*

◄ Si f est mesurable bornée, alors la convergence presque partout de la suite equibornée $S^n f$ vers f_I implique la convergence dans tous les L^p. Le résultat découle donc de l'observation que l'ensemble G des fonctions f satisfaisant la conclusion de l'énoncé est fermé dans L^p. Soit en effet f une fonction de $\bar{G}$. Alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une fonction $g \in G$ telle que $\|f - g\|_p < \epsilon/3$. On a alors

$$\begin{aligned}\|S^n f/n - f_I\|_p &\leqslant \|S^n f/n - S^n g/g\|_p + \|S^n g/n - g_I\|_p + \|g_I - f_I\|_p \\ &\leqslant 2\|f - g\|_p + \|S^n g/n - g_I\|_p \leqslant \epsilon\end{aligned}$$

pour n assez grand. ►

Propriété 9.10. *L'application $x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{T}$ est ergodique. Plus précisément, la mesure de lebesgue λ est ergodique pour cette application.*

Cette application n'est pas uniquement ergodique, car λ est une mesure invariante, et le dirac δ_0 en est une autre.
◄ Posons $f_k = e^{2i\pi kx}$. Les fonctions f_k constituent une base orthonormée de $H = L^2(\mathbb{T}, \lambda)$. On a $f_k \circ \varphi = f_{2k}$. Comme les vecteurs f_k sont orthogonaux, on obtient, pour $k \neq 0$ que

$$\|S^n f_k\| = \|f_k + f_k \circ \varphi + \cdots + f_k \circ \varphi^{n-1}\| = \sqrt{n}$$

et donc $S^n f_k/n \longrightarrow 0$. Par ailleurs, $S^n f_0/n = f_0 \longrightarrow f_0 = 1$. On déduit que la convergence L^2 a lieu sur l'espace dense engendré par les f_k, et donc que l'application est ergodique. ►

On a utilisé le critère d'ergodicité suivant :

Propriété 9.11. *Si il existe une partie dense $F \subset L^2(X, m)$ telle que la suite $S^n f/n \longrightarrow \int f dm$ pour tout $f \in F$, alors la mesure m est ergodique.*

En préparation de la définition suivante, mentionnons aussi :

Propriété 9.12. *La mesure m est ergodique si et seulement si la suite $S^n f/n$ converge faiblement vers $\int f dm$ dans L^2 pour toute $f \in L^2$.*

◄ L'ergodicité implique la convergence forte dans de $S^n f/n$ comme nous l'avons montré, donc sa convergence faible.

Réciproquement, soit f une fonction invariante. Le critère implique que $\int f(S^n f/n)dm = \int f^2 dm \longrightarrow \left(\int f\right)^2$, et donc que f est presque partout constante. ►

En fait, dans l'exemple ci-dessus, on a la propriété plus forte suivante :

Définition 9.13. *On dit que la mesure m est mélangeante si $f \circ \varphi^n$ converge vers $\int f dm$ faiblement dans L^2 pour tout $f \in L^2$, c'est à dire si*

$$\int g(f \circ \varphi^n) dm \longrightarrow \int g dm \int f dm$$

pour tous f et g dans L^2.

Il suffit de vérifier que cette convergence a lieu sur une partie engendrant un sous-espace dense de L^2, et notamment sur les fonctions caractéristiques des ensembles. Le mélange est donc équivalent à la propriété

$$m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow m(A)m(B),$$

pour tous A et B mesurables, ce qui s'interprète comme une propriété d'indépendance asymptotique des ensembles B et $\varphi^{-n}(A)$. L'énoncé ci-dessous est très utile en pratique :

Lemme 9.14. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'ensembles engendrant la tribu. La convergence $m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow m(A)m(B)$ pour tous A et B dans $\mathcal{A}$ suffit à impliquer la propriété de mélange.*

◄ Considérons l'ensemble $\mathcal{C}$ des parties mesurables de $A \subset X$ telles que $m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow m(A)m(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}$ est une classe monotone. Comme elle contient $\mathcal{A}$, elle contient alors tous les Boréliens, par le théorème de classe monotone.

On vérifie facilement que, si $A_2 \subset A_1$ sont dans $\mathcal{C}$, alors $A_2 - A_1 \in \mathcal{C}$. De plus, si $A_k \in \mathcal{C}$ est une suite croissante, et $A = \cup A_k$. On vérifie facilement que $\liminf m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \geqslant m(A)m(B)$. En appliquant ceci avec $(X - B)$, on obtient que $m(A) - \limsup m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \geqslant m(A) - m(A)m(B)$, et donc $\limsup m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \leqslant m(A)m(B)$. On déduit que $A \in \mathcal{C}$, qui est donc une classe monotone.

On montre ensuite par la même méthode que l'ensemble des parties B vérifiant $m(\varphi^{-n}(A) \cap B) \longrightarrow m(A)m(B)$ pour tout A mesurable est une classe monotone, et donc contient tous les ensembles mesurables. ►

Exercice 9.1. *Montrer que la mesure m est ergodique si et seulement si la suite $m(\varphi^{-n}(A) \cap B)$ converge en moyenne de Césaro vers $m(A)m(B)$ pour tous ensembles mesurables A et B.*

Il suffit que cette convergence ait lieu lorsque A et B appartiennent à une algèbre d'ensembles engendrant la tribu.

Revenons maintenant au cas de l'application $x \mapsto 2x$. Comme $\int f_k f_l dm$ est nul sauf si $k = l$, la suite $\int (f_l)(f_k \circ \varphi^n)$ est nulle à partir d'un certain rang, et donc elle converge vers 0. On a ainsi montré la convergence désirée sur une partie dense, et donc la propriété de mélange. De manière générale :

Propriété 9.15. *Toute mesure mélangeante est ergodique.*

◄ Soit A un ensemble invariant, le mélange implique que $m(A) = m(A)^2$ et donc $m(A) = 0$ ou 1. ►

Le théorème ergodique de Birkhoff implique la loi forte des grands nombres.

Rappelons en le contexte. On se donne une suite de variables aléatoires intégrables identiquement distribuées et indépendantes $f_n, n \geqslant 0$, et le théorème affirme que $(f_1 + \cdots + f_n)/n \longrightarrow \int f$ presque partout.

En notant P la loi des fonctions f_i, on peut modéliser cette situation en considérant l'espace de probabilité $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni de la mesure produit, les fonctions f_i étant les coordonnées des points. Si $\sigma : X \longrightarrow X$ est le décalage, on a alors $f_i = f \circ \varphi^i$, en posant $f = f_0$.

La loi forte des grands nombres découle alors du théorème ergodique de Birkhoff pour peu que l'ergodicité de la mesure produit m (relativement à l'application σ) soit démontrée.

Propriété 9.16. *Soit (Y, P) un espace de probabilité et (X, m) l'espace des suites indépendantes d'éléments de Y, c'est à dire que $X = Y^{\mathbb{N}}$ et m est la mesure produit. Alors la mesure m est ergodique, et même mélangeante pour le décalage σ.*

Soit $\mathcal{A}$ la tribu asymptotique $\mathcal{A} := \cap_{n \geqslant 0} \tau(x_n, x_{n+1}, \ldots)$, où $\tau(x_n, x_{n+1}, \ldots)$ est la tribu engendrée par les fonctions $x_i, i \geqslant n$. La loi du 0 ou 1 de Kolmogorov affirme que la tribu asymptotique est triviale, c'est à dire que ses éléments ont tous mesure 0 ou 1 pour la mesure produit m.

La démonstration est la suivante : La tribu asymptotique est indépendante des tribus $\tau(x_1, \ldots, x_n)$ pour tout n, c'est à dire que $m(A \cap B) = m(A)m(B)$ pour tout A asymptotique et $B \in \tau(x_1, \ldots, x_n)$. Pour A fixé, les mesures positives $B \mapsto m(A \cap B)$ et $B \mapsto m(A)m(B)$ sont égales sur l'algèbre $\cup \tau(x_1, \ldots, x_n)$, donc par le lemme de classe monotone elles sont égales sur toute la tribu produit. Comme A est mesurable pour cette tribu, on conclut que $m(A) = m(A)^2$, donc $m(A) \in \{0, 1\}$.

L'ergodicité de la mesure produit résulte alors de la remarque suivante :

Propriété 9.17. *$\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$.*

◄ Soit A un ensemble mesurable invariant. Il appartient à la tribu $\tau(x_1, x_2, \ldots)$. L'ensemble $A = \varphi^{-1}(A)$ appartient donc à la tribu $\tau(x_1 \circ \varphi, x_2 \circ \varphi, \ldots) = \tau(x_2, x_3, \ldots)$. Par récurrence, A appartient à chacune des tribus $\tau(x_n, x_{n+1}, \ldots)$, et donc il appartient à la tribu asymptotique. ►

La tribu asymptotique est plus grande que la tribu invariante. Pour s'en convaincre, on fixe un point y de X et on considère l'événement A constitué des suites x_n telles que $x_{2n} = y$ pour n assez grand. La loi du 0 ou 1 est donc plus forte que la simple ergodicité.

La loi du 0 ou 1 conduit plus généralement à la notion de mesure exacte :

Définition 9.18. *Dans le cas général d'une application mesurable $\varphi : X \longrightarrow X$ préservant la mesure m, on dit que m est exacte si la tribu asymptotique $\mathcal{A} := \cap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^{-n}(\tau)$ est triviale, c'est à dire que ses ensembles ont mesure 0 ou 1, où τ est la tribu de X.*

Le caractère mélangeant de la mesure produit résulte donc du résultat suivant :

Propriété 9.19. *Toute mesure exacte est mélangeante, donc ergodique.*

◄ Remarquons pour commencer que, comme plus haut, la tribu invariante est contenue dans la tribu asymptotique. Toute mesure exacte est donc clairement ergodique.

Pour démontrer le mélange, on considère l'espace de Hilbert $H = L^2(X, m)$, et les sous-espaces fermés $H_n = L^2(X, \varphi^{-n}(\tau), m)$. Ces sous-espaces forment une suite décroissante, dont l'intersection est $L^2(X, \mathcal{A}, m)$. L'hypothèse d'exactitude nous dit que cette intersection est l'ensemble des fonctions constantes, identifié à $\mathbb{R}$.

Posons $F_n = H_n \cap H_{n+1}^{\perp}$, c'est donc l'orthogonal de H_{n+1} dans H_n. Posons $G_n = \mathbb{R} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ et $G = \cup_n G_n$. Le sous-espace G est dense dans H.

L'application $f \longmapsto f \circ \varphi^n$ envoie H sur H_n, de sorte que $\int g(f \circ \varphi^n) dm = \int f \int g$ à partir d'un certain rang pour $f, g \in G_n$. Par l'argument classique de densité, le mélange en découle. ►

Nous avons notamment montré ci-dessus la propriété de mélange dans les deux cas suivants : Application $x \mapsto 2x$ et mesure de Lebesgue, et décalage sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et mesure produit avec $P(0) = (1) = 1/2$. Les démonstration proposées sont très différentes, mais les résultats son équivalents. En effet, l'application

$$\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ni (a_i) \mapsto \sum a_i 2^{-i-1} \in \mathbb{T}$$

conjugue le décalage et la multiplication. De plus, l'image $\psi_* m$ de la mesure produit m sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ est la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{T}$.

Exercice 9.2. *Soient σ et φ deux applications mesurables des espaces de probabilités (X, m) et (Y, λ). Soit $\psi : X \longrightarrow Y$ une application mesurable telle que $\psi_* m = \lambda$, et telle que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Si m est ergodique, mélangeante, ou exacte montrer que λ a la même propriété.*

Soit $Z \subset Y$ une partie invariante de mesure totale. Montrer que $\varphi_{|Z}$ est ergodique ou mélangeante pour la mesure $m_{|Z}$ si et seulement si φ l'est.

Au vu de cet exercice, la propriété d'exactitude pour le décalage σ implique que la multiplication est elle aussi exacte.

