Introduction à la finance comportementale

Rémi Tardivo
Sous la direction de Xunyu Zhou

19 octobre 2009

Résumé

Les mathématiques occupent une place fondamentale dans la finance mondiale. Depuis une trentaine d'années, les modèles de Black et Scholes ont permis un fort développement des produits financiers. Néanmoins, la crise financière récente a montré que cette modélisation ne prenait peut-être pas en compte tous les paramètres et notamment l'éventuel manque de rationnalité des investisseurs. Ce mémoire introduit un modèle de sélection de portefeuille prenant en compte l'irrationnalité de l'investisseur.

Table des matières

1 Introduction

L'objet de ces travaux est d'étudier l'influence des biais comportementaux déterminés par Kahneman et Tversky sur la sélection de portefeuille. Ces biais comportementaux sont au nombre de trois :

- les investisseurs évaluent leurs actifs selon le gain ou la perte par rapport à un point de référence (et non selon leur valeur "absolue"),

– les investisseurs sont réticents au risque pour les gains mais preneurs de risque pour les pertes (et non uniformément réticents au risque, comme c'est le cas dans la théorie classique) et plus sensibles aux pertes qu'aux gains,
– les investisseurs surestiment les petites probabilités et sous-estiment les grandes.

Kahneman et Tversky étaient deux chercheurs en économie et en psychologie à l'Université de Berkeley. Ces biais comportementaux ont été révélés à l'aide d'expériences menées sur des étudiants de Stanford et Berkeley. [1] , [2]

On tentera dans cette étude de proposer un modèle mathématique rendant compte de ces phénomènes puis de résoudre le problème associé.

2 Modèle

2.1 Modélisation du marché

On propose la modélisation "classique" du marché.

Soit T l'horizon fixé.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ un espace de probabilité filtré sur lequel est défini le $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien de dimension p : $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^p)'$.

On définit l'actif sans risque, S_t^0 par

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt.$$

Les actifs risqués suivent eux l'équation différentielle stochastique suivante

$$dS_t^i = S_t^i \Big[r_t dt + \sum_{j=1}^{p} \sigma_t^{i,j} (\lambda_t^j dt + dW_t^j) \Big]$$

où λ_t représente le vecteur des primes de risque à l'instant t.

On définit ρ_t comme étant la densité actualisée de la probabilité risque-neutre par rapport à la probabilité historique, sous $\mathcal{F}_t$:

$$\rho_t := \exp\Big(-\int_0^t [r_s + \frac{1}{2}|\lambda_s|^2] ds - \int_0^t (\lambda_s)' dW_s \Big).$$

Soit $\rho := \rho_T$. Alors, $0 < \rho < +\infty$ p.s. et $0 < \mathbb{E}\rho < +\infty$. On note F la fonction de répartition de ρ. On suppose également, pour simplifier, que la distribution de ρ n'a pas d'atome.

On pose enfin

$$\begin{aligned} \overline{\rho} &:= \sup\{a \in \mathbb{R}\,;\, P(\rho > a) > 0\} \\ \underline{\rho} &:= \inf\{a \in \mathbb{R}\,;\, P(\rho < a) > 0\}. \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à un investisseur qui possède une richesse initiale fixée x_0. On définit sa richesse à l'instant t par x_t. Soit Π_t le portefeuille de l'agent (Π_t^i représente la richesse investie dans l'actif i). Alors

$$dx_t = x_t r_t dt + \Pi_t' \sigma_t (\lambda_t dt + dW_t). \tag{1}$$

On peut utiliser la proposition fondamentale suivante :

Proposition 2.1. *Pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable ξ telle que ξ est bornée par en-dessous et $\mathbb{E}[\rho\xi] = x_0$ alors, il existe un portefeuille Π tel que la richesse correspondante, x, vérifie $x(T) = \xi$.*

2.2 Modélisation des biais comportementaux

Point de référence

La première condition est l'introduction d'un point de référence, une variable $\mathcal{F}_T$-mesurable ξ. Mais on peut répliquer ξ par un portefeuille $\overline{\Pi}$ de richesse correspondante $\overline{x}$. En considérant la richesse $x_t - \overline{x}_t$, on obtient une variable de point de référence 0. Dans la suite de cette étude, on considèrera donc, quitte à translater, que le point de référence est 0.

