École Normale Supérieure
25 septembre 2018

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$1 (et 2 aussi en fait)

1 Généralités

Exercice 1 : questions diverses

1. Montrons que cette topologie est la topologie discrète. Si $x \in X$, alors pour tout $y \neq x$ il existe un ouvert U_y contenant x et pas y. Par conséquent,

$$\{x\} = \bigcap_{y \neq x} U_y$$

est ouvert puisque c'est une intersection finie d'ouverts. Comme les singletons sont ouverts, n'importe quelle partie est ouverte et la topologie est donc la topologie discrète.

2. Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On définit D par

$$D(z,w) := \begin{cases} d(z,w) \text{ si } z,w \in X, \\ \delta(z,w) \text{ si } z,w \in Y, \\ d(z,x_0) + 1 + \delta(y_0,w) \text{ si } z \in X \text{ et } w \in Y, \\ \Delta(z,y_0) + 1 + d(x_0,w) \text{ si } z \in Y \text{ et } w \in X. \end{cases}$$

On vérifie facilement que D est positive, si $D(z,w) = 0$ alors $z = w$ et D satisfait l'inégalité triangulaire.

3. Dans $\mathbb{R}$ on a

$$\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n};1\right] =]0;1].$$

4. L'ensemble $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ est le plus grand ouvert inclus dans $A \cup B$. Comme $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est ouvert et inclus dans $A \cup B$, on a :

$$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$$

En revanche, on n'a pas nécessairement égalité. Par exemple, dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, si on prend $A = [0;1]$ et $B = [1;2]$:

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} =]0;2[$$
$$\text{mais } \mathring{A} \cup \mathring{B} =]0;2[- \{1\}$$

L'ensemble $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cup B$. Puisque $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé et contient $A \cup B$, on a :

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$$

De plus, $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A. Comme $\overline{A \cup B}$ est un fermé contenant A, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$. De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, ce qui implique :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

On obtient l'autre inclusion et l'autre égalité en passant au complémentaire.

5. Une telle topologie est seulement faiblement séparée. Un contrexemple est la topologie cofinie, cf exo 7.

6. (**) Quitte à changer d'ensemble par une bijection quelconque, il suffit de trouver une telle topologie sur un ensemble dénombrable, par exemple $\mathbb{N}^2$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie sur $\mathbb{N}^2$ dont les ouverts sont $\emptyset$ et les parties U telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U^c \cap (\{n\} \times \mathbb{N})$ soit finie, c'est à dire telle que la topologie trace sur chacune des droites horizontales soit la topologie cofinie. Il s'agit donc de la topologie finale relative aux inclusions $i_n : k \in \mathbb{N} \mapsto (k, n) \in \mathbb{N}^2$. C'est donc bien une topologie. On peut également aisément le vérifier à la main.

Supposons par l'absurde que cette topologie soit à base dénombrable d'ouverts et soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de topologie. On va utiliser un argument diagonal pour construire un ouvert qui ne contient aucun élément de cette famille. Pour chaque n, soit x_n un entier tel que (n, x_n) appartienne à U_n, ce qui est possible car $U^c \cap (\{n\} \times \mathbb{N})$ est fini. L'ensemble $U := \mathbb{N}^2 - \{(n, x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bien ouvert mais ne contient aucun des U_n puisque (n, x_n) appartient à U_n mais pas à U.

Exercice 2 ✎ : Topologie produit

1. Tout d'abord, on vérifie que $(\prod U_i) \cap (\prod V_i) = \prod U_i \cap V_i$, de sorte que l'ensemble des parties de cette forme forme bien une base de topologie puisque la propriété d'être égal à X_i pour presque tout i (i.e. tous les i sauf un nombre fini) passe à l'intersection également. Ainsi, l'ensemble des parties qui sont union de parties de la forme $\prod U_i$ est stable par union, par intersection puisque celle-ci se distribue sur l'union et que l'on a montré la stabilité des ensembles de la forme $\prod U_i$ par intersection, et contient bien X et $\emptyset$. Il s'agit donc bien d'une topologie.

2. Soit $(u^{(n)})$ une suite convergente de limite l. Montrons qu'on a convergence simple, c'est à dire que pour chaque i : $u_i^{(n)} \to l_i$. Soit pour cela U_i un voisinage de l_i. Si $j \neq i$ on pose $U_j = X_j$. L'ensemble $\prod U_j$ est donc un ouvert contenant l, par convergence de la suite u, il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $u^{(n)} \in \prod U_j$, ce qui signifie que $u_i^{(n)} \in U_i$ et c'est ce que l'on voulait.

Réciproquement, soit u une suite telle qu'on ait convergence simple vers l (i.e. convergence coordonnée par coordonnée), et montrons qu'il y a convergence au sens de la topologie produit. Soit U un voisinage de l. Quitte à restreindre U on peut le supposer de la forme $\prod U_i$ avec $U_i = X_i$ sauf pour $i \in I_0$ un ensemble fini. Par convergence simple, pour chaque $i \in I_0$ il existe n_i tel que si $n \geqslant n_i$ on ait $u_i^{(n)} \in U_i$. Si l'on prend maintenant $n \geqslant \max_{i\in I_0} n_i$, qui existe bien car le maximum est pris sur un ensemble fini, on a pour tout i $u_i^{(n)} \in U_i$, la condition étant automatiquement satisfaite sur les $i \notin I_0$. C'est à dire exactement $u^{(n)} \in U$. On a bien la convergence pour la topologie produit.

3. Tout d'abord on vérifie aisément que d définit une distance : elle est positive, symétrique et

séparante. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate, mais l'on a

$$\begin{aligned} d(x,x'') &\leqslant d(x,x') + d(x',x'') \\ &\leqslant \max(d(x,x'),d(y,y')) + \max(d(x',x''),d(y',y'')) \\ &= d((x,x'),(y,y')) + d((x',x''),(y',y'')) \end{aligned}$$

et de même pour y de sorte que l'on a bien l'inégalité triangulaire. De plus, on a

$$\mathcal{B}_{X\times Y}\big((x,y),r\big) = \mathcal{B}_X(x,r) \times \mathcal{B}_Y(y,r).$$

Cela montre que les ouverts de la topoloie induite par la distance sont des ouverts de la topologie produit. Montrons que les ouverts de la topologie produit sont également des ouverts de la topologie distance. Soit $(x,y) \in U$ où U est un ouvert produit. Quitte à restreindre on peut supposer que U est de la forme $V \times W$. Comme V et W sont des ouverts contenant respectivement x et y, on peut trouver r et r' tels que $\mathcal{B}(x,r) \subset V$ et $\mathcal{B}(y,r') \subset W$. En prenant $r'' := \min(r,r')$ on a

$$\mathcal{B}_{X\times Y}\big((x,y),r''\big) \subset V \times W = U.$$

Les ouverts produits sont donc bien des ouverts pour la topologie distance et on a bien le résultat escompté.