Réciproquement, on aurait pu déduire le caractère ergodique ou mélangeant de σ de la propriété analogue pour φ. On considère pour ceci l'ensemble $Z \subset \mathbb{T}$ des points irrationnels. C'est un ensemble invariant de mesure totale. La restriction de φ à Z est ergodique et mélangeante. Chaque point de Z a une unique préimage dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, et l'application ϕ qui a un point associe sa préimage est mesurable. Comme $\lambda(Z) = 1$, l'ensemble $W := \phi(Z) = \psi^{-1}(Z)$ est de mesure totale pour m. C'est l'ensemble des suites qui ne sont pas pré-périodiques. La restriction de σ à W est donc ergodique et mélangeante, ce qui implique que que σ est ergodique et mélangeante.

10 Décomposition Ergodique

Voir Ricardo Mañé *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, chapitre II.6.

On se donne un espace métrique compact X muni de sa tribu Borélienne ainsi qu'une application mesurable $\varphi : X \longrightarrow X$. On ne se donne pas a priori une mesure de probabilité invariante, mais les résultats qui suivent sont vides si il n'existe pas de probabilité invariante. On peut par exemple penser au cas où φ est continue. On va s'intéresser en particulier au comportement asymptotique de la suite des mesure empiriques $S^n_*\delta_x/n$. Pour fixer les idées, on commence par une conséquence directe du théorème ergodique :

Proposition 10.1. *Soit m est une mesure invariante. La mesure m est ergodique si et seulement si les mesures empiriques $S^n_*\delta_x/n$ convergent vers m pour m-presque tout x.*

◄ On considère une partie dénombrable dense $F \subset C(X)$. Pour tout $f \in F$, le théorème ergodique de Birkhoff implique que $\int f d(S^n_*\delta_x) = S^n f(x)/n$ converge vers $\int f dm$ en dehors d'une ensemble Z_f tel que $m(Z_f) = 0$. L'ensemble $Z = \cup_{f\in F} Z_f$ est de mesure nulle, et $\int f d(S^n_*\delta_x) \longrightarrow \int f dm$ pour tout $f \in F$ si $x \in Z$. Pour ces points x, on en conclut que $S^n_*\delta_x/n \longrightarrow m$.

Réciproquement, supposons que $S^n_*\delta_x/n \longrightarrow m$ pour m-presque tout x. Alors pour toute fonction continue, on a $S^n f(x)/n \longrightarrow \int f dm$ dans L^2. Comme $C(X)$ est dense dans L^2, ceci implique l'ergodicité. ►

Théorème 10.2. *Considérons l'ensemble A des points x admettant la propriété suivante :*

La suite $S^n_*\delta_x/n$ converge vers une probabilité invariante m_x, qui est ergodique et dont le support contient x.

Alors l'ensemble A est de mesure totale pour toute mesure invariante.

Si φ est un homéomorphisme, on obtient la même conclusion en définissant A comme l'ensemble des points x ayant la propriété suivante : Les suites $S^n_*\delta_x/n$ et $S^{-n}_*\delta_x/n$ convergent vers une même probabilité invariante ergodique m_x, dont le support contient x.

Exercice 10.1. *Montrer que les points de A sont récurrents.*

On considère la suite d'applications mesurables $S^n_*\delta_x/n$ à valeurs dans l'espace métrique compact $\mathcal{P}(X)$. Des arguments généraux de théorie de la mesure impliquent que l'ensemble R sur lequel cette suite converge est Borélien, et que la limite $x \longmapsto m_x := \lim S^n_* f(x)/n$ est mesurable sur R (en tant que fonction de R dans $\mathcal{P}(X)$).

Lemme 10.3. *L'ensemble Borélien R sur lequel $m_x := \lim S^n_*\delta_x/n$ existe est un ensemble mesurable invariant qui est de mesure totale pour toute probabilité invariante m. De plus, on a $m_{\varphi(x)} = m_x$ pour tout $x \in R$.*

◄ Comme ci-dessus, on considère une partie dénombrable dense $F \subset C(X)$. Le théorème ergodique de Birkhoff implique qu'il existe un ensemble Z de mesure totale sur lequel $\int f d(S^n_*\delta_x) = S^n f(x)/n$ converge pour tout $f \in F$. Par un argument de densité, on montre alors que la suite $S^n f(x)/n$ est de Cauchy pour tout $x \in Z$ et $f \in C(X)$, et donc convergente. L'application linéaire $f \longmapsto \lim S^n f(x)/n$ est alors représentée par une mesure m_x, qui est la limite de la suite $S^n_*\delta_x$. On a donc $Z \subset R$. ►

Lemme 10.4. *Pour toute fonction mesurable bornée f et toute mesure invariante m, on a $\int f dm_x = f_I(x)$ m-presque partout.*

On posera $\tilde f(x) := \int f dm_x$ pour toute fonction mesurable bornée f. La fonction $\tilde f$ est bien définie et mesurable sur l'ensemble invariant R, c'est un représentant de l'espérance conditionnelle f_I pour toute mesure invariante m. On étendra de plus $\tilde f$ en une fonction invariante définie sur tout X, par exemple en posant $\tilde f = 0$ hors de R. La notation $\tilde f$ est plus précise que la notation f_I car c'est une fonction qui est bien définie sur un ensemble R indépendant de f, et qui ne dépend pas du choix d'une mesure invariante m.

◄ Il suffit de démontrer que la fonction $x \longmapsto \int f dm_x$ vérifie la propriété qui caractérise f_I, c'est à dire qu'elle est mesurable et que $\int_A f dm = \int_A \left(\int f dm_x\right) dm(x)$ pour tout borélien invariant A. Le Borélien invariant A étant fixé, notons E l'espace des fonctions mesurables bornées f qui vérifient ces propriétés.

On a $C(X) \subset E$. On a $S^n f(x)/n \longrightarrow \int f dm_x$ sur l'ensemble R, (donc m-presque partout), ce qui implique que la fonction $x \longmapsto \int f dm_x$ est mesurable. Par le théorème de convergence dominée, on obtient, pour A invariant :

$$\int_A f dm = \int_A (S^n f/n) dm \longrightarrow \int_A \left(\int f dm_x\right) dm(x).$$

Le théorème de convergence monotone implique que E est stable par convergence monotone.

Comme les fonctions indicatrices des ouverts et des fermés sont des limites monotones de fonctions continues, elles sont dans E. On considère alors l'ensemble C des parties Y de X telles que $1_Y \in E$. La stabilité par convergence monotone de E implique que C est stable par réunion croissante, elle est aussi stable par complémentation : c'est une classe monotone. Le lemme de classes monotone implique que toute classe monotone contenant les fermés contient les Boréliens. On obtient donc que C contient tous les Boréliens. L'espace E contient donc toutes les fonctions mesurables à image finie, et donc toutes les fonctions mesurables bornées puisqu'une telle fonction est limite croissante de fonctions mesurables à image finie. ►

En termes probabilistes a ainsi montré que m_x est une famille de probabilités conditionnelles de m relativement à $\mathcal{I}$. Mettons en évidence la formule, pour toute fonction mesurable bornée f,

$$\int\int f(y)dm_x(y)dm(x) = \int f dm$$

que l'on peut résumer en

$$m = \int m_x dm(x).$$

Au vu du théorème de Birkhoff, on déduit :

Corollaire 10.5. *Soit f une fonction mesurable bornée invariante, l'ensemble des points x tels que $f(x) = \int f dm_x$ est de mesure totale pour toute probabilité invariante.*

Dans le cas où φ est continue, la mesure m_x est invariante pour chaque $x \in R$. Dans le cas général, on a :

Lemme 10.6. *L'ensemble $R_1 \subset R$ des points x tels que la mesure m_x est invariante est un Borélien invariant de mesure totale pour toute probabilité invariante.*

◄ Pour toute fonction $f \in C(X)$, la fonction $f\circ\varphi$ est mesurable et bornée, donc les deux égalités $\int(f\circ\varphi)dm_x = \lim S^n f(\varphi(x))/n$ et $\int f dm_x = \lim S^n f(x)/n$ sont satisfaites sur un ensemble mesurable S_f qui est de mesure totale pour toute mesure invariante. Comme $\lim S^n f(\varphi(x))/n = \lim S^n f(x)/n$, on déduit que $\int f\circ\varphi dm_x = \int f dm_x$ sur S_f. Soit F une partie dense dénombrable de $C(X)$. On a $\int f\circ\varphi dm_x = \int f dm_x$ pour tout $f \in F$ et tout x dans $S_F := \cap_{f\in F} S_f$, qui est un ensemble mesurable de mesure totale. Pour $x \in S_F$, on en déduit que l'égalité a lieu pour toute fonction continue f, et donc que $\varphi_* m_x = m_x$. ►

Lemme 10.7. *Soit $F \subset C(X)$ une partie dense. Soit m une mesure de probabilité invariante qui a la propriété que, pour toute fonction $f \in F$, la fonction f_I est constante m-presque partout. Alors la mesure m est ergodique.*

◄ Pour toute $f \in F$, on a $f_I(x) = \int f dm$ pour m-presque tout x, et donc $\int f dm_x = \int f dm$ pour m-presque tout x. On déduit, que, m-presque partout, $\int f dm_x = \int f dm$ pour tout $f \in F$. Pour ces points x, on a donc $m_x = m$. On a vu que ceci implique l'ergodicité de m. ►

Lemme 10.8. *L'ensemble $R_2 \subset R_1$ des points x tels que la mesure m_x est invariante et ergodique est de mesure totale pour toute mesure invariante.*

En particulier, l'existence d'une mesure invariante implique l'existence d'une mesure invariante ergodique, ce qui généralise l'énoncé prouvant l'existence de mesures ergodiques dans le cas continu.
◄ Soit f une fonction mesurable bornée invariante. Soit $R_2(f)$ l'ensemble des points x tels que

$$\int f^2 dm_x = f^2(x) \quad \text{et} \quad \int f dm_x = f(x).$$

Comme f et f^2 sont des fonctions mesurables bornées, l'ensemble $R_2(f)$ est un Borélien invariant de mesure totale pour toute probabilité invariante (au vu du corollaire ci-dessus). Pour $x \in R_2(f)$, on a $(\int f dm_x)^2 = \int f^2 dm_x$, donc la fonction f est m_x-presque constante et égale à sa moyenne, de sorte que, pour m_x presque tout y, on a

$$f y) = \int f dm_x = f(x).$$

On considère maintenant une partie dense $F \subset C(X)$. L'énoncé découle de l'affirmation $R_2 = \cap_{f\in F} R_2(\tilde{f})$. En effet, si x est dans cette intersection et $f \in F$, alors $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(x)$ m_x-presque partout, c'est à dire que $S^n f(y)/n \longrightarrow \tilde{f}(x)$ pour m_x presque tout y. Comme F est dénombrable, il existe donc un ensemble Y tel que $m_x(Y) = 1$ et $S^n f(y)/n \longrightarrow \tilde{f}(x)$ pour tout $f \in F$ et $y \in Y$. Par un argument de densité classique, on déduit que $S^n_* \delta_y/n \longrightarrow m_x$ pour tout $y \in Y$. On a vu que ceci implique l'ergodicité de m_x. ►

Proposition 10.9. *Soit A un Borélien qui est de mesure nulle pour toute probabilité invariante ergodique, alors A est de mesure nulle pour toute probabilité invariante μ.*

◄ On a $\mu(A) = \int_X m_x(A) d\mu(x)$. Comme m_x est ergodique pour μ-presque tout x, on a $m_x(A) = 0$ pour μ presque tout x, donc $\mu(A) = 0$. ►

◄ Finissons la démonstration du théorème 10.2. On a déjà montré qu'il existe un Borélien invariant R_2, qui est de mesure totale pour toute probabilité invariante, et tel que $S^n \delta_x / \longrightarrow m_x$ pour tout $x \in R_2$, et m_x est une probabilité invariante ergodique pour tout $x \in R_2$. De plus, l'application $x \mapsto m_x$ est mesurable sur R_2. On étudie maintenant le support des mesures $m_x, x \in R_2$.

