École Normale Supérieure
25 septembre 2018

Topologie, analyse et calcul différentiel

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$1 (et 2 aussi en fait)

1 Généralités

Exercice 1 : questions diverses

1. Soient X un ensemble fini et $\mathcal{T}$ une topologie séparée sur X. Que peut-on dire de $\mathcal{T}$?

2. Soient (X,d) et (Y,δ) deux espaces métriques. Existe-t-il nécessairement une distance D sur $X \sqcup Y$ telle que la distance induite par D sur X soit d et la distance induite par D sur Y soit δ ?

3. Montrer qu'une union infinie (même dénombrable) de fermés peut ne pas être fermée.

4. Soient A, B deux parties d'un espace topologique X. Quelles relations a-t-on entre :

$$\overline{A \cup B} \text{ et } \overline{A} \cup \overline{B} \,? \quad \overline{A \cap B} \text{ et } \overline{A} \cap \overline{B} \,? \quad \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \text{ et } \mathring{A} \cup \mathring{B} \,? \quad \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \text{ et } \mathring{A} \cap \mathring{B} \,?$$

5. Une topologie est-elle séparée si et seulement si les singletons sont fermés ?

6. (**) Trouver une topologie sur $\mathbb{N}$ qui n'admette pas de base d'ouverts dénombrable.

Exercice 2 : Topologie produit

Soit (X_i) une famille d'espaces topologiques. On appelle la topologie produit sur $\prod X_i$ la topologie engendrée par les parties de la forme

$$U = \prod U_i$$

où U_i est un ouvert de X_i et $U_i = X_i$ pour presque tout i. Cest à dire la topologie dont les ouverts sont réunions de parties de cette forme.

1. Montrer qu'il s'agit bien là d'une topologie.

2. Montrer que les suites convergentes pour cette topologie sont celles qui convergent simplement.

3. Montrer que si X et Y sont deux espaces métriques, la topologie produit sur $X \times Y$ est engendrée par la distance

$$d\big((x,y),(x',y')\big) := \max\big((d_X(x,x'), d_Y(y,y')\big).$$

4. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques, avec I infini. On note $Y = \prod_{i\in I} X_i$ et on munit cet ensemble de la topologie produit. Pour tout $i \in I$, soit $E_i \subset X_i$. Les égalités suivantes

sont-elles nécessairement vraies ?

$$\overline{\prod_{i\in I} E_i} = \prod_{i\in I} \overline{E_i} \qquad\qquad \overset{\circ}{\widehat{\prod_{i\in I} E_i}} = \prod_{i\in I} \mathring{E}_i$$

5. (*) Montrer que la topologie produit est la moins fine des topologies rendant les projections continues.

6. (*) Si (X_n) est une suite d'espaces métriques telle que les distances sont bornées par 1, montrer que

$$d(x,y) := \sum_0^\infty \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

définit une distance qui engendre la topologie produit sur $\prod X_n$.

Exercice 3 ✎ : topologie et voisinages

1. Soit X un espace topologique. On rappelle qu'un voisinage de x est un ensemble contenant un ouvert contenant x. Pour tout x dans X, on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. Montrer que les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Toute partie de X contenant un ensemble de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.
- Toute intersection finie d'ensembles de $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$.
- Le point x appartient à tout ensemble de $\mathcal{V}(x)$.
- Si V appartient à $\mathcal{V}(x)$, il existe un ensemble W dans $\mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout y dans W, V appartienne à $\mathcal{V}(y)$.

2. Réciproquement, si X est un ensemble et si l'on se donne, pour tout x dans X, un sous-ensemble non vide $\mathcal{V}(x)$ des parties de X tel que les quatre axiomes précédents soient vérifiés, montrer qu'il existe une unique topologie sur X pour laquelle $\mathcal{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages du point x.

2 Bestiaire Métrique

Exercice 4 ✎ : espaces l^p, $1 \leq p < \infty$.

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note :

$$l^p = \Big\{ (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p < +\infty \Big\},$$

et pour toute suite $u \in l^p$, on définit $\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}$.

1. Vérifier que $(l^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace vectoriel normé.

2. Le but est maintenant de montrer que, plus généralement, $(l^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé pour tout $p \in [1, +\infty[$.

a) Montrer que pour tous $a, b > 0$ et tous $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) [Inégalité de Hölder] En déduire que pour $u \in l^p$ et $v \in l^q$ (avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

c) En déduire l'inégalité triangulaire pour $\| \cdot \|_p$. Conclure.
[Indication : On pourra penser à écrire la majoration $|u_k + v_k|^p \leq (|u_k| + |v_k|)|u_k + v_k|^{p-1}$.]