4. Bien qu'un produit d'ouvert ne soit ouvert que si presque tous les facteurs sont égaux à l'ensemble entier, le résultat est vrai pour les fermés. En effet, si les F_i sont des fermés, on note U_i l'ouvert produit $\prod_j U_{ij}$ où $U_{ii} = F_i^c$ et $U_{ij} = X_i$ sinon, ce qui est une manière compliquée de décrire l'ouvert produit où le seul facteur nn trivial est le i-ème, égal à F_i^c. On a alors

$$\left(\prod F_i\right)^c = \bigcup_i U_i,$$

de sorte que $\left(\prod F_i\right)^c$ est une union d'ouverts, donc ouvert, et le produit $\prod F_i$ est bien fermé.

Par suite, $\prod \overline{E_i}$ est un fermé contenant $\prod E_i$, de sorte que l'on a l'inclusion

$$\overline{\prod E_i} \subset \prod \overline{E_i}.$$

Pour montrer l'inclusion réciproque, soit $x \in \prod \overline{E_i}$ et montrons qu'il est adhérent à $\prod E_i$. Pour cela, il suffit de montrer que $\prod E_i$ rencontre tout voisinage de ce dernier. Soit V un voisinage de x que l'on prend de la forme $\prod U_i$. Comme pour chaque i on a $x_i \in \overline{E_i}$, on peut trouver $e_i \in E_i \cap U_i$. (certes, on utilise l'axiome du choix, mais ça n'est pas la première fois) On a $e \in \prod U_i \cap \prod E_i$. Ainsi tout voisinage de x rencontre $\prod E_i$ et ona bie l'inclusion réciproque.

L'égalité est fausse pour les ouverts pour la simple et bonne raison que $\prod \mathring{E}_i$ n'est même pas à priori ouvert. Par exemple, dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en prenant tous les E_n égaux à $]0;1[$ on a

$$\overset{\circ}{\widehat{\prod_{n\in\mathbb{N}} E_n}} (= \emptyset.$$

On a néanmoins une inclusion car si $x \in \widehat{\prod_{i\in I} E_i}^{\circ}$, alors on a l'existence d'un ouvert $\prod U_i$ tel que

$$x \in \prod U_i \subset \prod E_i$$

et l'on a alors pour chaque i $x_i \in U_i \subset E_i$ se sorte que $x_i \in \mathring{E}_i$.

5. Montrons que chacune des projections est continue. Soit π_i la projection sur le i-ème facteur. Soit U_i un ouvert de X_i. On note $U_j = X_j$ pour $j \neq i$. Alors

$$\pi_i^{-1}(U_i) = \prod U_j$$

qui est bien un ouvert de la topologie produit. Les projections sont donc continues. Réciproquement, si $\mathcal{T}$ est une topologie qui rend continue les projections, elle contient nécessairement les $\prod U_i$ où les U_i sont tous égaux à X_i sauf au plus un. En réalisant des intersections finies d'élements de cette forme là on obtient les ensemble de la forme $\prod U_i$ où les U_i sont égaux aux X_i sauf au plus un nombre fini. Comme ces parties engendrent la topologie produit, on a bien montré que $\mathcal{T}$ devait contenir la topologie produit, qui est donc la moins fine des topologies rendant les projections continues.

6. (*) Si (X_n) est une suite d'espaces métriques telle que les distances sont bornées par 1, montrer que

$$d(x,y) := \sum_0^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

définit une distance qui engendre la topologie produit sur $\prod X_n$.

Exercice 3 ✐ : topologie et voisinages

1.

- Soit W une partie de X contenant V un voisinage de x. Alors, V contient un ouvert U qui contient x. Mais alors, W aussi, donc W est un voisinage de x.
- Si $V_1, \ldots, V_n$ sont des voisinages de x, il existe $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts contenant x tels que $U_i \subset V_i$ pour tout i. Alors, $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ est un ouvert contenant x et est inclus dans $V_1 \cap \cdots \cap V_n$, donc $V_1 \cap \cdots \cap V_n$ est un voisinage de x.
- Si V est un voisinage de x, il existe U contenant x ouvert dans V. En particulier, x appartient à V.
- Si V est un voisinage de x, prenons pour W un ouvert contenant x dans V. Si y est dans W, on a $y \in W \subset V$. Comme W est ouvert, cela montre que V est un voisinage de y.

2. Pour définir la topologie, il n'y a pas de choix. On décrète que U est ouvert si pour tout x dans U, $U \in \mathcal{V}(x)$. Vérifions les axiomes d'une topologie. D'abord, $\emptyset$ est ouvert car la condition est vide. Ensuite, X est ouvert. En effet, si $x \in X$, il existe $Y \in \mathcal{V}(x)$ car $\mathcal{V}(x)$ est non vide. Comme $Y \subset X$, $X \in \mathcal{V}(x)$ par le premier axiome. Soient U_1 et U_2 deux ouverts. Soit $x \in U_1 \cap U_2$. Alors U_1 et U_2 sont dans $\mathcal{V}(x)$. Donc, $U_1 \cap U_2$ aussi par le deuxième axiome. Donc, $U_1 \cap U_2$ est ouvert. Soit enfin $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Si x appartient à $\cup_{i\in I} U_i$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Alors, U_{i_0} appartient à $\mathcal{V}(x)$. Comme $U_{i_0} \subset \cup_{i\in I} U_i$, on a aussi $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{V}(x)$ par le premier axiome.