On considère une suite de fonctions C^1 décroissantes $g_k : [0, \infty) \longrightarrow [0, 1]$ telles que $g_k = 1$ sur $[0, 1/k]$ et $g_k(2/k) = 0$. Le point x appartient au support de la mesure de probabilité m si et seulement si

$$\int g_k \circ d(x, y) dm(y) > 0$$

pour tout k. Chacune de ces inégalités définit un ouvert U_k de $X \times \mathcal{P}(X)$. En effet si $h(x, y)$ est une fonction continue sur $X \times X$, alors la fonction

$$X \times \mathcal{P}(X) \ni (x, m) \mapsto \int_X h(x, y) dm(y)$$

est continue. Ceci découle de l'inégalité

$$\left| \int h(x, y) dm(y) - \int h(x', y) dm'(y) \right| \leqslant \int |h(x, y) - h(x', y| dm'(y) + \int h(x, y) d(m' - m)(y).$$

L'intersection $B := \cap_k U_k$, qui est l'ensemble des couples (x, m) tels que le point x appartient au support de m, est donc une partie mesurable de $X \times \mathcal{P}(X)$. Comme l'application $x \mapsto (x, m_x)$ est mesurable, L'ensemble A des points $x \in R_2$ tels que x est dans le support de m_x est un Borélien.

Nous avons démontré que A est mesurable. Si m est une probabilité invariante ergodique, alors m presque tout point x a la propriété que $m_x = m$ et que x est dans le support de m, donc $m(A) = 1$. Comme ceci est vrai pour toute probabilité invariante ergodique, c'est aussi vrai pour toute probabilité invariante, par la proposition.

Si m est un mesure ergodique, alors m-presque tout point x a la propriété que $S^n_* \delta_x \longrightarrow m$ et que x est dans le support de m. On conclut que $m(A) = 1$. Comme A est de mesure totale pour toute probabilité invariante ergodique, il est de mesure totale pour toute probabilité invariante.

Dans le cas inversible, Les mesures $m^+_x := m_x$ et $m^-_x := \lim S^{-n}_* \delta_x / n$ sont bien définies et dépendent mesurablement de x sur le Borélien $A(\varphi) \cap A(\varphi^{-1})$, qui est de mesure totale pour toute mesure invariante. L'ensemble

$$A_1 := \{x \in A(\varphi) \cap A(\varphi^{-1}) : m^+_x = m^-_x\}$$

est borélien. Si m est une probabilité invariante ergodique, on déduit de théorème ergodique que $m^+_x = m^-_x = m$ pour m-presque tout x. Autrement dit, $m(A_1) = 1$ pour toute probabilité invariante ergodique, et donc $m(A_1) = 1$ pour toute probabilité invariante. ►

Pour interpréter les résultats ci-dessus, considérons l'application $\varphi(x) = x + x(1-x)/2$, sur $X = [0, 1]$. La dynamique est très simple, il y a deux points fixes 0 et 1. Toutes les autres orbites sont strictement croissantes et convergent vers 1. Il y a seulement deux mesures de probabilité ergodiques, qui sont δ_0 et δ_1. Les mesures de probabilités invariantes sont donc les mesures $m = (1-t)\delta_0 + t\delta_1$, $t \in [0, 1]$. Comme $\varphi^n(x) \longrightarrow 1$ pour tout $x \in]0, 1]$, on a a $S^n_* \delta_x \longrightarrow \delta_1$ pour ces valeurs de x, et bien sur $S^n_* \delta_0 \longrightarrow \delta_0$. On déduit que $R_2 = X$. Les mesures m_x sont définies et ergodiques pour tout x.

Cependant, on a $m^-_x = m^+_x$ seulement si $x \in \{0, 1\}$ (qui est invariant et de mesure totale). Les points x qui appartiennent au support de m_x sont aussi les points de $\{0, 1\}$.

Considérons le décalage bilatère φ sur l'espace produit $X = Y^{\mathbb{Z}}$ où (Y, P) est un espace de probabilité. Contrairement au décalage sur $X^{\mathbb{N}}$, l'application φ est inversible. Nous allons montrer l'ergodicité, pour cette transformation, de la mesure produit m, de plusieurs manières.

On note $X^+ = Y^{\mathbb{N}}$ et $X^- := Y^{\{-1,-2,-3,\dots\}}$, de sorte que $X = X^- \times X^+$. La mesure produit m est le produit des mesures produits m^- et m^+ . On considère les deux projections π^+ et π^- correspondant à cette décomposition. On a $\pi^\pm_* m = m^\pm$. La projection π^+ conjugue le décalage bilatère φ avec le décalage unilatère σ.

◄ L'ergodicité du décalage unilatère donne l'existence d'un borélien $A^+ \subset Y^{\mathbb{N}}$ tel que $m^+(A^+) = 1$ et tel que $S^n_\sigma \delta_x / n \longrightarrow m^+$ pour tout $x \in A^+$. L'ensemble $B^+ = (\pi^+)^{-1}(A^+)$ vérifie donc $\mu(B^+) = 1$. Pour $x \in B^+$, considérons la suite $S^n_\varphi \delta_x / n$. Toute valeur d'adhérence μ de cette suite est une probabilité invariante pour laquelle $\pi^+_* \mu = m^+$. Cette relation implique que $\mu = m$, ce qui conclut la preuve. ►

On peut donner une démonstration de l'ergodicité qui n'utilise pas l'ergodicité du shift unilatère. C'est l'argument de Hopf, qui est très important en dynamique hyperbolique.
◄ Soit A l'ensemble de mesure totale donné par le théorème de décomposition ergodique. Pour tout x dans A, les mesures m_x^+ et m_x^- existent, et elles sont égales. On note cette mesure m_x. Au vu du théorème de Fubini, il existe un ensemble $A^+ \subset X^+$ de mesure totale et tel que, pour tout $x^+ \subset A^+$, l'ensemble $P(x^+) := \{x^- : (x^-, x^+) \in A\} \subset X^-$ est de mesure totale dans X^-. On vérifie facilement que la mesure $m_x = m_x^+$ ne dépend que du futur $\pi^+(x)$, et la mesure $m_x = m_x^-$ que du passé.

Considérons un point $x^+ \in A^+$. Comme m_x ne dépend pas du passé, il existe une mesure de probabilité μ sur X telle que $m_x = \mu$ pour tout $x \in (\pi^+)^{-1}(x^+) = P(x^+) \times \{x^+\}$. Comme m_x ne dépend pas du futur, on a alors $m_x = \mu$ pour tout $x \in A \cap (\pi^-)^{-1}(P(x^+))$. Comme $m^-(P(x^+)) = 1$, on a montré que, pour m-presque tout x, on a $m_x = \mu$. La relation $m = \int m_x dm$ implique alors que $\mu = m$, et donc que $m_x = m$ pour m-presque tout x. La mesure m est donc ergodique. ►

On a implicitement utilisé l'énoncé suivant :

Exercice 10.2. *Soient x et y deux points tels que $d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Supposons que m_x^+ existe. Alors m_y^+ existe et $m_y^+ = m_x^+$.*

Finalement, on va montrer que la mesure m est mélangeante pour φ, ce qui est une troisième façon de montrer son ergodicité. La démonstration est assez similaire à celle du cas unilatère.
◄ On considère la tribu τ_n engendrée par les coordonnées $y_{-n}, y_{1-n}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_n$. Une fonction mesurable $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est τ_n-mesurable si et seulement si elle est de la forme $f = g(y_{-n}, y_{1-n}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_n)$, pour une fonction mesurable $g : Y^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$. Comme la réunion des tribus τ_n engendre la tribu produit τ (qui est aussi la tribu Borélienne sur X), la réunion des espaces $L^2(X, \tau_n, m_n)$ est dense dans $L^2(X, \tau, m)$. Pour f, g dans $L^2(X, \tau_n, m_n)$, on a $\int f \circ \varphi^k g = \int f \int g$ pour k assez grand. On déduit que m est mélangeante. ►

11 Dynamique symbolique

Soit Y un ensemble fini à k éléments, on prendra en général $Y = \{1, \dots, k\}$. On considère l'espace métrisable compact $X = Y^{\mathbb{N}}$ des mots infinis et le décalage à k symboles $\sigma : X \longrightarrow X$. On munit X de la distance $d(x, y) = 2^{-i}$ où i est le premier indice pour lequel $x_i \neq y_i$. C'est une distance ultramétrique, c'est à dire que $d(x, z) \leqslant \max(d(x, y), d(y, z))$. Le diamètre de X pour cette distance est 1. De plus, si $d(x, x') < 1$, alors $d(\sigma(x), \sigma(x')) \geqslant 2d(x, x')$. Plus précisément, le compact X est la réunion disjointe de k parties compactes et ouvertes X_i (les suites commençant par i) et $\sigma : X_i \longrightarrow X$ est un homéomorphisme qui dilate les distances d'un facteur 2.

On appelle cylindre les ensembles C de la forme $\pi_l^{-1}(A)$, où $\pi_l : X \longrightarrow Y^{l+1}$ est la projection sur les $l + 1$ premiers facteurs et où A est une partie quelconque de Y^{l+1}. Les cylindres sont ouverts et fermés. Ils constituent une base dénombrable d'ouverts, et une algèbre d'ensembles qui engendre la tribu produit (par définition de la tribu produit). Cette tribu produit est aussi la tribu Borélienne associée à la topologie produit. En effet, comme les cylindres sont fermés, la tribu engendrée par les cylindres est plus grande que la tribu borélienne. Réciproquement, comme tout ouvert est une réunions dénombrable de cylindres, tout ouvert est mesurable pour la tribu produit, donc la tribu produit est plus petite que la tribu borélienne.

On dit que C est un cylindre élémentaire si il est de la forme $\pi_l^{-1}(x)$ pour un point x de Y^{l+1}

L'application σ a de nombreux compacts invariants. Il y a k points fixes, qui sont les suites constantes. Il y a des orbites périodiques de toutes périodes.

Exercice 11.1. *Montrer que le décalage σ a k^T orbites de période T (mais T n'est pas forcément la période minimale).*

On dit que $\Sigma \subset X$ est de type fini si il existe un nombre fini de mots finis tels que Σ est l'ensemble des mots ne contenant pas ces mots finis. Autrement dit, Σ est de type fini si et seulement si il existe des cylindres élémentaires $C_1, \dots, C_l$ tels que

$$\Sigma = X - \bigcup_{i \geqslant 0, j \in \{1,\dots,l\}} \sigma^{-i}(C_j).$$

Toute partie de type fini est un compact invariant par σ. On vérifie facilement que Σ est de type fini si et seulement si il existe un cylindre C tel que $\Sigma = \cup_{i \geqslant 0} \sigma^{-i}(C)$.

Étudions en détails le cas d'un ensemble de type fini engendré par des mots interdits de longueur 2. Il existe alors une matrice carrée A de taille $k \times k$, à coefficients positifs, tel que $A(i, j) = 0$ si et seulement si le mot ij est interdit. On peut poser $A(i, j) = 1$ pour les mots ij autorisés, mais ce n'est pas nécessaire. Autrement dit, on considère l'ensemble $\Sigma_A \subset \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}}$, constituée des suites y_n telles que $A(y_n, y_{n+1}) > 0$ pour tout n. Cette partie est invariante par le décalage σ, la restriction σ_A de σ à Σ_A est le décalage de type fini associé à A.

La matrice A est dite transitive, ou irréductible, si pour tous états i et j, il existe $n \geqslant 0$ tel que $A^n(i, j) > 0$. Cela signifie qu'il existe un mot prenant la valeur i puis la valeur j. Il est équivalent de demander qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $S^n A := I + A + \cdots + A^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

Proposition 11.1. *Le décalage de type fini associé à la matrice A est transitif si et seulement si la matrice A est transitive.*

◄ Si la matrice A n'est pas transitive, il existe i et j tels que $A^n(i, j) = 0$ pour tout n. Soit X_i le cylindre $\pi_0^{-1}(i)$, où π_0 est la projection sur le premier facteur. Il n'existe aucune suite prenant la valeur i puis la valeur j, donc il n'existe aucune orbite partant de X_i et passant par X_j.

Supposons maintenant que A est transitive, et soient C et C' deux cylindres, déterminés par des suites finies admissibles x, x' avec $x = x_0 \cdots x_n$ et $x' = x'_0 \cdots x'_m$. Par transitivité de A, il existe une suite finie y telle que $y_0 = x_k$ et $y_l = x'_1$. Notons $\sigma(y)$ le mot $y_1 y_2 \cdots y_l$. Soit alors z un élément de Σ_A commençant par $x\sigma(y)\sigma(x')$ (juxtaposition des mots finis). La suite z commence par x, donc elle est dans le cylindre C. De plus, la suite $\sigma^{n+l-1} z$ commence par x', c'est donc un élément de C'. Dans le cas où $x_n = x'_0$, on prend $z = x\sigma(x')$. ►

On rappelle qu'une application continue φ est topologiquement mélangeante si, pour tous ouverts U et V, il existe N tel que $\varphi^{-n}(U) \cap V$ est non vide pour tout $n \geqslant N$. Si A est la matrice de permutation circulaire des coordonnées, alors le décalage σ_A est transitif, mais pas topologiquement mélangeant. Pour une telle matrice, tous les états ont une période égale à k. On dit que la matrice A est transitive et apériodique si il existe N tel que A^N est à coefficients strictement positifs.