Exercice 5 : Distance ultramétrique Si $\mathbb{K}$ est un corps, on considère l'anneau des séries formelles $\mathbb{K}[[X]]$, c'est à dire l'ensemble des suites muni du produit de convolution. On rappelle que $\mathbb{K}[X]$ en est un sous-anneau. Pour $a = (a_k)_{k \geq 0}$ une série formelle on note $\nu(a)$ le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$ appelé également valuation de a. On pose ensuite

$$d(a, b) := e^{-\nu(a-b)}.$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{K}[[X]]$ qui vérifie l'inégalité ultramétrique :

$$\forall a, b, c \ : \ d(a, c) \leq \max\big(d(a, b), d(b, c)\big).$$

2. Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathbb{K}[[X]]$ pour cette topologie et justifier l'écriture

$$a = \sum_{0}^{\infty} a_k X^k.$$

3. (**) Soit p un nombre premier. Faire une brève remarque si l'on considère maintenant $\mathbb{Z}$ muni de la distance $d(x, y) = e^{-\nu_p(x-y)}$ et constater la densité de $\mathbb{N}$. Les complétions de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ pour cette distance sont respectivement les anneaux et corps des p-adiques.

Exercice 6 : distance de Hausdorff sur l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}^n$
Soit n un entier ≥ 1. On note d la distance euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des parties compactes non vides de $\mathbb{R}^n$. Étant donné un compact $K \in \mathcal{K}$, on note $\phi_K : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ la fonction « distance à K » définie par :

$$\phi_K(y) = \inf_{x \in K} d(x, y).$$

Étant donnés deux éléments K_1, K_2 de $\mathcal{K}$, on note :

$$\delta(K_1, K_2) = \|\phi_{K_1} - \phi_{K_2}\|_\infty.$$

1. Montrer que δ définit une distance sur $\mathcal{K}$. C'est la *distance de Hausdorff*.

Est-il vrai que δ définit également une distance sur l'ensemble des parties bornées non-vides de $\mathbb{R}^n$?

2. Pour tout compact $K \in \mathcal{K}$ et tout réel $\epsilon > 0$, on note

$$V_\epsilon(K) = \bigcup_{x \in K} \overline{B(x, \epsilon)},$$

où $B(x, \epsilon)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon ϵ dans $(\mathbb{R}^n, d)$. Montrer que, étant donnés deux compacts $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, on a $\delta(K_1, K_2) \leq \epsilon$ si et seulement si $K_1 \subset V_\epsilon(K_2)$ et $K_2 \subset V_\epsilon(K_1)$.

3. Soit $\mathcal{K}_0$ le sous-ensemble de $\mathcal{K}$ constitué des parties finies de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathcal{K}_0$ est dense dans $(\mathcal{K}, \delta)$.

3 Topologies pas forcément métriques

Exercice 7 : topologie cofinie

Soit X un ensemble infini. On note $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des parties de X de complémentaire fini : $C \in \mathcal{C}_0$ si et seulement si $X - C$ est fini. Soit $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_0$ et de l'ensemble vide.

1. a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une topologie sur X.

b) Cette topologie est-elle séparée ? faiblement séparée ?

2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que, pour tout $y \in X$, $\{n \text{ tq } x_n = y\}$ est fini. Montrer que, pour tout $z \in X$, $x_n \to z$.

3. Soit Y un espace topologique séparé. Décrire l'ensemble des fonctions continues $f : X \to Y$.

Exercice 8 : topologie de Zariski

Soit k un corps et n un entier ≥ 1. Si I est un ensemble d'indices et si $(P_i)_{i \in I}$ est une famille de polynômes dans $k[x_1, \ldots, x_n]$, on note

$$V((P_i)_{i \in I}) := \{x \in k^n \mid \forall i \in I, P_i(x) = 0\}.$$

1. Montrer que les ensembles $V((P_i)_{i \in I})$ sont les fermés d'une topologie (appelée *topologie de Zariski*) sur k^n.

2. Identifier cette topologie pour $n = 1$.

3. Comparer la topologie de Zariski et la topologie produit sur $k^2 = k \times k$, k étant muni de la topologie de Zariski.

4. On suppose k infini. Montrer que tout ouvert non vide de k^n est dense. Plus généralement, si F est un fermé de k^n, muni de sa topologie induite, tout ouvert de F est-il nécessairement dense ?

Exercice 9 : topologie de la convergence simple

Soit $E = [0; 1]^{[0;1]}$ (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : [0; 1] \to [0; 1]$). On munit cet espace de la topologie produit.

1. Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge pour la topologie produit si et seulement si elle converge simplement (au sens de la convergence simple usuelle des fonctions).