Fonction d'utilité

La seconde condition impose de considérer une fonction d'utilité plus complexe que celle usuellement utilisée. En effet, cette condition se traduit par une fonction d'utilité u étant concave sur $\mathbb{R}^+$ et convexe sur $\mathbb{R}^-$. Pour cela, on définit deux fonctions d'utilité u_+ et u_-, définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et qui mesurent respectivement les gains et les pertes.

On suppose l'hypothèse suivante vérifiée :

Hypothèse 1. *u_+ et u_-, définies de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ sont strictement croissantes, concaves avec $u_+(0) = 0$ et $u_-(0) = 0$. De plus, u_+ est strictement concave, deux fois différentiable et vérifie $u'_+(+\infty) = 0$.*

Alors, la fonction u définie par $u(x) := u_+(x)$ pour $x \geq 0$ et $u(x) := -u_-(-x)$ pour $x < 0$ permet de remplir la seconde condition. En effet, on obtient alors une fonction u en forme de S, c'est-à-dire qu'elle définit bien des comportements réticents au risque pour les gains et preneurs de risque pour les pertes.

Distorsion de probabilités

Enfin, la dernière condition nous pousse à définir une distorsion de probabilités. Pour cela, on va introduire deux fonctions T_+ et T_- vérifiant l'hypothèse :

Hypothèse 2. *T_+ et T_- sont définies de $[0;1]$ dans $[0;1]$, sont différentiables, strictement croissantes et vérifient $T_+(0) = T_-(0) = 0$ et $T_+(1) = T_-(1) = 1$.*

2.3 Problème à résoudre

Soit X une variable aléatoire représentant la richesse d'un portefeuille. Alors, on lui attribue la valeur $V(X)$, représentant l'espérance de l'utilité de X pour l'investisseur (c'est-à-dire en prenant en compte ses biais comportementaux).

Comme on l'a vu, il convient de séparer le cas où X est un gain ($X \geq 0$) du cas où X est une perte ($X < 0$). On va donc poser :

$$V(X) = V_+(X^+) - V_-(X^-)$$

où

$$V_+(Y) = \int_0^{+\infty} T_+(P\{u_+(Y) > y\}dy$$
$$V_-(Y) = \int_0^{+\infty} T_-(P\{u_-(Y) > y\}dy$$

où $Y \geq 0$ p.s.

Dans le cas où l'on n'a pas de distorsion de probabilités, c'est-à-dire, $T_+(z) = z$ alors $V_+(Y) = \mathbb{E}[u_+(Y)]$. V_+ est donc une généralisation de l'espérance de la fonction d'utilité u_+.

Notre problème de sélection de portefeuille revient donc à maximiser la valeur $V(x(T))$ en gérant le portefeuille de manière continue, c'est-à-dire

Problème 1. *Maximiser $V(x(T))$ pour (x, Π) vérifiant l'équation* 1.

D'après la proposition 2.1, ce problème est équivalent à

Problème 2. *Maximiser $V(X)$ où X est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable bornée par en-dessous telle que $\mathbb{E}[\rho X] = x_0$.*

Une fois ce problème résolu avec pour solution X^*, le portefeuille optimal est celui qui réplique X^*.

3 Résolution

3.1 Séparation

Principe

On a vu que la vision qu'ont les investisseurs de l'utilité de X dépend de son signe. Afin de résoudre le problème de maximisation 2, on va donc séparer X en valeurs positive X^+ et négative X^-. On introduit également $A := \{X \geq 0\}$ et $x_+ := \mathbb{E}[\rho X^+]$. En utilisant $V(X) = V_+(X^+) - V_-(X^-)$, on va donc résoudre les deux problèmes de maximisation et minimisation suivants, dépendant de A et x_+ :