Il s'agit maintenant de vérifier que, pour cette topologie, $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de x. Soit V un voisinage de x. Par définition, il existe U un ouvert contenant x dans V. Donc, $U \in \mathcal{V}(x)$. Donc $V \in \mathcal{V}(x)$ par le premier axiome. Réciproquement, soit $V \in \mathcal{V}(x)$. On doit construire un ouvert U contenant x dans V. L'astuce est la suivante : l'intérieur de V est un tel ouvert et se caractérise uniquement par les voisinages. Précisément, on définit U comme l'ensemble des y dans X tel que $V \in \mathcal{V}(y)$. D'abord, $x \in U$. Ensuite, $U \subset V$; en effet, si $y \in U$, alors $V \in \mathcal{V}(y)$ et $y \in V$ par le troisième axiome. Enfin, U est ouvert ; soit en effet y dans U. On doit montrer que $U \in \mathcal{V}(y)$. Par définition de U, V est dans $\mathcal{V}(y)$. Alors, il existe, par le quatrième axiome, $W \subset V$ tel que $W \in \mathcal{V}(y)$ et tel que pour tout z dans W, V soit dans $\mathcal{V}(z)$. Mais, alors $W \subset U$ et donc $U \in \mathcal{V}(y)$.

2 Bestiaire Métrique

Exercice 4 ✐ : espaces l^p, $1 \leq p < \infty$.

1. Pour $p = 1$, $l^1 = \left\{(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum\limits_{k=0}^{+\infty}|u_k| < +\infty\right\}$ et $||u||_1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}|u_k|$.

Montrons d'abord que l^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

— l^1 est stable par multiplication par un scalaire : si $\sum\limits_k|u_k| < +\infty$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ $\sum\limits_k|\lambda u_k| = |\lambda|\left(\sum\limits_k|u_k|\right) < +\infty$ donc $(u \in l^1) \Rightarrow (\lambda u \in l^1)$.

— l^1 est stable par addition : si $\sum\limits_k|u_k| < +\infty$ et $\sum\limits_k|v_k| < +\infty$, alors, par inégalité triangulaire :

$$\sum_k|u_k + v_k| \leq \sum_k|u_k| + \sum_k|v_k| < +\infty$$

donc $(u, v \in l^1) \Rightarrow ((u + v) \in l^1)$

Montrons maintenant que $||.||_1$ est une norme :

— Homogénéité : $||\lambda u||_1 = \sum\limits_k|\lambda u_k| = \sum\limits_k|\lambda||u_k| = |\lambda|\,||u||_1$

— Séparation : pour tout k, $0 \leq |u_k| \leq ||u||_1$ donc, si $||u||_1 = 0$, $|u_k| = 0\,\forall k$, ce qui implique $u_k = 0\,\forall k$.

— Inégalité triangulaire : $||u + v||_1 = \sum\limits_k|u_k + v_k| \leq \sum\limits_k(|u_k| + |v_k|) = ||u||_1 + ||v||_1$.

2. a) Puisque $a, b > 0$, il suffit de montrer que $\log(ab) \leq \log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$.

La fonction log est concave. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, cela implique :

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) &\geq \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{q}\log(b^q)\\ &= \log(a) + \log(b) = \log(ab)\end{aligned}$$

b) Quitte à multiplier u et v par des constantes positives non-nulles, on peut supposer que $||u||_p = ||v||_q = 1$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_k |u_k v_k| &\leq \sum_k \left(\frac{|u_k|^p}{p} + \frac{|v_k|^q}{q} \right) \\
&= \frac{||u||_p^p}{p} + \frac{||v||_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1 = ||u||_p ||v||_q
\end{aligned}$$

c) On suppose d'abord que les suites u et v valent 0 à partir d'un certain rang (pour éviter les problèmes liés à la convergence des sommes).
Soit $q = \frac{p}{p-1}$. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}
||u+v||_p^p &= \sum_k |u_k + v_k|^p \\
&\leq \sum_k (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1} \\
&= \sum_k |u_k||u_k + v_k|^{p-1} + \sum_k |v_k||u_k + v_k|^{p-1} \\
&\leq ||u||_p || \, |u+v|^{p-1} ||_q + ||v||_p || \, |u+v|^{p-1} ||_q
\end{aligned}$$

Or $||(u+v)^{p-1}||_q = \left(\sum_k |u_k + v_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q} = \left(\sum_k |u_k + v_k|^p \right)^{(p-1)/p} = ||u+v||_p^{p-1}$. On a donc démontré $||u+v||_p^p \leq (||u||_p + ||v||_p)||u+v||_p^{p-1}$. Cela implique $||u+v||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$.
L'inégalité triangulaire est donc vraie lorsque les suites u et v stationnent en 0.

Concluons. L'espace l^p est stable par multiplication par un scalaire (même justification qu'en 1.). Montrons qu'il est stable par addition.
Soient $u, v \in l^p$. Notons, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $u^{(N)}$ la suite telle que :

$$\begin{aligned}
u_k^{(N)} &= u_k \text{ si } k \leq N \\
&= 0 \text{ si } k > N
\end{aligned}$$

On définit $v^{(N)}$ de la même manière.
Pour tout N, $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p \leq ||u^{(N)}||_p + ||v^{(N)}||_p$ (d'après ce que l'on vient de démontrer). Donc $||u^{(N)} + v^{(N)}||_p \leq ||u||_p + ||v||_p$. Si on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient $||u+v||_p < +\infty$ donc $u + v \in l^p$.
La fonction $||.||_p$ est homogène et vérifie la séparation (même justification qu'en 1.). On vient de démontrer l'inégalité triangulaire. C'est donc une norme.

Exercice 5 ✐✐ : Distance ultramétrique

1. On remarque aisément les propriétés suivantes sur la valuation :

— $\nu(0) = \infty$ et $\nu(x) = \infty \Rightarrow x = 0$,

— $\nu(a+b) \geqslant \min(\nu(a), \nu(b))$,

— $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,

— $\nu(x) = \nu(-x)$.

Ainsi, on a immédiatement la positivité de la distance, sa séparation ainsi que la symétrie. En passant à l'exponentielle dans

$$\nu(a-c) \geqslant \min(\nu(a-b), \nu(b-c))$$

on obtient l'inégalité ultramétrique souhaitée.

2. Soit $a \in \mathbb{K}[[X]]$. On pose $u_n := \sum_0^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Alors $\nu(a-u_n) \geqslant n$ puisque les n premiers termes sont nuls, ainsi $d(a, u_n) \leqslant e^{-n}$ et on a bien montré que $\mathbb{K}[X]$ était dense. L'écriture se justifie en car la série converge bien pour la topologie de la valuation au sens où ses sommes partielles admettent une limite.