Proposition 11.2. *Le décalage de type fini associé à la matrice A est topologiquement mélangeant si et seulement si la matrice A est transitive et apériodique.*

◄ Comme dans la preuve précédente, si il existe i et j tel que $A^n(i, j) = 0$ pour une infinité de valeurs de n, alors le système n'est pas mélangeant puisque pour $\sigma^{-n}(C_j) \cap C_i$ est vide pour ces valeurs de n.

Supposons maintenant que A^n est à coefficients strictement positifs pour $n \geqslant N$. On montre comme ci-dessus que, si C est un cylindre déterminé par une suite de longueur l, et si $n \geqslant N$, alors $\varphi^{-(l+n)}(C) = \Sigma_A$ pour $n > N$. Ceci implique le mélange. ►

Nous allons maintenant nous intéresser aux décalages du point de vue de la théorie ergodique. Comme les cylindres sont compacts, toute suite décroissante de cylindres a une intersection non-vide. Cette propriété implique que toute mesure de probabilité additive sur les cylindres est en fait sigma additive, et se prolonge donc en une mesure de probabilité sur X. Comme tout cylindre est une réunion finie disjointe de cylindres élémentaires, une mesure de probabilité sur X est en fait déterminée par sa valeur sur les cylindres élémentaires, c'est à dire par les valeurs

$$m(y_0, y_1, \dots, y_l) := m(\pi_l^{-1}(y_0, \dots, y_l))$$

qui s'interprète comme la probabilité qu'une suite commence par $y_0, \dots, y_l$. Réciproquement, la famille de réels positifs $m(y)$, $y \in \cup_{l\geqslant 0} Y^l$ détermine une mesure de probabilité si et seulement si elle est compatible, c'est à dire si et seulement si

$$m(y_0, \dots, y_l) = \sum_{i=1}^{k} m(y_0, \dots, y_l, i)$$

pour tout $l \geqslant 0$ et tout $y = (y_0, \dots, y_l) \in Y^{l+1}$.

Si $p = (p_1, \dots p_k)$ est une probabilité sur Y, alors la mesure produit $m = p^{\mathbb{N}}$ est invariante pour le décalage. Rappelons que $m = p^{\mathbb{N}}$ correspond à

$$m(y_0, \dots, y_l) = p(y_0)p(y_1) \cdots p(y_l).$$

Elle est ergodique, comme nous l'avons déjà montré.

Nous allons étudier une famille plus générale de mesures invariantes, les mesures de Markov, qui correspondent aux chaînes de Markov. On dit que Q est une matrice stochastique si c'est une matrice carrée $k \times k$ à coefficients positifs telle que la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, c'est à dire que $Q\mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^k$ dont les coefficients sont égaux à 1. La donnée d'une matrice stochastique Q et d'une mesure de probabilité $p = (p_1, \dots, p_k)$ sur $\{1, \dots, k\}$ détermine une mesure sur X, déterminée par

$$m(y_0, \dots, y_l) = p(y_0)Q(y_0, y_1)Q(y_1, y_2) \cdots Q(y_{l-1}, y_l).$$

La condition de compatibilité découle directement du fait que Q est une matrice stochastique. On rappelle l'interprétation probabiliste de la mesure m, qui est la loi d'une suite de variables aléatoires à valeurs dans Y, telle que la loi de y_0 est donnée par p et, à chaque étape la loi de y_{n+1} si y_n vaut i est $j \mapsto Q(i, j)$.

Propriété 11.3. *Le rayon spectral d'une matrice stochastique est égal à* 1.

◄ Si Q est une matrice stochastique, alors Q^n est une matrice stochastique pour tout n. Ceci implique en particulier que la suite Q^n est bornée, et donc que le rayon spectral de Q est inférieur ou égal à 1. C'est donc 1, puisque 1 est valeur propre de Q. ►

On remarque que l'application $p \longmapsto pQ$ (p est une matrice ligne) préserve l'espace $\mathcal{P}(Y)$ des probabilités sur Y. De plus,

Propriété 11.4. *Si m_p est la mesure de Markov associée à la matrice Q et à la probabilité p, alors $\sigma_* m_p = m_{pQ}$.*

En particulier, la mesure m_p est invariante par σ si et seulement si $pQ = p$.

On dit que p est un probabilité stationnaire si $pQ = p$.

◄ Soit $y \in Y^{l+1}$ un mot fini. La préimage par σ du cylindre élémentaire associé à y est le cylindre associé à

$$Y \times \{y\} = \bigcup_{i\in Y} (i, y_0, \dots, y_l) \subset Y^{l+2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}(\sigma_* m_p)(y_0, \dots, y_l) &= \sum_{i\in Y} p(i)Q(i, y_0) \cdots Q(y_{l-1}, y_l) = (pQ)(y_0)Q(i, y_0) \cdots Q(y_{l-1}, y_l) \\ &= m_{pQ}(y_0, \dots, y_l).\end{aligned}$$

Les mesures $\sigma_* m_p$ et m_{pQ} sont égales sur les cylindres élémentaires, donc sur tous les ensembles. ►

Théorème 11.5. *Pour toute matrice stochastique Q, il existe $p \in \mathcal{P}(Y)$ tel que $pQ = p$, et donc tel que la mesure de Markov m_p est invariante par σ.*

◄ La méthode est classique. On considère n'importe quel $q \in \mathcal{P}(Y)$, et la suite $q_n := (q + qQ + \cdots + qQ^{n-1})/n$. Par compacité de $\mathcal{P}(Y)$, cette suite a des valeurs d'adhérence, et ces valeurs d'adhérence p vérifient $pQ = p$. ►

Étudions maintenant les propriétés ergodiques des mesures de Markov. On commence par un lemme naturel :

Lemme 11.6. *Soit Q une matrice stochastique. Si Q admet une unique probabilité invariante p, alors la mesure de Markov m_p correspondante est ergodique pour l'application σ. De plus, la matrice S^nQ/n converge vers P, la matrice stochastiques dont toutes les lignes sont égales à p.*

◄ Pour tout $q \in \mathcal{P}(Y)$, on a $(q + qQ + \cdots + qQ^{n-1})/n \longrightarrow p$. En effet, chaque valeur d'adhérence de cette suite est une probabilité invariante, donc est égale à p. Ceci implique que la matrice $S^nQ := (I + Q + Q^2 + \cdots + Q^{n-1})/n$ converge vers la matrice P dont toutes les lignes sont égales à p.

Soient C et C' les deux cylindres élémentaires déterminés par les mots finis $y = y_0 \cdots y_l$ et $z = z_0 \cdots z_m$. Pour n assez grand, on a

$$m_p(\sigma^{-n}(C) \cap C') = p(z_0)Q(z_0, z_1) \cdots Q(z_{l-1}, z_l)Q^{n-m-1}(z_m, y_0)Q(y_0, y_1) \cdots Q(y_{l-1}, y_l).$$

Si deux suites a_n et b_n sont égales à partir d'un certain rang, alors la convergence vers a de la suite a_n en moyenne de cesaro est équivalente à la convergence de b_n vers a en moyenne de Cesaro. Ici, on a

$$m_p(C')(S^nQ/n)(z_m, y_0)Q(y_0, y_1) \cdots Q(y_{l-1}, y_l) \longrightarrow m_p(C')m_p(C)$$

donc

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} m_p(\sigma^{-n}(C) \cap C') \longrightarrow m_p(C')m_p(C).$$

Cette convergence a alors lieu pour tous ensembles mesurables C et C'. Lorsque $C = C'$ est invariant, on obtient que $m_p(C) \in \{0, 1\}$. ►

La dernière affirmation de la preuve ci-dessus n'est pas évidente, nous la détaillons maintenant.

Propriété 11.7. *Soit $\mathcal{C}$ une algèbre d'ensemble qui engendre la tribu. Soit m une mesure de probabilité invariante d'une application mesurable φ.*

Si $m(\varphi^{-n}(C) \cap C') \longrightarrow m(C)m(C')$ pour tous C et C' dans $\mathcal{C}$, alors la mesure m est mélangeante.

Si $m(\varphi^{-n}(C) \cap C')$ tend vers $m(C)m(C')$ en moyenne de cesaro pour tous C et C' dans $\mathcal{C}$, alors la mesure m est ergodique.

◄ Posons $m_n(C, C') = m(\varphi^{-n}(C) \cap C')$ et $M_n(C, C') = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m(\varphi^{-i}(C) \cap C')$.

Les preuves sont identiques, nous allons par exemple traiter le cas de la suite M_n. On considère dans un premier temps l'ensemble des parties C de X telles que $M_n(C, C') \longrightarrow m(C)m(C')$ pour tout $C' \in \mathcal{C}$. On va montrer que cette ensemble est une classe monotone, et donc que c'est l'ensemble de tous les mesurables. Il est clairement stable par complémentation. Soit C_k une suite croissante d'ensembles vérifiant la propriété ci-dessus et $C = \sup C_k$. On vérifie facilement que $\liminf M_n(C, C') \geqslant m(C_k)m(C')$ pour tout $C' \in \mathcal{C}$. En appliquant cette inégalité à $X - C'$ on déduit que $\lim M_n(C, C') = m(C)m(C')$, et donc que C vérifie la propriété voulue.

On a montré que $M_n(C, C') \longrightarrow m(C)m(C')$ pour tout ensemble mesurable C et tout $C' \in \mathcal{C}$. On considère maintenant l'ensemble des parties C' de X telles que cette convergence a lieu pour tout borélien C. On montre comme ci-dessus que c'est une classe monotone, et donc que c'est l'ensemble des boréliens. ►

Théorème 11.8. *Soit Q une matrice stochastique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice Q est transitive.*
2. *La matrice Q admet une unique probabilité invariante p, dont les coefficients sont tous strictement positifs.*
3. *$S^nQ/n \longrightarrow P$, une matrice stochastique à coefficients strictement positifs dont toutes les lignes sont égales.*
4. *Il existe une probabilité invariante p à coefficients strictement positifs et telle que la mesure de Markov m_p est ergodique.*

◄ 1 ⇒ 2 Supposons la matrice Q transitive. Si p est une probabilité invariant, alors $pQ^n = p$ pour tout n, donc $p(S^nQ/n) = p$. En particulier, on peut prendre n tel que S^nQ est à coefficients strictement positifs, et on déduit que p est à coefficients strictement positifs.

Soit maintenant q un autre probabilité invariante, qui est donc elle aussi à coefficients strictement positifs. Soit i l'indice qui maximise le rapport p_i/q_i, et soit $r = p_i/q_i$, de sorte que $p_i \leqslant rp_j$ pour tout j. En posant $S = S^nQ/n$, qui est une matrice stochastique à coefficients strictement positifs, on a

$$\sum_j p_j S(j,i) = p_i = rq_i = \sum_j rq_j S(j,i) \geqslant \sum_j p_j S(j,i).$$

La dernière inégalité étant une égalité, on déduit que $rq_i S(j,i) = p_j S(j,i)$, et donc que $p_j = rq_j$ pour tout j. Comme q et p sont des probabilités, on a $q = p$.

2 ⇒ 3 est donné par le Lemme.

3 ⇒ 1 Si $S^nQ/n \longrightarrow P$ à coefficients strictement positifs, alors S^nQ est à coefficients strictement positifs pour n grand.

2 ⇒ 4 Est donné par le Lemme.