Problème 3. *Maximiser $V_+(X)$ pour X variable aléatoire positive, nulle sur A^C et vérifiant $\mathbb{E}[\rho X] = x_+$. On note $v_+(A, x_+)$ ce supremum.*

Problème 4. *Minimiser $V_-(X)$ pour X variable aléatoire positive, nulle sur A et vérifiant $\mathbb{E}[\rho X] = x_+ - x_0$. On note $v_-(A, x_+)$ cet infimum.*

On aboutit alors au problème suivant :

Problème 5. *Maximiser* $v_+(A, x_+) - v_-(A, x_+)$ *pour* $A \in \mathcal{F}_T$ *et* $x_+ \geq x_0^+$ *et où, si* $P(A) = 0$ *alors* $x_+ = 0$ *et si* $P(A) = 1$ *alors* $x_+ = x_0$.

De manière assez intuitive, on comprend que notre problème de maximisation 2 est équivalent à la résolution des trois problèmes précédents. On formule cela dans la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit* X^*, *on définit* $A^* := \{X^* \geq 0\}$ *et* $x_+^* := \mathbb{E}[\rho(X^*)^+]$. *Alors,* X^* *est optimal pour le problème 2 si et seulement si* (A^*, x_+^*) *est optimal pour le problème 5 et* $(X^*)^+$ *et* $(X^*)^-$ *sont respectivement optimales pour les problèmes 3 et 4 avec paramètres* (A^*, x_+^*).

Simplification

Le problème de maximisation 5 fait intervenir un ensemble $A \in \mathcal{F}_T$. Il semble extrêmement complexe de maximiser une variable sur un ensemble d'évènements. On peut montrer, grâce au théorème suivant, qu'il est en fait possible de remplacer les ensembles A par des ensembles ne dépendant que d'un réel. Notre problème de maximisation se ramène alors à une maximisation selon deux réels.

Théorème 3.1. *Pour tout couple* (A, x_+) *vérifiant les hypothèses du problème 5, il existe* $c \in [\underline{\rho}; \overline{\rho}]$ *tel que* $\overline{A} := \{\rho \leq c\}$ *vérifie*

$$v_+(\overline{A}, x_+) - v_-(\overline{A}, x_+) \geq v_+(A, x_+) - v_-(A, x_+).$$

On aboutit au problème suivant :

Problème 6. *Maximiser* $v_+(c, x_+) - v_-(c, x_+)$ *pour* $\underline{\rho} \leq c \leq \overline{\rho}$ *et* $x_+ \geq x_0^+$ *et où, si* $c = \underline{\rho}$ *alors* $x_+ = 0$ *et si* $c = \overline{\rho}$ *alors* $x_+ = x_0$.

Où $v_+(c, x_+)$ et $v_-(c, x_+)$ sont définis respectivement comme $v_+(\{\rho \leq c\}, x_+)$ et $v_-(\{\rho \leq c\}, x_+)$.

On résume ce résultat dans la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Soit* X^* *une variable aléatoire et* F *la fonction de répartition de* ρ. *On définit* $c^* := F^{-1}(P(X^* \geq 0))$ *et* $x_+^* := \mathbb{E}[\rho(X^*)^+]$. *Alors,* X^* *est une solution optimale du problème 2 si et seulement si* (c^*, x_+^*) *est optimal pour le problème 6 et* $(X^*)^+ \mathbf{1}_{\rho \leq c^*}$ *et* $(X^*)^- \mathbf{1}_{\rho > c^*}$ *sont solutions optimales respectivement des problèmes 3 et 4 avec paramètres* $(\{\rho \leq c^*\}, x_+^*)$.

3.2 Partie positive

Dans cette partie, on va chercher à résoudre le problème de maximisation associé à la partie positive de notre variable aléatoire, c'est-à-dire, au problème 3 avec paramètres (c, x_+).