2. On note F le sous-ensemble de E constitué des fonctions continues par morceaux et muni de la topologie induite par celle de E.
Soit $I : F \to \mathbb{R}$ l'application suivante :

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

a) Montrer que, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers une fonction f_∞, alors $I(f_n) \to I(f_\infty)$.
b) Montrer que I n'est pas continue en la fonction nulle.

3. Montrer que E n'est pas métrisable.

Exercice 10 : topologie boîte, ou l'autre topologie produit . . .
On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de la topologie dont une base est donnée par les ensembles produits de la forme $\prod\limits_{k=0}^{+\infty} U_k$, où les U_k sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $u^{(k)} \longrightarrow u^\infty$ (attention c'est une suite de suites qui converge vers une suite) si et seulement si on a la convergence simple et l'existence d'un rang à partir duquel les suites de la suite ne diffèrent de la limite qu'en dehors d'un ensemble fini d'indices indépendant de celles-ci.

2. On définit la suite δ^n de terme général $\delta_k^n = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Considérons l'ensemble :

$$E = \left\{ \frac{1}{n}\delta^0 + x\delta^n,\ n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

a) Montrer que $0 \in \overline{E}$, mais qu'aucune suite de E ne converge vers 0.
b) En déduire que cette topologie n'est pas métrisable.

4 Inclassables

Exercice 11 : sur l'infinité des nombres premiers
On munit $\mathbb{Z}$ de la topologie où un voisinage d'un point $n \in \mathbb{Z}$ est un ensemble qui contient une progression arithmétique centrée sur ce point. En d'autre termes,

$$V \in \mathcal{V}(n) \ \Leftrightarrow\ \exists a \in \mathbb{N}^*\ n + a\mathbb{Z} \subset V.$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une topologie. Il s'agit en fait de la topologie engendrée par les progressions arithmétiques.

2. Montrer que les $n + a\mathbb{Z}$ sont ouverts et fermés.

3. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 12 : théorème de plongement d'Arens-Fells

Soit (X,d) un espace métrique.
On va montrer qu'il existe (V,N) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $F \subset V$ un fermé de V tel que (X,d) et (F,N) sont isométriques.

1. Montrer que la fonction $\varphi_a : x \longmapsto (y \mapsto d(y,x) - d(y,a)) \in L^\infty \cap \mathcal{C}^0(X)$ convient si l'on ne veut pas que l'image soit fermée.

2. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies non vides de X et $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On fixe un point $a \in X$, et, pour chaque $x \in X$, on définit :

$$f_x : A \in \mathcal{F} \ \mapsto d(x,A) - d(a,A).$$

a) Montrer que, pour tout x, $f_x \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$.
b) Montrer que l'application $x \to f_x$ est une isométrie.
c) En déduire le résultat voulu.

3. Montrer qu'en revanche, il existe des espaces métriques qui ne sont isométriques à aucun sous-ensemble d'un espace préhilbertien (c'est-à-dire un espace vectoriel normé dont la norme provient d'un produit scalaire).

Exercice 13 : sur les intérieurs et adhérences
Soit X un espace topologique (par exemple $\mathbb{R}$) et $A \subset X$. Quelles relations a-t-on entre A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, ...?

Exercice 14 : Un exercice Picard (Une fois vu la complétude)

1. Montrer le petit théorème de Picard : si X est un espace métrique complet et f une application k-contractante, elle admet un unique point fixe.

2. On considère de nouveau l'espace des compacts muni de la distance de Hausdorff. Soit $f_1, \ldots, f_p$ des k-contractions de X. On pose alors, pour $K \subset X$ un compact, $T(X) := \bigcup_1^p f_i(K)$. Montrer qu'il existe un unique compact K tel que $T(K) = K$.

3. Retrouver l'ensemble de Cantor de cette manière pour des fonctions f_1 et f_2 bien choisies.

Exercice 15 : Cantor-Bernstein topologique
On va dans cet exercice dé-montrer le théorème de Cantor-Berstein topologique : si X et Y sont deux espaces topologiques tels qu'il existe une injection continue de X dans Y et une injection continue de Y dans X, alors X et Y sont homéomorphes.

Pour une version *sans spoiler*, passer directement à la dernière question.

1. Montrer qu'il existe une bijection continue entre $]0;1]\cup]2;3[$ et $]0;2[$.

2. Montrer qu'il existe une bijection continue entre $]0;1[\cup\{2\}$ et $]0;1]$.

3. Montrer qu'il existe des bijections continues entre les ensembles

$$X := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]3n;3n+1[\cup\{3n+2\} \text{ et } Y := X\cup]0;1].$$

4. Conclure.