3. C'est une question culturelle, on peut voir que tout se passe de la même manière.

Exercice 6 ⁄⁄⁄ : distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$

1. Commençons par vérifier que δ est bien définie. Il faut montrer que, pour tous $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ est une fonction bornée. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les fonctions $y \in K_1 \to d(x,y)$ et $y \in K_2 \to d(x,y)$ sont continues et définies sur des compacts. Elles atteignent donc leur minimum : il existe $y_1 \in K_1$ et $y_2 \in K_2$ tels que $\phi_{K_1}(x) = d(x, y_1)$ et $\phi_{K_2}(x) = d(x, y_2)$. Alors $|\phi_{K_1}(x) - \phi_{K_2}(x)| = |d(x,y_1) - d(x,y_2)| \leq d(y_1, y_2) \leq \max_{(z_1,z_2)\in K_1\times K_2} d(z_1, z_2)$. Cette majoration étant valable pour tout x, $\phi_{K_1} - \phi_{K_2}$ est bornée.

Montrons que δ est une distance.

— Symétrie : $\delta(K_1, K_2) = ||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty = || - (\phi_{K_1} - \phi_{K_2})||_\infty = \delta(K_2, K_1)$

— Séparation : si $\delta(K_1, K_2) = 0$, alors $\phi_{K_1} = \phi_{K_2}$.
En particulier, pour tout $x \in K_1$, $\inf_{y \in K_2} d(x,y) = \phi_{K_2}(x) = \phi_{K_1}(x) = 0$.
Comme K_2 est compact et comme la fonction $y \in K_2 \to d(x,y)$ est continue, elle atteint sa borne inférieure. Il existe donc $y \in K_2$ tel que $d(x,y) = 0$. Pour ce y, on doit avoir $y = x$ donc $x \in K_2$.
On a ainsi démontré $K_1 \subset K_2$. De la même façon, $K_2 \subset K_1$ donc $K_1 = K_2$.

— Inégalité triangulaire : $\delta(K_1, K_3) = ||\phi_{K_1} - \phi_{K_3}||_\infty \leq ||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty + ||\phi_{K_2} - \phi_{K_3}||_\infty = \delta(K_1, K_2) + \delta(K_2, K_3)$

Si on définit δ sur l'ensemble des parties bornées non vides de $\mathbb{R}^n$, l'axiome de séparation n'est plus vérifié et δ n'est plus une distance.

2. Sens direct : supposons $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$.
Si $x \in K_1$, $\phi_{K_1}(x) = 0$. Puisque $||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty \leq \epsilon$, on doit avoir $\phi_{K_2}(x) \leq \epsilon$. Puisque K_2 est compact et que la fonction $y \in K_2 \to d(x,y)$ est continue, cette fonction atteint sa borne inférieure. Il existe donc $y \in K_2$ tel que $d(x,y) = \phi_{K_2}(x) \leq \epsilon$. Alors $x \in \overline{B(y,\epsilon)} \subset V_\epsilon(K_2)$. Donc $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$.
De même, $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.
Sens indirect : supposons $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

Il faut montrer que $||\phi_{K_1} - \phi_{K_2}||_\infty \leq \epsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque.
De même que précédemment, il existe $y_1 \in K_1$ tel que $d(x, y_1) = \phi_{K_1}(x)$.
Puisque $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$, il existe $y_2 \in K_2$ tel que $y_1 \in \overline{B(y_2, \epsilon)}$. Alors $d(x, y_2) \leq d(x, y_1) + d(y_1, y_2) \leq d(x, y_1) + \epsilon$. Donc $\phi_{K_2}(x) \leq d(x, y_2) \leq d(x, y_1) + \epsilon = \phi_{K_1}(x) + \epsilon$.
De même, $\phi_{K_1}(x) \leq \phi_{K_2}(x) + \epsilon$. Donc $|\phi_{K_1}(x) - \phi_{K_2}(x)| \leq \epsilon$.

3. Soient $K \in \mathcal{K}$ et $\epsilon > 0$ quelconques. On va montrer qu'il existe $K_0 \in \mathcal{K}_0$ tel que $\delta(K, K_0) \leq \epsilon$.
Puisque K est compact, il existe $K_0 = \{x_s\}_{1 \leq s \leq S}$ une famille finie de points de K tels que $K \subset \bigcup\limits_s \overline{B(x_s, \epsilon)}$.

Pour ce K_0, on a $K \subset V_\epsilon(K_0)$, par définition, et $K_0 \subset K \subset V_\epsilon(K)$. D'après la question précédente, cela implique $\delta(K, K_0) \leq \epsilon$.

3 Topologies pas forcément métriques

Exercice 7 ✎ : topologie cofinie

1. a) $\mathcal{C}$ contient X et $\emptyset$.

Si $U_1, ..., U_n \in \mathcal{C}$, alors :
- soit $U_i = \emptyset$ pour un certain i, et alors $\bigcap\limits_i U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$
- soit $X - U_i$ est fini pour tout i et alors $X - \left(\bigcap\limits_i U_i\right) = \bigcup\limits_i (X - U_i)$ est aussi fini donc $\bigcap\limits_i U_i \in \mathcal{C}$

Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un ensemble d'éléments de $\mathcal{C}$, alors :
- soit $U_i = \emptyset$ pour tout i et alors $\bigcup\limits_i U_i = \emptyset \in \mathcal{C}$
- soit $X - U_j$ est fini pour un certain j et alors $X - \left(\bigcup\limits_i U_i\right) \subset X - U_j$ est fini et $\bigcup\limits_i U_i \in \mathcal{C}$.

b) Deux ouverts non-vides U et V vérifient toujours $U \cap V \neq \emptyset$, puisque $X - (U \cap V)$ est fini et X est infini. Donc la topologie n'est pas séparée.

2. Soit $z \in X$ quelconque. Montrons que la suite converge vers z.
Soit U un ouvert contenant z. L'ensemble $X - U$ est fini. Notons $\alpha_1, ..., \alpha_s$ ses éléments. L'ensemble $\{n \text{ tq } x_n \notin U\} = \bigcup\limits_{t \leq s} \{n \text{ tq } x_n = \alpha_t\}$ est fini. À partir d'un certain rang, la suite (x_n) est donc incluse dans U.