On rappelle ce problème :

Maximiser $V_+(X)$ *pour* X *positive, nulle sur* $A = \{\rho > c\}$ *et vérifiant* $\mathbb{E}[\rho X] = x_+$. *On note* $v_+(c, x_+)$ *ce supremum.*

Problème équivalent

On va tenter de simplifier ce problème en "éliminant" la contrainte "nulle sur $A = \{\rho > c\}$". Le problème est trivial pour $P(A) = 0$ donc on va considérer $P(A) > 0$, c'est-à-dire $c > \underline{\rho}$. On définit

$$T_A(x) := \frac{T_+(xP(A))}{T_+(P(A))}$$

pour $x \in [0; 1]$.

T_A est une fonction de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ strictement croissante, différentiable, vérifiant $T_A(0) = 0$ et $T_A(1) = 1$.

Soit X une solution acceptable du problème 3 et $y \geq 0$ alors

$$T_+(P(u_+(X) > y)) = T_+(P(u_+(X) > y|A)P(A)) = T_+(P(A))T_A(P(u_+(X) > y|A)).$$

En considérant le problème 3 dans l'espace de probabilité conditionnelle $(\Omega \cap A, \mathbb{F} \cap A, P_A)$, où $P_A = P(.|A)$, on peut réécrire le problème 3 en

Problème 7. *Maximiser* $V_+(Y) = T_+(P(A)) \int_0^\infty T_A(P_A(u_+(Y) > y))dy$ *pour* Y *variable aléatoire positive vérifiant* $\mathbb{E}_A[\rho Y] = x_+/P(A)$.

Par ailleurs, on a, de manière évidente, Y^* optimale pour le problème 7 si et seulement si $X^* = Y^* \mathbf{1}_A$ est optimale pour le problème 3.

Ce nouveau problème est un problème de maximisation d'une intégrale de Choquet.

Maximisation d'une intégrale de Choquet

On cherche à résoudre le problème général suivant :

Problème 8. *Maximiser* $V_1(X) = \int_0^\infty T(P(u(X) > y))dy$ *pour* X *variable aléatoire positive vérifiant* $\mathbb{E}[\xi X] = a$.

Où les paramètres vérifient

- ξ est une variable aléatoire strictement positive, sans atome et de fonction de distribution F,
- a est un réel positif,
- T est une fonction de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ strictement croissante, différentiable, vérifiant $T(0) = 0$ et $T(1) = 1$,
- u est strictement concave, strictement croissante, deux fois différentiable, vérifiant $u(0) = 0$ et $u'(+\infty) = 0$.

Le problème est trivial pour $a = 0$ (puisque la seule solution, donc optimale, est $X = 0$). Par conséquent, on considèrera maintenant $a > 0$. On peut montrer, à l'aide de nombreux résultats intermédiaires, le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Si le problème 8 admet une solution optimale* X^* *dont la fonction de distribution est* G *alors* $X^* = G^{-1}(1 - F(\xi))\mathbf{1}_{(1-F(\xi)) \geq G(0)}$.

Ce lemme permet de restreindre le domaine d'acceptabilité des solutions du problème 8 aux variables anticomotoniques avec ξ.

Notons $Z := 1 - F(\xi)$. Alors Z suit la loi uniforme et, ξ étant sans atome, $\xi = F^{-1}(1-Z)$ presque sûrement. On sait d'après le lemme 3.1 que si X^* est solution optimale du problème 8 alors X^* est de la forme $G^{-1}(Z)\mathbf{1}_{Z \geq G(0)}$.

On introduit donc le problème suivant, équivalent au problème 8 :

Problème 9. *Maximiser* $v_1(G) = \int_0^\infty T(P(u(G^{-1}(Z)\mathbf{1}_{Z\geq G(0)}) > y))dy$ *pour* G *fonction de répartition d'une variable aléatoire positive telle que* $\mathbb{E}[F^{-1}(1-Z)G^{-1}(Z)\mathbf{1}_{Z\geq G(0)}] = a$.

En manipulant l'intégrale, on trouve :

$$v_1(G) = \mathbb{E}\Big[u(G^{-1}(Z))T'(1-Z)\mathbf{1}_{Z\geq G(0)}\Big]$$

On pose maintenant $\Gamma = \{g : [0;1[\to \mathbb{R}^+$, g croissante, continue à gauche et $g(0) = 0\}$. On voit que G est une fonction de répartition d'une variable aléatoire positive si et seulement si $g := G^{-1}(.)\mathbf{1}_{.\geq G(0)}$ est dans Γ.