4 ⇒ 3 Supposons que m_p est ergodique. Dans ce cas on a la convergence en moyenne de Césaro de $m_p(\sigma^{-n}(C) \cap C')$ vers $m_p(C)m_p(C')$ pour tous C et C' mesurables. En appliquant cette convergence lorsque $C' = \pi_0^{-1}(i)$ et $C = \pi_0^{-1}(j)$, on obtient que $p(i)S_nQ(i,j)/n \longrightarrow p(i)p(j)$ pour tous i, j. Comme $p(i) > 0$ ceci prouve 3. ►

Exercice 11.2. *Soit A une matrice $k \times k$ transitive à coefficients positifs. Il existe une mesure de Markov m ergodique dont le support est Σ_A.*

On dit que la matrice Q est apériodique si il existe n tel que Q^n est à coefficients strictement positifs. L'exemple typique d'une matrice stochastique transitive mais pas apériodique est la matrice d'une permutation circulaire des états.

Théorème 11.9. *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour une matrice stochastique Q.*

La matrice Q est transitive et apériodique.

$Q^n \longrightarrow P$, une matrice stochastique à coefficients strictement positifs dont toutes les lignes sont égales.

La valeur propre 1 *est de multiplicité algébrique égale à* 1*, et toutes les autres valeurs propres complexes sont de module strictement inférieur à* 1.

Il existe une mesure invariante p à coefficients strictement positifs telle que la mesure de Markov m_p est mélangeante.

◄ Le fait que le premier point implique le second est une des variantes du théorème de Perron-Frobenius. Nous l'admettons ici, nous y revenons au chapitre 13, théorème 13.8.

Réciproquement, si $Q^n \longrightarrow P$, et si P est à coefficients strictement positifs, alors il existe n tel que Q^n est à coefficients strictement positifs, c'est à dire que Q est apériodique.

Supposons que $Q^n \longrightarrow P$. Le calcul fait ci-dessus montre alors que $m_p(\sigma^{-n}(C) \cap C') \longrightarrow m_p(C)m_p(C')$ pour tous cylindres élémentaires C et C', et donc pour tous ensembles mesurables C et C'. La mesure m_p est donc mélangeante.

Supposons que $Q^n \longrightarrow P$. Soient C et C' les deux cylindres élémentaires déterminés par les mots finis $y = y_0 \cdots y_l$ et $z = z_0 \cdots z_m$. Pour n assez grand, rappelle l'expression

$$m_p(\sigma^{-n}(C) \cap C') = p(z_0)Q(z_0, z_1) \cdots Q(z_{l-1}, z_l)Q^{n-m-1}(z_m, y_0)Q(y_0, y_1) \cdots Q(y_{l-1}, y_l)$$

et donc, sous notre hypothèse $m_p(\sigma^{-n}(C) \cap C') \longrightarrow m_p(C)m_p(C')$. Cette convergence pour les cylindre entraîne cette convergence pour tous les ensembles mesurables C et C', c'est à dire le mélange de m_p.

Supposons que m_p est mélangeante et p à coefficients strictement positifs. Dans ce cas on a la convergence de $m_p(\sigma^{-1}(C) \cap C')$ vers $m_p(C)m_p(C')$ pour tous C et C' mesurables. En appliquant cette convergence lorsque $C' = \pi_0^{-1}(i)$ et $C = \pi_0^{-1}(j)$, on obtient que $p(i)Q^{n-1}(i,j) \longrightarrow p(i)p(j)$ pour tous i, j. Comme $p(i) > 0$ ceci implique que $Q^n \longrightarrow P$. ►

Exercice 11.3. *Soit Q une matrice stochastique transitive. Montrer que Q est apériodique si et seulement si* 1 *est une racine simple du polynôme caractéristique de Q, et si de plus les autres valeurs propres complexes sont de module* < 1.

Finissons ce chapitre par quelques considérations sur la dynamiques topologiques des décalages de type fini. On se donne donc une matrice A à coefficients positifs. On suppose de plus que chaque ligne de A contient un coefficient non nul. On peut penser à A comme à une relation sur l'ensemble $\{1, \ldots, k\}$, et donc à une dynamique multivaluée. (avec iRj si et seulement si $A(i,j) > 0$). L'état $i \in Y$ est dit errant si $A^n(i,i) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. Sinon, il est dit récurrent (il n'y a pas lieu de distinguer point non-errant et point récurrent dans ce cas simple ou l'espace des états est discret, ces points sont aussi les points récurrents par chaines).

On peut noter $\rhd$ la relation $i \rhd j$ si et seulement si il existe $n \geqslant 1$ tel que $A^n(i,j) > 0$. C'est en fait la relation de connection par chaines. La relation $\lhd\rhd$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des points récurrents. On dit que A est transitive si elle l'est en tant que dynamique multivaluée, c'est à dire si pour tous i et j dans $1, \ldots, k$, il existe N tel que $A^N(i,j) > 0$. Si A n'est pas transitive, alors :

Proposition 11.10. *Si la matrice A n'est pas transitive, alors il existe une partition de l'alphabet Y en deux parties non vides I et J qui ont la propriété que $A^n(i,j) = 0$ pour tout n, $i \in I$, et $j \in J$.*

◄ On peut en donner une démonstration élémentaire, mais nous allons en donner une qui utilise les considérations précédentes sur les fonctions de Lyapounov des relations dynamiques. En effet ici la relation associée à A est fermée, et engendre la relation transitive fermée $iLj \Leftrightarrow \exists n \,:\, A^n(i,j) > 0$. Si la matrice A n'est pas transitive, alors la relation L n'est pas totale, donc il existe une fonction de Lyapounov non triviale, c'est à dire ici un vecteur $f \in \mathbb{R}^k$ qui a la propriété que $f(j) \leqslant f(i)$ si $A(i,j) > 0$. En considérant une valeur appropriée de la fonction f, on partitionne $\{1, \ldots, k\}$ en deux parties I et J telles que $f(i) < f(j)$ si $u \in I, j \in J$. Ceci implique que $A(i,j) = 0$. ►

Dans la situation de la propriété, l'ensemble $J^{\mathbb{N}}$ vérifie $\sigma^{-1}(\Sigma_A \cap J^{\mathbb{N}}) = \Sigma_A \cap J^{\mathbb{N}}$.

Exercice 11.4. *L'état i est récurrent pour A si et seulement il existe un mot commençant par i qui est non-errant pour σ_A.*

On dit que τ est une période de l'état i si $A^\tau(i,i) > 0$. L'ensemble $T(i)$ des périodes de i est un semi-groupe de $\mathbb{N}$, c'est à dire qu'il est stable par addition. L'état i est dit errant si $T(i) = \{0\}$.

Lemme 11.11. *Soit T un semi-groupe de $\mathbb{N}$ qui contient un élément non nul. Alors il existe un nombre entier $r > 0$, le PGCD des éléments de T, tel que tous les éléments de T sont des multiples de r, et tous les multiples de r sont des éléments de T sauf un nombre fini d'entre eux.*

◄ La suite r_k des PGCD des k premiers éléments de P est une suite décroissantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc elle se stabilise à une valeur r. Il existe alors une relation $r = n_1 p_1 + \cdots + n_k p_k$, où $n_i \in \mathbb{Z}$ et p_i sont les éléments de P classés par ordre croissant. Posons maintenant $m = |n_1| p_1 + \cdots + |n_k| p_k$. Soit a un grand multiple de r. Par division Euclidienne, on écrit $a = bm + qr$, où $0 \leqslant q < m/r$, et donc

$$a = (b|n_1| + qn_1)p_1 + \cdots + (b|n_k| + qn_k)p_k.$$

Si $a > m^2/r$, donc $b > m/r$, alors les coefficients sont tous des entiers positifs donc $a \in P$. ►

Pour chaque i, on note $\tau(i)$ le PGCD des périodes de l'état i. On convient que $\tau(i) = 0$ si i est un état errant.

Propriété 11.12. *Si A est transitive, tous les états ont la même période.*

◄ Soient i et j deux états, et soient n et m tels que $A^n(i,j) > 0$ et $A^m(j,i) > 0$. Alors si $l\tau(i)$ est une période de i, $l\tau(i) + n + m$ est une période de j et donc est un multiple de $\tau(j)$. On a donc, $l\tau(i) + n + m = 0 \mod \tau(j)$ pour tout l assez grand, ce qui implique que $\tau(i) = 0$ modulo $\tau(j)$, c'est à dire que $\tau(j)$ divise $\tau(i)$. De manière symétrique, $\tau(i)$ divise $\tau(j)$, donc $\tau(i) = \tau(j)$. ►

Lemme 11.13. *Les périodes $\tau(i), i \in Y$ sont toutes égales à 1 si et seulement si il existe N tel que $A^N(i,j) > 0$ pour tous i et j. On dit alors que A est apériodique.*

◄ Si tous les coefficients de A^N sont strictement positifs, alors il en est de même de A^n pour tout $n \geqslant N$. Ceci implique en particulier que $p(i) = 1$ pour tout i.

Réciproquement, si $p(i) = 1$, alors il existe k_i tel que $A^n(i,i) > 0$ pour tout $n \geqslant k_i$. Il existe donc k tel que tous les coefficients diagonaux de A^n sont strictement positifs lorsque $n \geqslant k$. Si de plus A est transitive, alors pour tout (i,j), il existe $m(i,j)$ tel que $A^{m(i,j)}(i,j) > 0$. Comme $A^{m(i,j)+n}(i,j) \geqslant A^n(i,i) A^{m(i,j)}(i,j)$, on déduit que ces coefficients sont strictement positifs pour tout $n \geqslant k$, donc que A^N est à coefficients strictement positifs pour N assez grand. ►

12 Applications dilatantes

On considère une application $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, on munit l'intervalle de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ.

On suppose qu'il existe un ouvert Y_1 de mesure totale sur lequel φ est C^2. L'ouvert Y_0 est donc une réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts $I_i, i \in \mathcal{S}$. On suppose que la restriction de φ à chacun de ces intervalles est un difféomorphisme sur $]0,1[$. On suppose de plus qu'il existe $a > 1$ et une constante $C > 0$ telles que

$$|\varphi'(x)| \geqslant a > 1 \quad , \quad |\varphi''(x)| \leqslant C$$

pour tout $x \in Y_1$. On ne suppose pas l'application φ continue hors de Y_1. Sous ces hypothèses précédentes, on a :

Théorème 12.1. *Il existe une fonction Lipschitz $g : [0,1] \longrightarrow]0,\infty)$ telle que la mesure $m = g\lambda$ est une probabilité invariante. La mesure m est ergodique, et même mélangeante. C'est la seule probabilité invariante absolument continue.*

On a alors $S^n_*\delta_x/n \longrightarrow m$ pour λ-presque tout x (puisque les ensembles de mesure nulle pour λ sont les mêmes que les ensembles de mesure nulle pour m).

L'ergodicité de m implique qu'aucune autre probabilité invariante n'est absolument continue par rapport à λ.

Trois exemples type sont :

L'application $x \longmapsto 2x$ sur $]0,1/2[$ et $x \longmapsto 2x-1$ sur $]1/2,1[$ (qui, pour la théorie ergodique, est l'application $x \longmapsto 2x$ sur $\mathbb{T}$).

L'application tente $x \longmapsto 1-|2x-1|$.

L'application de Gauss $x \longmapsto \{1/x\}$ (partie fractionnaire de $1/x$).

En réalité, l'application de Gauss ne vérifie pas exactement les hypothèses car $\varphi'(1) = 1$. On vérifie toutefois facilement que $\varphi\circ\varphi$ vérifie les hypothèses ci-dessus, et donc φ^n pour tout $n \geqslant 2$. On a la même conclusion au vu de l'exercice suivant :

Exercice 12.1. *Soit φ une application mesurable de l'espace mesurable X. Soit λ une mesure de probabilité sur X. Supposons qu'il existe n tel que φ^k a une unique mesure de probabilité invariante absolument continue par rapport à λ pour tout $k \geqslant n$.*

Montrer que la probabilité invariante absolument continue de φ^k ne dépend pas de k.

Montrer que φ admet une unique mesure de probabilité absolument continue invariante, notée m.

Si m est mélangeante ou ergodique pour φ^k pour tous les k assez grand, montrer qu'elle l'est aussi pour φ.