3. Soit f une fonction continue. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments tous distincts de X. Pour tout $z \in X$, $x_n \to z$ donc $f(x_n) \to f(z)$. Puisque, dans un espace séparé, la limite est unique, tous les $f(z)$ sont égaux : la fonction f est constante. Réciproquement, les fonctions constantes sont continues.

Exercice 8 ✎✎ : topologie de Zariski

1. L'ensemble vide est l'ensemble des zéros de $P = 1$. L'espace total k^n est l'ensemble des zéros de $P = 0$. Si $F_1 = V((P_i)_i)$ et $F_2 = V((Q_j)_j)$ sont deux fermés, alors $F_1 \cup F_2 = V((P_iQ_j)_{(i,j)})$. En effet, l'inclusion directe est évidente et si x n'est pas dans $F_1 \cup F_2$, il existe i_0 et j_0 tels que $P_{i_0}(x) \neq 0$ et $Q_{j_0}(x) \neq 0$. Alors, $(P_{i_0}Q_{j_0})(x) \neq 0$ et donc x n'est pas dans $V((P_iQ_j)_{(i,j)})$. Enfin,

si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés, on écrit $F_i = V((P_j)_{j\in J_i})$ et on vérifie immédiatement que

$$\cap_{i\in I} F_i = V((P_j)_{i\in I, j\in J_i}).$$

2. Pour $n = 1$, l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul est fini et réciproquement tout ensemble fini est l'ensemble des zéros d'un polynôme. On retrouve donc la topologie cofinie. En particulier, la topologie n'est pas séparée (si k est infini).

3. Les fermés élémentaires (= les complémentaires des ouverts élémentaires) pour la topologie produit de k^2 sont les unions finies de droites horizontales et verticales. Une droite verticale ou horizontale est bien sûr fermée pour la topologie de Zariski, donc par union finie tous les fermés élémentaires sont fermés pour la topologie de Zariski et donc la topologie produit est moins fine que la topologie de Zariski.
On montre facilement qu'un fermé pour la topologie produit est une union finie de points et de droites horizontales et verticales. En particulier, si le corps k est infini, la droite $x = y$ n'est pas fermée pour la topologie produit mais est fermée pour la topologie de Zariski. Donc, dans ce cas, la topologie de Zariski est strictement plus fine que la topologie produit.

4. On veut montrer que tout ouvert non vide est dense. Dit autrement, on montre que deux ouverts U et V non vides s'intersectent toujours. On peut supposer que $U = \{x \in k^n \mid P(x) \neq 0\}$ et $V = \{x \in k^n \mid Q(x) \neq 0\}$, où P et Q sont deux polynomes. Si l'intersection était vide, le polynôme non nul $R = PQ$ serait toujours nul, comme application polynomiale sur k^n. Or, ceci est impossible : on le montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est bien connu. Écrivons $R = \sum R_i(X_2, \ldots, X_n)X_1^i$. On fixe $(x_2, \ldots, x_n)$ dans k^{n-1} et on considère le polynôme $R(x_2, \ldots, x_n) := \sum R_i(x_2, \ldots, x_n)X_1^i$ dans $k[X_1]$. Ce polynôme s'annule identiquement par hypothèse. Donc ses coefficients sont nuls. Par hypothèse de récurrence, les R_i sont nuls comme polynomes de $k[X_2, \ldots, X_n]$ et donc R est nul comme polynome. Bilan : tout ouvert non vide de k^n est dense.

Exercice 9 ✐✐✐ : topologie de la convergence simple

1. Supposons d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie produit vers une limite f_∞ et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞.
Soient $x_0 \in [0;1]$ et $\epsilon > 0$ quelconques. Pour tout $x \in [0;1]$, on note $I_x = [0;1]$ si $x \neq x_0$ et $I_{x_0} = [0;1] \cap]f_\infty(x_0) - \epsilon; f_\infty(x_0) + \epsilon[$. Notons $U = \prod_{x\in[0;1]} I_x$.
L'ensemble U est un ouvert de la topologie produit et il contient f_∞. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f_∞ pour la topologie produit, $f_n \in U$ pour tout n assez grand. Cela implique que $f_n(x_0) \in I_{x_0}$ à partir d'un certain rang, ce qui est la même chose que de dire qu'on a $|f_n(x_0) - f_\infty(x_0)| < \epsilon$ pour tout n assez grand.
Puisque ceci est vrai pour x_0 et ϵ quelconques, f_n converge simplement vers f_∞.

Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞ et montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers f_∞ au sens de la topologie produit.
Il faut montrer que, pour tout ouvert élémentaire U contenant f_∞, on a $f_n \in U$ pour tout n assez grand.

Soit donc $U = \prod_{x\in[0;1]} I_x$ un ouvert élémentaire contenant f_∞. Par définition de la topologie produit, $I_x = [0;1]$ pour tout x sauf un nombre au plus fini. Notons $x_1, ..., x_s$ les x pour lesquels $I_x \neq [0;1]$.
Puisque $f_\infty \in U$, on a $f_\infty(x_k) \in I_{x_k}$ pour tout $k \leq s$. De plus, puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f_∞ et puisque les I_{x_k} sont des voisinages ouverts des $f_\infty(x_k)$, on doit avoir pour tout n assez grand :

$$f_n(x_k) \in I_{x_k} \quad \forall k \leq s$$

Donc, pour tout n assez grand, $f_n(x) \in I_x$ pour tout $x \in [0;1]$, c'est-à-dire que $f_n \in U$.

2. a) C'est le théorème de convergence dominée (la fonction 1 dominant tous les éléments de F).
b) Nous allons montrer qu'il n'existe pas de voisinage U de la fonction nulle tel que, pour toute $f \in U$, $I(f) < 1$.
Soit en effet U un voisinage de 0. Quitte à considérer un sous-ensemble de U, on peut supposer que U est un ouvert élémentaire : $U = \prod_{x\in[0;1]} I_x$ avec $I_x = [0;1]$ pour tout x sauf un nombre fini.
On note $x_1, ..., x_s$ les x pour lesquels $I_x \neq [0;1]$.
Pour tout k, on a $0 \in I_{x_k}$ puisqu'on a supposé $0 \in U$.
Notons f_0 la fonction telle que $f_0(x) = 1$ pour tout x sauf si $x \in \{x_1, ..., x_s\}$, auquel cas $f_0(x) = 0$.
Alors $f_0 \in U$ mais $I(f_0) = 1$.