Par conséquent, le problème 9 est équivalent au problème suivant :

Problème 10. *Maximiser* $\overline{v}_1(g) = \mathbb{E}\Big[u(g(Z))T'(1-Z)\Big]$ *pour* $g \in \Gamma$ *telle que* $\mathbb{E}[F^{-1}(1-Z)g(Z)] = a$.

La fonction u est concave et $T' > 0$ donc $\overline{v}_1$ est concave. De plus, la contrainte $\mathbb{E}[F^{-1}(1-Z)g(Z)] = a$ est linéaire en g. Par conséquent, on peut appliquer la méthode de Lagrange pour supprimer cette contrainte linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le problème 10 est équivalent à la résolution du problème suivant :

Problème 11. *Maximiser* $v_1^\lambda(g) = \mathbb{E}\Big[u(g(Z))T'(1-Z)\Big] - \lambda\mathbb{E}[F^{-1}(1-Z)g(Z)]$ *pour* $g \in \Gamma$

où λ est ensuite déterminé à l'aide de la contrainte linéaire $\mathbb{E}[F^{-1}(1-Z)g(Z)] = a$.

On ignore pour l'instant la condition "$g \in \Gamma$". Pour $z \in]0;1[$, on va chercher à maximiser $h_z(g(z)) := u(g(z))T'(1-z) - \lambda F^{-1}(1-z)g(z)$ pour $g(z) \geq 0$. Pour cela, on calcule la dérivée de la fonction h_z :

$$h_z'(g(z)) = u'(g(z))T'(1-z) - \lambda F^{-1}(1-z).$$

On voit que $h_z'(g(z))$ est continue, strictement décroissante en $g(z)$ et tend vers $-\lambda F^{-1}(1-z) < 0$ en $+\infty$. Par conséquent, si $h_z'(g(z))$ s'annule, $h_z(g(z))$ sera maximum en ce point. Sinon, le maximum sera atteint en $g(z) = 0$.

On cherche à résoudre

$$h'(g(z)) = u'(g(z))T'(1-z) - \lambda F^{-1}(1-z) = 0.$$

Ceci n'est possible que pour $\frac{\lambda F^{-1}(1-z)}{T'(1-z)} \leq u'(0)$ et dans ce cas, $g(z) = (u')^{-1}\left(\frac{\lambda F^{-1}(1-z)}{T'(1-z)}\right)$.

On en déduit donc : $g(z) = (u')^{-1}\Big(\frac{\lambda F^{-1}(1-z)}{T'(1-z)}\Big)\boldsymbol{1}_{\frac{\lambda F^{-1}(1-z)}{T'(1-z)} \leq u'(0)}$.

On voit maintenant que si F^{-1}/T' est croissante alors $F^{-1}(1-z)/T'(1-z)$ est décroissante en z et g est croissante en z. De plus, g est positive, continue et vérifie $g(0) = 0$. Par conséquent, $g \in \Gamma$ et on a bien résolu le problème 11.

Soit $R_u(x) := -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$ pour $x > 0$ l'indice d'Arrow-Pratt d'aversion au risque. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.3. *Si F^{-1}/T' est croissante et si $\liminf_{x\to+\infty} R_u(x) > 0$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le problème 10 est bien posé pour tout $a > 0$.

(ii) Le problème 10 admet une unique solution optimale pour tout $a > 0$.