Exercice 12.2. *Dans le cas de l'application de Gauss $\varphi(x) = \{1/x\}$, montrer que $g = ((\log 2)(1+x))^{-1}$.*

Commençons par quelques définitions. On note $Y_n := \varphi^{-(n-1)}(Y_1)$ et Z_n son complémentaire, qui est un fermé de mesure nulle. On note finalement $Y = \cap Y_n$, c'est l'ensemble des points dont l'orbite reste dans Y_1, et $Z = [0,1] - Y$. Pour chaque $i \in \mathcal{S}_1$, on note φ_i le restriction de de φ à I_i, qui est un difféomorphisme sur $]0,1[$. Pour tout itinéraire $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}^n$, on note

$$I(i_0, \dots, i_n) := I_{i_0} \cap \varphi^{-1}(I_{i_1}) \cap \cdots \cap \varphi^{-n}(I_{i_n}),$$

c'est l'ensemble des points qui partent de I_{i_0}.

Propriété 12.2. *Pour tout itinéraire $(i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{S}^{n+1}$, la restriction à $I(i_0,, \dots, i_n)$ de l'application φ^{n+1} est un difféomorphisme sur $]0,1[$. En particulier, l'ouvert $I(i_0, \dots, i_n)$ est un intervalle.*

Ceci implique en particulier que les itérées φ^n vérifient les mêmes hypothèses que φ, avec un ouvert de régularité Y_n, un ensemble d'intervalles indexé par les itinéraires $\mathcal{S}^n$, la constante de dilatation a^n, et une constante C_n.

◄ On montre l'énoncé par récurrence sur n. Comme

$$I(i_0,, \dots, i_n) = I(i_0) \cap \varphi^{-1}(I(i_1, \dots, i_n)) = \varphi_{i_0}^{-1}(i_1, \dots, i_n),$$

cet ensemble est un intervalle, et la restriction de φ à cet intervalle est un difféomorphisme sur $I(i_1, \dots, i_n)$. Alors, $\varphi^{n+1} = \varphi^n\circ\varphi$ est un difféomorphisme comme composée des deux difféomorphismes $\varphi : I(i_0,, \dots, i_n) \longrightarrow I(i_1, \dots, i_n)$ et $\varphi^n : I(i_1, \dots, i_n) \longrightarrow]0,1[$. ►

On note $\mathcal{A}_1$ la tribu constituée des parties de $[0,1]$ qui sont réunion d'intervalles I_i et d'une partie de Z_1. On note de même $\mathcal{A}_n$ la tribu dont les éléments sont les réunions d'intervalles de la forme $I(i_0, i_1, \dots i_{n-1})$ et d'une partie de Z_n. Pour tout n, l'application φ est mesurable de $([0,1], \mathcal{A}_{n+1})$ dans $([0,1], \mathcal{A}_n)$. En fait, la tribu $\mathcal{A}_{n+1}$ est la tribu engendrée par $\varphi^{-1}(\mathcal{A}_n)$ et $\mathcal{A}_n$. On note finalement $\mathcal{A} = \cup_n \mathcal{A}_n$, c'est une algèbre d'ensembles.

Propriété 12.3. *Pour tout itinéraire, on a $\lambda(I(i_0, i_1, \dots, i_n)) \leqslant a^{-n}$. L'ensemble Z est donc dense dans* $[0,1]$*, et l'algèbre $\mathcal{A}$ engendre la tribu borélienne.*

◄ On a vu que $I(i_0, \dots i_n)$ est un intervalle en restriction duquel φ est un difféomorphisme sur $]0,1[$. On a donc soit $\varphi^n \geqslant a^n$ soit $\varphi^n \leqslant -a$ sur cet intervalle. Dans les deux cas,

$$1 = \lambda(\varphi^n(I(i_0, \dots, i_n))) \geqslant a^n \lambda(I(i_0, \dots i_n))$$

ce qui donne la première inégalité. La densité de Z découle du fait que Z_n est a^{-n}-dense. Comme Z est dense, tout intervalle fermé de $[0,1]$ est une intersection dénombrable d'intervalles à extrémités dans Z, et donc d'éléments de $\mathcal{A}$. ►

Montrons d'abord le théorème dans le cas particulier où les branches sont affines, c'est à dire ou φ' est constante sur I_i, et donc égale à $\varphi_i'(x) = \pm 1/\lambda(I_i)$ pour $x \in I_i$. Montrons pour commencer que la mesure de Lebesgue λ est invariante. La préimage d'un borélien B est la réunion des $B_i := \varphi_i^{-1}(B)$. On a $\lambda(B_i) = \lambda(B)\lambda(I_i)$, donc

$$\lambda(\varphi^{-1}(B)) = \sum_i \lambda(B_i) = \lambda(B).$$

Ceci montre l'invariance de λ. Montrons maintenant le mélange. On a vu que

$$\lambda(\varphi^{-1}(B) \cap I_i) = \lambda(B)\lambda(I_i).$$

On peut appliquer ce résultat aux applications φ^n :

$$\lambda(\varphi^{-n}(B) \cap A) = \lambda(B)\lambda(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}_n$. Ceci montre que la convergence $\lambda(\varphi^{-n}(B) \cap A) \longrightarrow \lambda(B)\lambda(A)$ a lieu pour tout $A \in \mathcal{A}$, et donc pour tout $A \in \mathcal{B}$. La mesure λ est donc mélangeante.

Si f est une fonction strictement positive et Lipschitz sur $[0,1]$, alors $\log \circ f$ est une fonction Lipschitz.

Lemme 12.4. *Soit $\mu = f\lambda$ une mesure de probabilité. Supposons que f est une fonction Lipschitz et strictement positive. La mesure $\varphi_*\mu$ admet une densité h strictement positive qui vérifie*

$$\mathrm{Lip}(\log \circ h) \leqslant Ca^{-2} + a^{-1}\mathrm{Lip}(\log \circ f)$$

pour une constante C indépendante de f. Cette inégalité est aussi satisfaite par les densités h_i des mesures $(\varphi_i)_*(\mu_{|I_i})$.

◄ Pour chaque $i \in \mathcal{S}_0$, la restriction φ_i de φ à I_i est un difféomorphisme sur $]0,1[$. La densité h_i de la mesure $(\varphi_i)_*(\mu_{|I_i})$ est donc $h_i = (f \circ \varphi_i^{-1})/|\varphi' \circ \varphi^{-1}|$. On a alors

$$\mathrm{Lip}(\log \circ h_i) \leqslant \mathrm{Lip}(\log \circ f)\mathrm{Lip}(\varphi_i^{-1}) + \mathrm{Lip}(\log \circ |\varphi_i'| \circ \varphi_i^{-1}) \leqslant a^{-1}\mathrm{Lip}(\log \circ f) + Ca^{-2}$$

où on rappelle que C est la borne de φ''. On a $\varphi_*\mu = \sum_i (\varphi_i)_*(\mu_{|I_i})$ la densité de cette mesure est $h := \sum_i h_i$. Pour montrer que cette somme de fonctions positives converge il suffit de la majorer. Pour ceci, on constate que la fonction h_i, qui est continue, atteint forcément sa valeur moyenne, qui est $\mu(I_i)$. La fonction $\log \circ h_i$ prend donc la valeur $\log(\mu(I_i))$, et donc elle est majorée par $\log(\mu(I_i)) + \mathrm{Lip}(\log \circ h_i)$. On a donc

$$h_i \leqslant \mu(I_i) e^{\mathrm{Lip}(\log \circ h_i)} \leqslant \mu(I_i) e^{Ca^{-2} + a^{-1}\mathrm{Lip}(\log \circ f)}$$

et donc $\sum h_i \leqslant \exp(Ca^{-2} + a^{-1}\mathrm{Lip}(\log \circ f))$. Chacune des fonctions h_i satisfait

$$h_i(x) \leqslant h_i(y) e^{|y-x|(Ca^{-2} + a^{-1}\mathrm{Lip}(\log \circ f))}$$

pour tous x et y. Il en est donc de même de la somme h, c'est à dire qu'on a $\mathrm{Lip}(\log \circ h) \leqslant a^{-1}\mathrm{Lip}(\log \circ f) + Ca^{-2}$. ►

On peut alors démontrer l'existence de la mesure m du théorème 12.1. On se donne une constante L assez grand pour que $Ca^{-2} + a^{-1}L \leqslant L$. Alors pour toute fonction f vérifiant $\mathrm{Lip}(\log \circ f) \leqslant L$ et $\int f d\lambda = 1$ (par exemple la fonction $f = 1$), on pose $\mu = f\lambda$ et on considère comme d'habitude la suite $S_*^n\mu/n$. Il découle du Lemme précédent que cette mesure admet une densité g_n qui vérifie $\mathrm{Lip}(\log \circ g_n) \leqslant L$. Comme les fonctions g_n prennent la valeur 1, on déduit facilement qu'elles sont equi-Lipschitz. On trouve donc par Ascoli une sous-suite qui converge uniformément vers une limite Lipschitz g. La mesure $m = g\lambda$ est alors une valeur d'adhérence de la suite $S_*^n\mu/n$, la densité g satisfait $\mathrm{Lip}(\log \circ g) \leqslant L$, donc g se prolonge en une fonction Lipschitz strictement positive de $[0,1]$.

L'existence d'une mesure de probabilité invariante $m = h\lambda$ avec $\mathrm{Lip}(\log h) \leqslant L$ est démontrée. En appliquant le résultat aux applications φ^n, on obtient :

Propriété 12.5. *Pour tout itinéraire $j = (i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{S}_n$, la mesure $m_j = (\varphi_j^n)_*(m_{|I})$, où $I = I(i_0, \dots, i_n)$. Chacune des mesures m_j admet une densité h_j qui vérifie* $\mathrm{Lip}(\log \circ h_j) \leqslant L$ *et donc*

$$m(I_j)e^{-L} \leqslant h_j \leqslant m(I_j)e^L.$$

Intéressons nous aux propriétés d'ergodicité et de mélange de la mesure invariante m.

Proposition 12.6. *Si B est un Borélien invariant et si $A \in \mathcal{A}$, alors*

$$m(B \cap A) \geqslant m(B)m(A)e^{-2L}.$$

La même conclusion est aussi vérifiée si B est asymptotiquement mesurable.

◄ Il suffit de démontrer l'affirmation lorsque $A = I(i_0, \dots, i_{n-1})$. Si B est invariant, ou asymptotiquement mesurable, alors pour tout n il existe un ensemble mesurable B_n tel que $B = \varphi^{-n}(B_n)$. En notant φ_A^n la restriction de φ^n à A, qui est un difféomorphisme sur $]0, 1[$, on a alors

$$m(B \cap A) = m_A(B_n) = \int_{B_n} h_A d\lambda \geqslant \lambda(\varphi^n(B))m(A)e^{-L} \geqslant m(B_n)m(A)e^{-2L} = m(B)m(A)e^{-2L}.$$

On a utilisé l'invariance de m, qui implique que $m(B) = m(B_n)$. ►

Nous allons déduire de cet énoncé que, si B est invariant ou asymptotiquement mesurable, alors $m(B) \in \{0, 1\}$. C'est à dire que m est ergodique, et même exacte, donc mélangeante.

Si l'on avait le résultat de l'énoncé pour tout Borélien A, la conclusion serait immédiate. Il suffit en effet de prendre pour A le complémentaire de B. On déduis alors que $m(A)m(B) = 0$ et donc que ou bien B ou bien son complémentaire est de mesure nulle.

Cependant, comme le complémentaire de B n'est pas forcément dans $\mathcal{A}$, on utilise :

Lemme 12.7. *Soit B un borélien tel que $m(B) < 1$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $n \geqslant 0$ et un itinéraire $i_0, \dots, i_n$ tel que $m(B \cap I(i_0, \dots, i_n)) \leqslant \epsilon m(I(i_0, \dots, i_n))$.*

◄ Presque tout point x de $[0, 1] - B$ est un point de Lebesgue, c'est à dire que $\lambda(B \cap]x - r, x + r[) = o(r)$ lorsque $r \longrightarrow 0$. On considère un point x_0 de $Y - B$ qui a cette propriété. Pour tout n, on considère l'intervalle $I(i_0, \dots, i_{n-1})$ qui contient x_0. Il est de la forme $]x_0 - d_n, x_O + \delta_n[$, où d_n et δ_n tendent vers 0. On note $r_n = \max(d_n, \delta_n)$. Comme x_0 est un point de Lebesgue, on a, pour n grand,

$$\lambda(B \cap I(i_0, \dots, i_{n-1})) \leqslant \lambda(B \cap]x_0 - r_n, x_1 + r_n[) \leqslant \epsilon r_n \leqslant \epsilon \lambda(I(i_0, \dots, i_{n-1})).$$

On revient à m en rappelant que sa densité h vérifie $e^{-L} \leqslant h \leqslant e^L$. ►

On peut maintenant montrer :

Propriété 12.8. *Soit B un Borélien qui est asymptotiquement mesurable, alors* $m(B) \in \{0, 1\}$.