3. Si E était métrisable, F le serait aussi. Dans un espace métrisable (plus généralement dans un espace à base dénombrable de voisinages), une fonction est continue si et seulement si elle est séquentiellement continue. D'après les deux questions précédentes, la fonction I considérée ici est séquentiellement continue mais pas continue ; F n'est donc pas métrisable et E non plus.

Exercice 10 ⫽⫽⫽ : topologie boîte, ou l'autre topologie produit . . .

1. Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ (c'est-à-dire que, pour tout n, $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels). Soit $u^\infty \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$. Alors $u^{(n)} \to u^\infty$ si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
(1) Pour tout k, $u_k^{(n)} \to u_k^\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
(2) Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que les suites $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires en u_k^∞ à partir au moins du rang M, pour tous les k sauf un nombre au plus fini.

Sens direct : si $u^{(n)} \to u^\infty$.
Montrons d'abord (1). Soit k quelconque. Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \text{ tq } v_k \in]u_k^\infty - \epsilon; u_k^\infty + \epsilon[\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ et contient u^∞. À partir d'un certain rang, $u^{(n)}$ appartient donc à cet ensemble, ce qui revient à dire que $|u_k^{(n)} - u_k^\infty| < \epsilon$.
Montrons maintenant (2). Si ce n'est pas le cas, il existe, pour tout M, un nombre infini d'indices k tel que la suite $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire à partir du rang M. Pour tout M, on fixe k_M un tel indice (en prenant les k_M distincts deux à deux) et $n_M \geq M$ tel que $u_{k_M}^{(n_M)} \neq u_{k_M}^\infty$. Soit également, pour tout M, V_M un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $u_{k_M}^\infty$ mais pas $u_{k_M}^{(n_M)}$.
Notons $E = \{v \text{ tq } v_{k_M} \in V_M, \forall M \in \mathbb{N}\}$. C'est un voisinage ouvert de u^∞ mais, pour tout M, $u^{(n_M)} \notin E$. La suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient donc pas à E à partir d'un certain rang, ce qui est

en contradiction avec le fait qu'elle converge vers u^∞.
Sens indirect : supposons maintenant (1) et (2) vérifiées et montrons la convergence.
Soit $W = \prod_k V_k$ un ouvert contenant u^∞ (on peut se restreindre aux ouverts de cette forme puisqu'ils constituent une base de la topologie). Nous allons montrer que $u^{(n)} \in W$ pour tout n assez grand.
Soit $M \in \mathbb{N}$ tel que toutes les suites $(u_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ stationnent en u_k^∞ à partir du rang M pour tout k sauf un nombre au plus fini. Notons $k_1, ..., k_s$ les indices pour lesquels les suites ne stationnent pas.
Pour tout n assez grand, $u_{k_i}^{(n)} \in V_{k_i}$ pour tout $i \leq s$ (d'après (1)). De plus, pour tout $n \geq M$, $u_k^{(n)} = u_k^\infty \in V_k$ si k n'est pas l'un des k_i. Donc, pour tout n assez grand, $u^{(n)} \in W$.
2. a) Soit $\prod_k U_k$ un voisinage de 0. Nous allons montrer qu'il est d'intersection non-vide avec E.
Soit n tel que $1/n \in U_0$. Il existe car $0 \in U_0$.
Soit $x \neq 0$ tel que $x \in U_n$.
Pour ces choix, $\frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n$ appartient au voisinage. Puisque c'est vrai pour tout voisinage, $0 \in \overline{E}$.
Pour la deuxième partie de la question, soit, par l'absurde, $\left(\frac{1}{n_k}\delta^0 + x_k\delta^{(n_k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers 0. D'après la propriété (1) décrite à la question 1., $\frac{1}{n_k} \to 0$.
D'après la propriété (2), il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous les indices $i > 0$ sauf un nombre au plus fini, $(x_k\delta_i^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire en 0 à partir du rang M. Or, pour tout $i = n_k$ avec $n_k \geq M$, ce n'est pas le cas car $x_k\delta_{n_k}^{(n_k)} = x_k \neq 0$. C'est absurde.
b) Dans une topologie métrisable, l'adhérence d'un ensemble est l'ensemble des limites des suites à éléments dans l'ensemble. D'après la question précédente, la topologie que l'on considère ici ne vérifie pas cette propriété ; elle n'est donc pas métrisable.

4 Inclassables

Exercice 11 ✐ : sur l'infinité des nombres premiers

1. De manière pédestre, il est d'abord clair que l'ensemble des ces parties inclut $\emptyset$, $\mathbb{Z}$ et est stable par réunion quelconque. Montrons donc qu'il est stable par intersection : soient U et V deux ouverts et $x \in U \cap V$. On peut trouver u et v tels que $x + u\mathbb{Z} \subset U$ et $x + v\mathbb{Z} \subset V$. On a alors

$$x + uv\mathbb{Z} \subset (x + u\mathbb{Z}) \cap (x + v\mathbb{Z}) \subset U \cap V.$$

L'ensemble $U \cap V$ est donc bien ouvert et ces parties forment bien une topologie. On peut également se contenter de dire, mais cela revient au même, que les progressions arithmétiques centrées sur un point forment une base de voisinage de ce point (c'est ce que l'on a vérifié juste au dessus), il est donc licite d'en considérer la topologie associée.

2. Par construction les $n + a\mathbb{Z}$ sont ouverts puisqu'ils contiennent une progression arithmétique centrée sur chacun de leurs éléments, à savoir $n + a\mathbb{Z}$. En remarquant que

$$(n + a\mathbb{Z}) = \bigcap_{k=1}^{a-1} (n + k + a\mathbb{Z}),$$

on voit que le complémentaire de $n + a\mathbb{Z}$ est également ouvert, ce qui fait de $n + a\mathbb{Z}$ un fermé.
3. Supposons qu'il existe un nombre fini de nombres premiers, on note $\mathcal{P}$ leur ensemble. Alors $U := \bigcup_{p\in\mathcal{P}}$ est un fermé puisqu'il s'agit d'une union finie de fermés. Cet esemble est également l'ensemble des nombres divisibles par un nombre premier, c'est à dire tous sauf $\{\pm 1\}$. On en déduit que $\{\pm 1\}$ est ouvert, ce qui n'est pas le cas. Il y a donc un nombre infini de nombres premiers.