(iii) $\mathbb{E}\Big[u_+\Big((u')^{-1}(\frac{\xi}{T'(F(\xi))})\Big)T'(F(\xi))\boldsymbol{1}_{\frac{\xi}{T'(F(\xi))} \leq u'(0)}\Big] < +\infty.$

(iv) $\mathbb{E}\Big[u_+\Big((u')^{-1}(\frac{\lambda\xi}{T'(F(\xi))})\Big)T'(F(\xi))\boldsymbol{1}_{\frac{\lambda\xi}{T'(F(\xi))} \leq u'(0)}\Big] < +\infty\,,\ \forall\lambda > 0.$

De plus, si l'une de ces assertions est vérifiée alors la solution optimale du problème 10 est

$$g(x) := (u')^{-1}\Big(\frac{\lambda F^{-1}(1-x)}{T'(1-x)}\Big)\boldsymbol{1}_{\frac{\lambda F^{-1}(1-x)}{T'(1-x)} \leq u'(0)} < +\infty$$

où λ est l'unique réel tel que $\mathbb{E}[g(1-F(\xi))\xi] = a$.

Démonstration. $T'(1-Z) > 0$ et $\mathbb{E}[T'(1-Z)] = \int_0^1 T'(x)dx = T(1) - T(0) = 1$, on peut définir une nouvelle mesure de probabilité $\widetilde{P}$ telle que $\widetilde{\mathbb{E}}[X] := \mathbb{E}[T'(1-Z)X]$. En notant $\varsigma := \frac{\xi}{T'(F(\xi))} > 0$, on peut réécrire le problème 10 en

Problème 12. *Maximiser $\widetilde{v}_1(g) = \widetilde{\mathbb{E}}[u(g(Z))]$ pour $g \in \Gamma$ telle que $\widetilde{\mathbb{E}}[\varsigma g(Z)] = a$.*

En appliquant le théorème 5.4 de l'article [4], aisément généralisable au cas $u'(0) < +\infty$, on obtient le résultat désiré. $\square$

A partir des résultats précédents, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 3.4. *Supposons F^{-1}/T' est croissante et $\liminf_{x\to+\infty} R_u(x) > 0$. Soit $X(\lambda) := (u')^{-1}\Big(\frac{\lambda\xi}{T'(F(\xi))}\Big)\boldsymbol{1}_{\frac{\lambda\xi}{T'(F(\xi))} \leq u'(0)}$ pour $\lambda > 0$. Si $V_1(X(1)) < +\infty$ alors $X(\lambda)$ est une solution optimale pour le problème 8 où λ est le réel vérifiant $\mathbb{E}[X(\lambda)\xi] = a$. Si $V_1(X(1)) = +\infty$ alors le problème 8 est mal posé.*

Solution

Finalement, on peut déterminer une solution explicite au problème 3 si l'on suppose l'hypothèse suivante vérifiée :

Hypothèse 3. *F^{-1}/T'_+ est croissante sur $]0;1]$, $\liminf_{x\to+\infty}\Big(\frac{-xu''_+(x)}{u'_+(x)}\Big) > 0$ et $\mathbb{E}\Big[u_+\Big((u'_+)^{-1}(\frac{\rho}{T'_+(F(\rho))})\Big)T'_+(F(\rho))\boldsymbol{1}_{\frac{\rho}{T'_+(F(\rho))} \leq u'(0)}\Big] < +\infty.$*

En effet, d'après l'étude précédente, on a le résultat :

Théorème 3.2. *Supposons que l'hypothèse 3 est vérifiée. Soit $A := \{\rho \leq c\}$ avec $\underline{\rho} < c \leq \overline{\rho}$ et $x_+ \geq x_0^+$. Alors, la solution optimale du problème 3 est $X^*(\lambda) := (u'_+)^{-1}\left(\frac{\lambda\rho}{T'_+(F(\rho))}\right)\mathbf{1}_{\frac{\lambda\rho}{T'_+(F(\rho))}\leq u'(0)}\mathbf{1}_{\rho\leq c}$ où λ est l'unique réel positif vérifiant $\mathbb{E}[\rho X^*(\lambda)] = x_+$. De plus, on a alors*

$$v_+(c,x_+) = \mathbb{E}\Big[u_+\Big((u'_+)^{-1}(\frac{\lambda\rho}{T'_+(F(\rho))})\Big)\mathbf{1}_{\frac{\lambda\rho}{T'_+(F(\rho))}\leq u'(0)}T'_+(F(\rho))\mathbf{1}_{\rho\leq c}\Big].$$