◄ Pour tout $\epsilon > 0$, on choisit $A = I(i_0, \dots, i_n)$ tel que $m(B \cap A) \leqslant \epsilon m(A)$. On a alors $\epsilon m(A) \geqslant m(B \cap A) \geqslant m(B)m(A)e^{-2L}$ et donc $m(B) \leqslant \epsilon e^{2L}$. Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, $m(B) = 0$. ►

Pour ce qui concerne le mélange, on rappelle finalement :

Proposition 12.9. *Si m est une mesure de probabilité invariante telle que* $m(B) \in \{0, 1\}$ *pour tout B asymptotiquement mesurable, alors m est mélangeante.*

◄ On considère l'espace de Hilbert $H = L^2(X, m)$, et les sous-espaces fermés $H_n = L^2(X, \varphi^{-n}(\tau), m)$. Ces sous-espaces forment une suite décroissante, et l'hypothèse est que cette intersection est l'ensemble des fonctions constantes, identifié à $\mathbb{R}$.

Posons $F_n = H_n \cap H_{n+1}^{\perp}$, c'est donc l'orthogonal de H_{n+1} dans H_n. Posons $G_n = \mathbb{R} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$ et $G = \cup_n G_n$. Le sous-espace G est dense dans H.

L'application $f \longmapsto f \circ \varphi^n$ envoie H sur H_n, de sorte que $\int g(f \circ \varphi^n) dm = \int f \int g$ à partir d'un certain rang pour $f, g \in G_n$. Par l'argument classique de densité, le mélange en découle. ►

13 Mélange et théorème de Perron Frobenius

Pour étudier les mesures invariantes, on a été amené à considérer à plusieurs reprises la transformation $m \mapsto \varphi_* m$ sur l'ensemble des mesures de probabilité. On a, par exemple, vu que cette application admet un point fixe si X est un espace métrique compact et φ est continue. Notons que dans ce cas, l'espace $\mathcal{P}$ est un espace métrique compact et φ_* est une application continue. On peut considérer $(\mathcal{P}, \varphi_*)$ comme un système dynamique topologique.

La dynamique la plus simple que l'on pourrait imaginer pour $(\mathcal{P}, \varphi_*)$ est celle d'un unique point fixe qui attirerait tous les autres points. Mais ceci arrive rarement. En effet, pour tout $x \in X$, on a $\varphi_* \delta_x = \delta_{\varphi(x)}$, et une suite de diracs ne peut converger que vers un dirac. Donc la dynamique $(\mathcal{P}, \varphi_*)$ a un unique point fixe qui attire tous les autres points si et seulement si (X, φ) a la même propriété.

Dans ce chapitre, nous allons relier les propriétés ergodiques d'une mesure, et en particulier son caractère mélangeant, à ses propriétés d'attractivité en tant que point fixe de φ_*. Au niveau formel, ce lien est élémentaire : La probabilité invariante m est mélangeante si et seulement si $\int f \circ \varphi^n g dm \longrightarrow \int f dm \int g dm$ pour toutes fonctions continues f et g. Ceci est équivalent à dire que $\varphi_*^n \mu \longrightarrow m$ pour toute probabilité μ admettant une densité continue par rapport à m (ou plus généralement une densité par rapport à m). Autrement dit, la mesure m est mélangeante si et seulement si domaine d'attraction en tant que point fixe de φ_* contient les mesures ayant une densité par rapport à m.

La structure particulière du système $(\varphi_*, \mathcal{P}(X))$ (il s'agit d'une application linéaire sur un ensemble convexe) suggère l'utilisation des distances de Hilbert, qui sont des distances contractées par les applications linéaires. Pour définir cette distance sur le convexe $W \subset E$, On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions sur E qui sont le quotient de deux fonctions affines, et $\mathcal{H}_W$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{H}$ qui sont définies et strictement positives sur W. Toute fonction de $\mathcal{H}_W$ s'écrit comme le quotient de deux fonctions affines strictement positives sur W. La distance de Hilbert sur W est définie par

$$\theta_W(x, y) = \sup_{f \in \mathcal{H}_W} \log \circ f(x) - \log \circ f(y) = \log \sup_f \frac{f(x)}{f(y)}.$$

On vérifie facilement que θ_W prend ses valeurs dans $[0, \infty]$ et qu'elle satisfait l'inégalité triangulaire. On notera θ au lieu de θ_W quand il n'y a pas d'ambiguïté. On commence par énoncer la propriété de contraction, qui est une conséquence immédiate de la définition :

Propriété 13.1. *Soit $F(x) : L(x)/l(x)$ une application de E dans E qui est le quotient d'une application linéaire L et d'une forme linéaire l. Supposons que $F(W) \subset W$ (donc en particulier que l ne s'annule pas sur W). Alors*

$$\theta_W(F(x), F(y)) \leqslant \theta_W(x, y)$$

pour tous x et y dans W.

On ajoute une seconde propriété immédiate mais importante :

Propriété 13.2. *Soit $U \subset W$ deux convexes. Alors $\theta_U(x, y) \geqslant \theta_W(x, y)$ pour tous x et y dans U.*

Proposition 13.3. *Si W a la propriété que toute droite affine D intersecte W suivant un intervalle ouvert strictement contenu dans D, alors θ_W est une distance sur W.*

L'exemple le plus simple est celui d'un convexe ouvert dans un espace vectoriel topologique localement convexe. L'ensemble des mesures de probabilité est un exemple délicat. Il est compact et donc ne vérifié pas l'hypothèse ci-dessus. Plus grave, il n'est pas évident de lui définir un intérieur lorsque X n'est pas dénombrable. En effet, si m est une mesure de probabilité, alors il existe une mesure de probabilité μ telle que m est dans le bord de $\mathcal{P} \cap D$, où D est la droite affine engendrée par m et μ. Il suffit pour ceci de prendre pour μ un dirac supporté par un point x tel que $m(\{x\}) = 0$. Nous verrons plus tard qu'il est quand même possible de faire des choses.

La propriété précédente découle de :

Propriété 13.4. *Soient $x, y \in K$, soit D la droite affine contenant x et y. Sur D, soient p et q les bords de l'intervalle $D \cap K$. On se donne une paramétrisation affine de D et on suppose que p et q sont choisis tels que l'ordre des points sur le droite D est p, x, y, q. On suppose que D n'est pas contenue dans K, c'est à dire que $p > -\infty$ ou $q < +\infty$. Alors on a*

$$\theta_W(x, y) = \log \frac{(y-p)(q-x)}{(q-y)(x-p)} \quad , \quad \theta_W(x, y) = \log \frac{q-x}{q-y} \text{ si } p = -\infty \quad , \quad \theta_W(x, y) = \log \frac{y-p}{x-p} \text{ si } q = \infty.$$

◄ Toute fonction affine sur D qui est positive sur $D \cap K$ se prolonge en une fonction affine sur E qui est positive sur K, par le théorème de Hahn Banach. Ceci implique que $\theta_K(x, y) = \theta_{K \cap D}(x, y)$.

On travaille maintenant en restriction à la doite D. Soit l est une fonction affine strictement positive sur $]p, q[$, alors :

Soit $l(x) = a(x - z)$, avec $a > 0$ et $z \leqslant p$, et alors $l(y)/l(x) \leqslant (y - p)/(x - p)$.

Soit $l(x) = a$, alors $l(y)/l(x) = 1 \leqslant (y - p)/(x - p)$.

Soit $l(x) = a(w - x)$ avec $a > 0$ et $w \geqslant q$. Dans ce cas, $l(y)/l(x) \leqslant 1 \leqslant (y - p)/(x - p)$.

Dans tous les cas, on a $l(y)/l(x) \leqslant (y-p)/(x-p)$. De manière similaire, on a $g(x)/g(y) \leqslant (q-x)/(q-y)$. On déduit finalement, avec $f = g/l$, que

$$\frac{f(x)}{f(y)} = \frac{g(x)l(y)}{g(y)l(x)} \leqslant \frac{(y-p)(q-x)}{(q-y)(x-p)}. \blacktriangleright$$

Propriété 13.5. *Soit $\mathcal{F}$ une famille d'applications affines. Considérons le convexe $W = \cap_{f\in\mathcal{F}}\{f > 0\}$. Alors le supremum dans la definition de θ_W peut être pris sur les fonctions $f = l/g$ avec l, g dans $\mathcal{F}$.*

◄ Il suffit de le démontrer pour un intervalle $]p, q[\in \mathbb{R}$. La famille $\mathcal{F}$ contient alors des éléments $l_n = a_n(x - p_n)$ et $g_n = b_n(q_n - x)$, où $p_n < p$ tend vers p, $q_n > q$ tend vers q, et $a_n > 0$, $b_n > 0$. Pour $x < y$ dans $]q, p[$, on a alors $l_n(y)g_n(x)/l_n(x)g_n(y) \longrightarrow \theta(x, y)$ donc $\theta(x, y) \leqslant \sup_{l,g\in\mathcal{F}} l(y)g(x)/l(x)g(y)$. ►

Propriété 13.6. *Soit W un convexe ouvert (resp. borné pour la norme) d'un espace vectoriel normé. Alors la topologie associée à la distance θ sur W est plus forte (resp. plus faible) que la topologie ambiante.*

Soit W un convexe ouvert et borné d'un espace de Banach E, alors la distance θ_W est complète.

◄ Si W est ouvert, pour tout $x \in W$, il existe r tel que $B(x, r) \subset W$. Ceci implique que $\theta_W \leqslant \theta_{B(x,r)}$ sur $B(x, r)$. et donc que

$$\theta(x, y) \leqslant \log \frac{r + |y - x|}{r - |y - x|} \quad (= 2\tanh(|y - x|/r))$$

pour tout $y \in B(x, r)$. La convergence vers x pour la norme implique donc la convergence pour θ.

Si W est borné, alors il existe $R > 0$ tel que $W \subset B(x, R)$ pour tout x. Ceci implique que, pour tous x et y,

$$|y - x| \leqslant R\tanh(\theta(x, y)/2).$$

Si W est borné, on conclut donc que toute suite de Cauchy x_n pour θ est de cauchy pour la norme. Elle converge donc vers un point $x \in \bar{W}$. Si x n'est pas dans W, alors il existe une fonction affine continue l qui est nulle en x et strictement positive sur W. On a alors $\theta_W(x_n, x_m) \geqslant \log f(x_n) - \log f(x_m) \longrightarrow +\infty$ lorsque $m \longrightarrow \infty$, ce qui est une contradiction. ►

Théorème 13.7. *Soit $U \subset W$ deux convexes. On suppose que W ne contient aucune droite affine, de sorte que θ_W est une distance sur W (qui peut prendre la valeur $+\infty$). On suppose de plus que le diamètre Δ de U pour la distance θ_W est fini. Alors*

$$\theta_W \leqslant \theta_U \tanh(\Delta/4).$$

En conséquence, si l'application $F = L/l : W \longrightarrow W$ est telle que le diamètre Δ de son image est fini, alors elle est strictement contractante de rapport $\tanh(\Delta/4)$ *pour la distance θ_W.*

◄ Il suffit de démontrer le résultat en dimension 1.

On remarque d'abord que, pour $0 < \delta \leqslant 1/2$, $\theta_{[0,1]}(\delta, 1 - \delta) = 2\log(1 - \delta) - 2\log\delta$. C'est le diamètre Δ du segment $]\delta, 1 - \delta[$. On a donc $\delta = 1/(e^{\Delta/2} + 1)$. Tout intervalle de diamètre Δ dans $]0, 1[$ est équivalent, par une transformation homographique, à l'intervalle $]\delta, 1 - \delta[$.