Exercice 12 ✐✐ : théorème de plongement d'Arens-Fells

1. Tout d'abord, pour chaque x la fonction $\varphi_a(x)$ est bien continue et bornée : l'inégalité triangulaire assure

$$|\varphi_a(x)(y)| = |d(x,y) - d(y,a)| \leqslant d(x,a),$$

donc la bornitude, ainsi que

$$\begin{aligned}|varphi_a(x)(y) - \varphi_a(x)(y')| &= |d(y,x) - d(y',x) + d(y',a) - d(y,a)| \\ &\leqslant |d(y,x) - d(y',x)| + |d(y',a) - d(y,a)| \\ &\leqslant d(y,y') + d(y,y')\end{aligned}$$

et donc la continuité à travers le caractère lipschitzien. De plus, la borne supérieure est atteinte en $y = a$ ou $y = x$. Montrons maintenant que φ_a conserve la distance. Soient x et x' deux points de X.

$$\begin{aligned}\|\varphi_a(x) - \varphi_a(x')\|_\infty &= \sup_{y\in X} |\varphi_a(x)(y) - \varphi_a(x')(y)| \\ &= \sup_{y\in X} |d(y,x) - d(y,x')| \\ &= d(x,x').\end{aligned}$$

En effet, l'inégalité triangulaire assure la majoration par $d(x,x')$, et on a égalité en $y = x$ et $y = x'$. φ_a est donc bien une isométrie et on a bien le résultat escompté.
2. a) Soit $x \in X$ fixé. Il faut montrer que f_x est bornée. On va montrer que, pour tout A, $|f_x(A)| \leq d(x,a)$. En effet :

$$\begin{aligned}f_x(A) &= d(x,A) - d(a,A) \\ &= \inf_{\alpha\in A} d(x,\alpha) - d(a,A) \\ &\leq \inf_{\alpha\in A} (d(x,a) + d(a,\alpha)) - d(a,A) \\ &= d(x,a) + d(a,A) - d(a,A) = d(x,a)\end{aligned}$$

De même, $-f_x(A) \leq d(x,a)$.
b) On note $||.||_\infty$ la norme uniforme.
Soient $x, y \in X$. Montrons que $||f_x - f_y||_\infty = d(x,y)$.

Pour tout $A \in \mathcal{F}$, $(f_x - f_y)(A) = d(x,A) - d(y,A)$. La même démonstration qu'à la question a) montre que $||f_x - f_y||_\infty \leq d(x,y)$.
De plus, $|(f_x - f_y)(\{y\})| = |d(x,\{y\}) - d(y,\{y\})| = |d(x,y) - 0| = d(x,y)$. On a donc aussi $||f_x - f_y||_\infty \geq d(x,y)$.
c) $\{f_x\}_{x\in X}$ n'est pas nécessairement un fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. On va donc choisir pour V un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, dans lequel $\{f_x\}_{x\in X}$ sera fermé.
Posons $V = \text{Vect}\,\{f_x\}_{x\in X}$ (c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies de f_x). Notons $F = \{f_x\}_{x\in X}$. D'après la question b), $x \in X \to f_x \in F$ est une isométrie. Pour conclure, il suffit de démontrer que F est un fermé de V.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V vers une limite g. Nous allons montrer que $g \in F$. Puisque g appartient à V, il existe $y_1, ..., y_s$ des éléments distincts de $X - \{a\}$ et $t_1, ..., t_s$ des réels tels que $g = \sum\limits_{k=1}^{s} t_k f_{y_k}$.
Si la suite $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, g est égale à cette constante donc appartient à F. On peut donc supposer que $(f_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Quitte à extraire, on peut alors supposer que $x_n \neq a$ pour tout n.
Prenons $A = \{y_k\}_{1\leq k\leq s} \cup \{a\}$. Puisque $f_{x_n} \to g$, $(g - f_{x_n})(A) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Pour tout $k \leq s$, $f_{y_k}(A) = 0$ donc :

$$(g - f_{x_n})(A) = -f_{x_n}(A) = -d(x_n, A)$$

Comme A est fini et $d(x_n, A) \to 0$ quand $n \to +\infty$, il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers un élément de A, qu'on note b. Quitte à extraire, on peut supposer que c'est toute la suite (x_n) qui converge vers b.
Alors $f_{x_n} \to f_b$, puisque $||f_{x_n} - f_b||_\infty = d(x_n, b) \to 0$. Donc, puisque la limite est uniquement définie, $g = f_b$ et $g \in F$.
3. Soit X un ensemble avec quatre éléments : $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. On munit X de la distance d suivante :

$$\begin{array}{lll} d(x_1,x_2) = 1 & d(x_1,x_3) = 1 & d(x_1,x_4) = 1 \\ d(x_2,x_3) = 1 & d(x_2,x_4) = 1 & d(x_3,x_4) = 2 \end{array}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe une isométrie ϕ de X vers un espace préhilbertien $(V, \langle .,. \rangle)$. On note $||.||$ la norme engendrée par le produit scalaire.
On doit avoir $2 = ||\phi(x_4) - \phi(x_3)|| = ||\phi(x_4) - \phi(x_1)|| + ||\phi(x_1) - \phi(x_3)|| = 1 + 1$.
Par le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz, cel implique $\phi(x_4) - \phi(x_1) = \phi(x_1) - \phi(x_3)$ donc $\phi(x_1) = \frac{\phi(x_4)+\phi(x_3)}{2}$.
Or le même raisonnement est également valable avec x_2 à la place de x_1. On doit donc avoir $\phi(x_1) = \phi(x_2)$, ce qui est impossible car $||\phi(x_1) - \phi(x_2)|| = d(x_1, x_2) = 1 \neq 0$.