3.3 Partie négative

Minimisation d'une intégrale de Choquet

On cherche à résoudre le problème général suivant :

Problème 13. *Minimiser $V_2(X) = \int_0^\infty T(P_{A^C}(u(X) > y))dy$ pour X variable aléatoire positive vérifiant $\mathbb{E}[\xi X] = a$.*

Où les paramètres vérifient

- ξ est une variable aléatoire strictement positive, sans atome et de fonction de distribution F,
- a est un réel positif,
- T est une fonction de $[0;1]$ dans $[0;1]$ strictement croissante, différentiable, vérifiant $T(0) = 0$ et $T(1) = 1$,
- u est concave, strictement croissante, vérifiant $u(0) = 0$.

Le problème est trivial pour $a = 0$ (puisque la seule solution, donc optimale, est $X = 0$). Par conséquent, on considèrera maintenant $a > 0$.

De manière analogue au cas de la partie positive, on a le résultat suivant :

Lemme 3.2. *Si le problème 13 admet une solution optimale X^* dont la fonction de distribution est G alors $X^* = G^{-1}(F(\xi))\mathbf{1}_{(F(\xi))\geq G(0)}$.*

Par conséquent, le problème 13 est équivalent au problème suivant :

Problème 14. *Minimiser $v_2(G) = \int_0^\infty T(P(u(G^{-1}(Z)\mathbf{1}_{Z\geq G(0)}) > y))dy$ pour G fonction de répartition d'une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{E}[F^{-1}(Z)G^{-1}(Z)\mathbf{1}_{Z\geq G(0)}] = a$.*

Par le même calcul que dans l'étude du problème de la partie positive, on a $v_2(G) = \mathbb{E}\Big[T'(1-Z)u(G^{-1}(Z))\mathbf{1}_{Z\geq G(0)}\Big]$.

En posant $g := G^{-1}(.)\mathbf{1}_{.\geq G(0)}$, on réécrit notre problème de minimisation sous la forme :

Problème 15. *Minimiser $\overline{v}_2(G) = \mathbb{E}\Big[T'(1-Z)u(g(Z))\Big]$ pour $g \in \Gamma$ telle que $\mathbb{E}[F^{-1}(Z)g(Z)] = a$.*

On peut alors montrer le résultat suivant :

Proposition 3.5. *Supposons que u soit strictement concave en 0. Alors, la solution optimale du problème 15, si elle existe, doit être de la forme $g(t) := q(b)\mathbf{1}_{]b;1[}(t)$ où $b \in [0;1[$ et $q(b) := \frac{a}{\mathbb{E}[F^{-1}(Z)\mathbf{1}_{]b;1[}(Z)]}$.*

Solution

Finalement, on peut déterminer une solution explicite au problème 4.

En effet, d'après l'étude précédente, on a le résultat :

Théorème 3.3. *Supposons que u_- est strictement concave en 0. Soit $A := \{\rho \leq c\}$ avec $\underline{\rho} \leq c < \overline{\rho}$ et $x_+ \geq x_0^+$. Alors, $v_-(c, x^+) = \inf_{c \leq \overline{c} < \overline{\rho}} u\Big(\frac{x_+ - x_0}{\mathbb{E}[\rho \boldsymbol{1}_{\rho > \overline{c}}]}\Big) T_-(1 - F(\overline{c}))$. De plus, le problème 4 avec paramètres (A, x^+) admet une solution optimale X^* si et seulement si le problème de minimisation suivant*

$$\min_{c \leq \overline{c} < \overline{\rho}} u\Big(\frac{x_+ - x_0}{\mathbb{E}[\rho \boldsymbol{1}_{\rho > \overline{c}}]}\Big) T_-(1 - F(\overline{c}))$$

admet une solution optimale $\overline{c}^*$. Dans ce cas, $X^* := \frac{x_+ - x_0}{\mathbb{E}[\rho \boldsymbol{1}_{\rho > \overline{c}^*}]} \boldsymbol{1}_{\rho > \overline{c}^*}$.