Nous devons maintenant montrer que

$$\theta_{]0,1[}(x, y) \leqslant (1 - 2\delta)\theta_{]\delta,1-\delta[}(x, y) = \tanh(\Delta/4)\theta_{]\delta,1-\delta[}(x, y)$$

pour tous $x \leqslant y$ dans $]\delta, 1 - \delta[$. On écrit d'abord

$$\theta_{]0,1[}(x, y) = \log \frac{y}{1 - y} - \log \frac{x}{1 - x} = \int_x^y \frac{1}{t(1 - t)} dt$$

et

$$\theta_{]\delta,1-\delta[}(x, y) = \log \frac{y - \delta}{1 - y - \delta} - \log \frac{x - \delta}{1 - x - \delta} = \int_x^y \frac{1 - 2\delta}{(t - \delta)(1 - t - \delta)} dt.$$

On remarque que

$$\frac{(t - \delta)(1 - t - \delta)}{t(1 - t)} = 1 + \frac{\delta^2 - \delta}{t - t^2} \leqslant 1 + 4(\delta^2 - \delta) = (1 - 2\delta)^2.$$

Finalement, on obtient

$$\theta_{]0,1[}(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t(1-t)}dt \leqslant \int_x^y \frac{(1-2\delta)^2}{(t-\delta)(1-t-\delta)}dt = (1-2\delta)\theta_{]\delta,1-\delta[}(x,y). \blacktriangleright$$

Commençons par étudier un exemple en dimension finie. On considère une matrice stochastique Q à coefficients strictement positifs et l'application $p \longmapsto pQ$ sur l'espace $\mathcal{P}(Y) \subset \mathbb{R}^Y$, dont les éléments sont vus comme des matrices lignes. On a vu que cette application admet un point fixe. Les considérations ci-dessus permettent de montrer que ce point fixe est asymptotiquement stable et que son bassin est $\mathcal{P}(Y)$. On conclut que $\rho Q^n \longrightarrow p$ pour tout $\rho \in \mathcal{P}(Y)$, ce qui implique que $Q^n \longrightarrow P$, la matrice dont toutes les lignes sont égales à p. On obtient le résultat suivant sur le caractère mélangeant des mesures de Markov (en notant m_p la mesure de Markov déterminée par la probabilité stationnaire p et la matrice de transition Q)

On montre, plus généralement, le théorème de Perron-Frobenius :

Théorème 13.8. *Soit A une matrice $k \times k$ à coefficients positifs, et a son rayon spectral.*

-Le rayon spectral a est une valeur propre de A, et il existe un vecteur propre w associé dont les coefficients sont positifs.

-Si de plus, A est transitive, alors la valeur propre a est géométriquement simple, c'est à dire que l'espace propre associé est une droite, et il existe un vecteur propre w à coefficients strictement positifs associé à la valeur propre a, et aucun autre vecteur propre à coefficient positifs.

-Si A est transitive et apériodique, c'est à dire si il existe n tel que A^n est à coefficients strictement positifs, alors toutes les valeurs propres complexes λ de A différentes de a vérifient $|\lambda| < a$.

$\blacktriangleleft$ Commençons par le cas d'une matrice A à coefficients strictement positifs. On considère la forme linéaire $\ell : \mathbb{R}^k \ni x \longmapsto \sum x_i$ et le simplexe Δ constitué des vecteurs x de $\mathbb{R}^k$ à coefficients positifs tels que $\ell(x) = 1$. On définit $f(x) := Ax/\ell(Ax)$. Si A est à coefficients strictement positifs, alors f envoie Δ dans son intérieur, c'est donc une contraction pour la distance de Hilbert, elle a donc un unique point fixe. Il y a donc une unique (demi-droite de) vecteur propre w de A à coefficient positifs, et ses coefficients sont strictement positifs. On note b la valeur propre correspondante, elle est strictement positive.

En appliquant le même résultat à la transposée de A, on trouve une forme linéaire g à coefficients strictement positifs telle que $g \circ A = dg$ avec $d > 0$. On a $bg(w) = g(Aw) = dg(w)$ donc $d = b$. Le noyau E de g est un supplémentaire de w invariant par A.

On revient maintenant à la première partie de la démonstration, en remplaçant la forme linéaire ℓ par la forme g. On définit le convexe $\tilde{\Delta}$ comme l'ensemble des vecteurs à coefficients positifs tels que $g(x) = 1$, et l'application $h(x) = Ax/g(Ax)$ sur $\tilde{\Delta}$. C'est une contraction pour la norme de Hilbert. On choisi le vecteur propre w de sorte que $g(w) = 1$. Si x est un vecteur assez petit de E, alors $w + x \in \tilde{\Delta}$, et $h(w+x) = w + Ax/b$. Le fait que w est un point fixe asymptotiquement stable de h implique donc que 0 est un point fixe asymptotiquement stable de $(A/b)_{|E}$. Ceci implique que le rayon spectral de A sur E est strictement inférieur à b. Le rayon spectral de A est donc inférieur à b, donc c'est b : on a $a = b$.

Dans le cas où A^n est à coefficients strictement positifs, la preuve est identique : l'application f^n ci-dessus est une contraction, ce qui implique que f a un unique point fixe qui est asymptotiquement stable. On trouve donc aussi un covecteur propre g, et on finit la preuve de la même façon.

Soit A une matrice quelconque à coefficients positifs. Notons $\mathbb{1}$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. On considère les approximations $A_n = A + \mathbb{1}/n$, où l'on ajoute $1/n$ à chaque coefficient de A. Pour chaque n, il existe un vecteur w_n tel que $\ell(w_n) = 1$ et $A_n w_n = a_n w_n$, où a_n est le rayon spectral de A_n.

Considérons la norme $\|x\| := \sum |x_i|$, de sorte que $\|x\| = \ell(x)$ si x est à coefficients positifs. Comme les coefficients de la matrice A_n^k sont supérieurs à ceux de la matrice A^k, on a

$$\|A^k w_n\| = \ell(A^k w_n) \leqslant \ell(A_n^k w_n) = \|A_n^k w_n\| = a_n^k \|w_n\|$$

donc $\|A^k\| \leqslant a_n^k$ pour tout k, ce qui implique que $a \leqslant a_n$.

En passant à la limite le long d'une sous-suite dans l'égalité $A^n w_n = a_n w_n$, on obtient un vecteur w non nul à coefficients positifs et $b \geqslant a$ tels que $Aw = bw$. Ceci implique que b est une valeur propre de A, et donc que $b = a$.

Dans le cas où la matrice A transitive, il existe n tel que la matrice $B := A + A^2 + \cdots + A^n$ est à coefficients strictement positifs. Tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B, donc il existe une seule direction propre à coefficients positifs, et elle est à coefficients strictement positifs. Si l'espace propre associé à la valeur propre a était de dimension strictement supérieure à un, il contiendrait d'autre vecteurs positifs, ce qui est impossible. La valeur a est donc géométriquement simple. $\blacktriangleright$

L'application qui suit est issue de l'article de Carlangelo Liverani *Decay of Correlations* publié à Annals of Maths en 1995. Cet article est tout à fait accessible et le lecteur est encouragé à consulter cette source originale. On se place dans le contexte du chapitre précédent, avec $X = [0,1]$, et une application expansive $\varphi : X \longrightarrow X$. Nous avons montré dans le chapitre précédent qu'il existe une mesure invariante m admettant une densité Lipschitz par rapport à la mesure de Lebesgue et que cette mesure est mélangeante. Nous donnons maintenant une nouvelle preuve de ce résultat. Cette méthode est plus quantitative sur les vitesses de convergence.

On considère comme au chapitre précédent l'ensemble des mesures de probabilité engendrées par une densité f satisfaisant $\mathrm{Lip}\log\circ f \leqslant L$. Plus précisément, on considère l'ensemble $W_L \subset \mathcal{P}(X)$ des probabilités dont la densité f par rapport à la mesure de Lebesgue satisfait

$$f(x) > 0, \quad , \int f d\lambda = 1, \quad f(x) < f(y)e^{L|y-x|}$$

pour tous $x \neq y$. C'est un ensemble convexe qui vérifie la condition 13.3. On identifie les éléments de W_L à leur densité, c'est à dire à une partie de l'espace de Banach $E = C(X)$. On note θ_L la distance de Hilbert sur W_L.

On constate d'abord que $\|f\|_{C^0} \leqslant e^L$ pour tout $f \in W_L$. Le convexe W_L est donc borné, ce qui implique que la distance θ controle la distance uniforme.

Nous avons démontré dans le chapitre précédent que, si L est assez grand, alors il existe $L' < L$ tel que $\varphi_*(\mathcal{P}_L) \subset \mathcal{P}_{L'}$.

Proposition 13.9. *Si $L' < L$, alors le diamètre de $W_{L'}$ pour θ_L est fini. L'application φ_* est donc une contraction de W_L.*

◄ C'est facile, mais un peu lourd à écrire. On remarque d'abord que le convexe W_L est défini, dans le sous-espace affine des fonctions $f \in C(X)$ telles que $\int f d\lambda = 1$, par les formes linéaires $f \longmapsto e^{L|y-x|}f(y) - f(x)$. En effet, si ces formes linéaires sont toutes strictement positive, alors f est une fonction de signe constant, et donc $f > 0$ puisque $\int f d\lambda = 1$. On a donc

$$\theta_L(f,g) = \log \sup_{x\neq y, u\neq v} \frac{\left(e^{L|y-x|}f(y) - f(x)\right)\left(e^{L|v-u|}g(v) - g(u)\right)}{\left(e^{L|y-x|}g(y) - g(x)\right)\left(e^{L|v-u|}f(v) - f(u)\right)}.$$

Si f et g sont dans $W_{L'}$, on a alors

$$\begin{aligned}\theta_L(f,g) &\leqslant \log \sup_{x\neq y, u\neq v} \frac{\left(e^{L|y-x|} - e^{-L'|y-x|}\right)f(y)\left(e^{L|v-u|} - e^{-L'|v-u|}\right)g(v)}{\left(e^{L|y-x|} - e^{L'|y-x|}\right)g(y)\left(e^{L|v-u|} - e^{L'|v-u|}\right)f(v)} \\ &\leqslant \log \sup_{x\neq y, u\neq v} \frac{\left(e^{L|y-x|} - e^{-L'|y-x|}\right)\left(e^{L|v-u|} - e^{-L'|v-u|}\right)}{\left(e^{L|y-x|} - e^{L'|y-x|}\right)\left(e^{L|v-u|} - e^{L'|v-u|}\right)} e^{2L'|v-y|}.\end{aligned}$$

Pour $L' < L$, la fonction $t \longmapsto \left(e^{Lt} - e^{-L't}\right)/(e^{Lt} - e^{L't})$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, elle est donc majorée. Le supremum ci-dessus est donc fini. ►

Pour tout $\mu \in W_L$, la suite $\varphi^n_*\mu$ est donc de Cauchy pour θ, donc pour la distance uniforme des densités. Il existe donc une fonction $h \in W_L$ telle que la densité de $\varphi^n_*\mu$ converge uniformément vers h. Cette fonction est unique.

Montrons maintenant comment ce comportement asymptotique implique le mélange. Il suffit de montrer que

$$\int f\circ\varphi^n g dm \longrightarrow \int f dm \int g dm$$

lorsque f et g sont Lipschitz (ces fonctions étant denses dans L^2).

On remarque dans un premier temps que cette convergence a lieu pour f continue et $g \in W_L$ (L assez grand). En effet dans ce cas, on a $gm = gh\lambda \in W_{2L}$, donc $\varphi^n_*(gm) \longrightarrow m$ et donc, pour f continue,

$$\int f\circ\varphi^n g dm = \int f d(\varphi^n_*(gm)) \longrightarrow \int f dm.$$

Pour de telles fonctions, cette convergence est même exponentiellement rapide, et on peut en estimer le taux (on parle de décroissance exponentielle des corrélations). C'est un des intérets de la méthode de fournir des estimations sur le vitesse de convergence pour les fonctions régulières, alors que la méthodes du chapitre précédent utilisait des fonctions $\mathcal{A}_n$-mesurable, qui sont moins naturelles du point de vue de l'espace $X = [0,1]$.

Considérons maintenant une fonction g Lipschitz. Alors $g = 1 + g^+ - (1 + g^-)$ où g^+ et g^- sont les parties positive et négative de g, donc sont des fonctions Lipschitz. Comme $1 + g^\pm$ est une fonction Lipschitz et strictement positive, elle est multiple positive d'un élément de W_L (pour L assez grand). La convergence ci-dessus a donc lieu pour $(1 + g^+)$ et pour $(1 + g^-)$, donc pour g.