Exercice 13 ✐✐✐ : sur les intérieurs et adhérences
Tout d'abord il est clair que $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$ et $\overline{\overline{B}} = \overline{B}$. Montrons maintenant que l'on a pour tout partie A : $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} = \overline{\mathring{A}}$. D'un côté,

$$\begin{aligned}\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} &\Rightarrow \mathring{A} = \mathring{\mathring{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}}\\ &\Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}.\end{aligned}$$

De la même manière,

$$\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}.$$

On a donc bien la double inclusion. Par des manipulations similaires, ou tout simplement en passant au complémentaire,

$$\mathring{\overline{\mathring{\overline{B}}}} = \mathring{\overline{B}}.$$

Ainsi, les seulesparties que l'on peut espérer distinguer sont

$$A, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}, \overline{A}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}.$$

On peut s'apercevoir en réfléchissant un peu que pour l'ensemble suivant ils sont distincts :

$$A = \{0\} \cup [1;2[\cup]2;3] \cup \big([4;5] \cap \mathbb{Q}\big).$$

Exercice 14 : Un exercice Picard (Une fois vu la complétude)

1. Commençons par montrer l'unicité d'un tel point fixe : si x et y sont deux points fixes, $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$. Ainsi, on a $d(x,y) = 0$ et $x = y$. Attelons-nous à l'existence : on considère pour $x_0 \in X$ la suite définie par récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, ce qui donne par une récurrence banale $x_n = f^n(x_0)$. Toujours par une récurrence banale,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}d(x_{n+p}, x_n) &\leqslant \sum_0^{p-1} d(x_{n+k}, x_{n+k+1})\\ &\leqslant \sum_0^{p-1} k^{n+k} d(x_0, x_1)\\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).\end{aligned}$$

Cela montre que la suite x est de Cauchy, donc qu'elle converge, et en passant à la limite dans la relation de récurrence, on voit que sa limite est un point fixe de f.

2. Il "suffit" d'appliquer le théorème précédent en montrant que l'espace des compacts muni de la distance de Hausdorff est complet, et que T est une k-contraction.

Commençons par remarquer que si f est une k-contraction et que $K_1 \subset V_\varepsilon(K_2)$, alors $f(K_1) \subset V_{k\varepsilon}(f(K_2))$. En effet : chaque point x de K_1 est à distance au plus ε d'un point y de K_2, donc chaque $f(x)$ est à distance au plus $k\varepsilon$ d'un point de $f(K_2)$ puisque $f(y)$ convient. On note $\varepsilon := \delta(K_1, K_2)$, on a donc pour chaque i : $f_i(K_1) \subset V_{k\varepsilon}(f_i(K_2))$ et en passant à l'union il vient

$$T(K) \subset V_{k\varepsilon}(T(K)).$$

Par symétrie entre les rôles de K_1 et K_2 il vient

$$\delta(T(K_1), T(K_2)) \leqslant k\varepsilon = k\delta(K_1, K_2).$$

L'application T est donc bien une contraction. Reste à montrer que l'ensemble des compacts muni de la distance de Hausdorff est bien complet.

Soit (K_n) une suite de Cauchy de compacts. On va montrer que la suite converge. Pour construire la limite, on va ruser en utilisant les fonctions définissant la distance de Hausdorff.

- La suite $\phi_{K_n} - \phi_{K_1}$ de fonctions continues bornées sur X est de Cauchy puisque

  $$\|(\phi_{K_n} - \phi_{K_1}) - (\phi_{K_m} - \phi_{K_1})\|_\infty = \delta(K_n, K_m),$$

  donc elle admet une limite $\phi - \phi_{K_1}$.
- On remarque que $L := \overline{\bigcup K_n}$ est un compact. En effet, L est fermé car c'est une adhérence, et on peut montrer qu'il est précompact : soit $\varepsilon > 0$, et n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $\delta(K_n, K_{n_0}) < \varepsilon$, et donc $K_n \subset V_\varepsilon(K_{n_0})$. Il suffit alors de recouvrir le compact $\bigcup_1^{n_0} K_p$ par un nombre fini de boules de rayon 2ε pour obtenir un recouvrement de L par un nombre fini de boules. Finalement, L est compact car précompact et fermé dans un complet.
- Posons $K := \phi^{-1}(0)$, qui devrait être la limite souhaitée. Montrons alors que K est compact et l'on a bien la convergence vers K. Soit $x \in X$, on a l'existence de $x_n \in K_n$ tel que $\phi_{K_n}(x) = d(x, x_n)$. Quitte à extraire, comme L est compact, on peut supposer que x_n tend vers l. En passant à la limite dans l'égalité, on voit que $\phi(x) = d(x, l)$. D'autre part, en passant à la limite dans $\phi_{K_n}(x_n) = 0$, ce qui peut se faire grâce à la convergence uniforme, on obtient que $\phi(l) = 0$ et donc $l \in K$. Ensuite, $\phi(x) = d(x, l) \geqslant \phi_K(x)$. De plus, comme $\phi \geqslant \phi_L$ (par passage à la limite de $\phi_{K_n} \geqslant \phi_L$, on a que $K \subset L$. Comme K est fermé dans un compact, K est également compact. (si $x \in K$, alors $\phi(x) = 0$, donc $\phi_L(x) = 0$ et $x \in L$)
- Soit maintenant $x \in X$ et $k \in K$ tel que $\phi_K(x) = d(x, k)$, en passant à la limite dans

  $$|\phi_{K_n}(x) - \phi_{K_n}(a)| \leqslant d(x, a),$$

  il vient que $\phi \leqslant \phi_K$, de sorte que $\phi = \phi_K$, et comme on a convergence uniforme de ϕ_{K_n} vers $\phi = \phi_K$, on a convergence de (K_n) vers K.

3. Il suffit de prendre $f_1(x) = \frac{x}{3}$ et $f_2(x) = \frac{2+x}{3}$. On constate aisément que l'ensemble de Cantor vérifie $C = f_1(C) \cup f_2(C)$, il s'agit donc de l'unique compact satisfaisant cela par la question 2.

Exercice 15 : Cantor-Bernstein topologique

1. L'application qui vaut x sur $]0;1]$ et $x-1$ sur $]2;3[$ convient.

2. L'application qui vaut x sur $]0;1]$ et $x-1$ sur $\{2\}$ convient.

3. On a montré dans les deux premières questions q'il est possible par une bijection continue d'accoller un point à un intervalle ouvert pour obtenir un intervalle ouvert-fermé, et qu'il est possible d'accoller un intervalle ouvert-fermé et un ouvert pour obtenir un ouvert. La première opération permet de passer de X à Y et la seconde de Y à X. (et dans les deux cas on garde un nombre dénombrable de points isolés et d'intervalles ouverts)

4. On dispose de bijections continues entre X et Y dans les deux sens, mais les deux ne sont pour autant pas homéomorphes : Seul Y possède une composante connexe satisfaisant la propriété suivante : $\exists x$ tel que $C(x) - \{x\}$ soit non vide et connexe, où l'on a noté $C(x)$ la composante connexe de x. (on peut ici remplacer connexe par convexe).