3.4 Résultat principal

Énoncé

On énonce le principal résultat de cette étude. Ce théorème permet d'expliciter un nouveau problème de maximisation :

Problème 16. *Maximiser $v_+(c, x_+) - u_-(\frac{x_+ - x_0}{\mathbb{E}[\rho \boldsymbol{1}_{\rho > c}]}) T_-(1 - F(c))$ pour $\underline{\rho} \leq c \leq \overline{\rho}$ et $x_+ \geq x_0^+$ et où, si $c = \underline{\rho}$ alors $x_+ = 0$ et si $c = \overline{\rho}$ alors $x_+ = x_0$.*

Théorème 3.4. *Supposons que u_- soit strictement concave en 0. On a alors les résultats suivants :*

(i) Si X^* est une solution optimale du problème 2 et si l'on pose $c^* := F^{-1}(P(X^* \geq 0))$ et $x_+^* := \mathbb{E}[\rho (X^*)^+]$ alors il existe $\overline{c} \geq c^*$ tel que $(\overline{c}, x_+^*)$ est optimal pour le problème 16. De plus, si $u'(0) = +\infty$ alors (c^*, x_+^*) est optimal pour le problème 16.

(ii) Si (c^*, x_+^*) est optimal pour le problème 16 et si X_+^* est optimale pour le problème 3 avec paramètres $(\{\rho \leq c^*\}, x_+^*)$ alors $X^* := X_+^* \boldsymbol{1}_{\rho \leq c^*} + \frac{x_+^* - x_0}{\mathbb{E}[\rho \boldsymbol{1}_{\rho > c^*}]} \boldsymbol{1}_{\rho > c^*}$ est solution optimale du problème 2.

Solution explicite

Si l'hypothèse 3 est vérifiée alors, d'après l'étude du problème de la partie positive, on a

$$X_+^* = (u'_+)^{-1}\Big(\frac{\lambda \rho}{T'_+(F(\rho))}\Big) \mathbf{1}_{\frac{\lambda \rho}{T'_+(F(\rho))} \leq u'(0)} \mathbf{1}_{\rho < c^*}$$

où λ est tel que

$$x_+^* = \mathbb{E}\Big[\rho (u'_+)^{-1}\Big(\frac{\lambda \rho}{T'_+(F(\rho))}\Big) \mathbf{1}_{\frac{\lambda \rho}{T'_+(F(\rho))} \leq u'(0)} T'_+(F(\rho)) \mathbf{1}_{\rho < c^*}\Big].$$

Une solution optimale du problème 2 s'écrit alors

$$X^* = (u'_+)^{-1}\Big(\frac{\lambda \rho}{T'_+(F(\rho))}\Big) \mathbf{1}_{\frac{\lambda \rho}{T'_+(F(\rho))} \leq u'(0)} T'_+(F(\rho)) \mathbf{1}_{\rho < c^*} - \frac{x_+^* - x_0^*}{\mathbb{E}[\rho \mathbf{1}_{\rho > c^*}]} \mathbf{1}_{\rho > c^*}.$$

3.5 Conclusion

Dans le cas où u_+ est une fonction puissance (fonction d'utilité classique), on peut aboutir à des formules fermées pour la composition du portefeuille optimal. En revanche, quand u_+ a une dérivée finie en 0, il devient impossible de trouver une solution explicite.

Références

[1] D. KAHNEMAN et A. TVERSKY, "Prospect theory : An analysis of decision under risk", *Econometrica*, 47, PP. 263-291, (1979).

[2] A. TVERSKY et D. KAHNEMAN, "Advances in prospect theory : Cumulative representation of uncertainty", *Journal Risk and Uncertainty*, 5, pp. 297-323, (1992).

[3] H. JIN et X.Y. ZHOU, "Behavioral portfolio selection in continuous time", *Mathematical Finance*, Vol. 18 (2008), pp. 385-426.

[4] H. JIN, Z.Q. XU et X.Y. ZHOU, "A convex stochastic optimization problem arising from portfolio selection", *Mathematical Finance*, Vol. 18 (2008), pp. 171-184.