Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Un peu de topologie

Séance du 15 février 2013

Exercice 1. *Équivalence des définitions des evtlcs*

1. On rappelle qu'un espace vectoriel topologique est localement convexe si et seulement si tout voisinage de l'origine contient un voisinage convexe. Soit E un evtlc séparé. Montrer que E est métrisable si et seulement s'il existe une famille dénombrable et séparante de semi-normes engendrant la topologie de E.

Indication : On pourra introduire la jauge de Minkowski d'un convexe V

$$j(x) = \inf\{t > 0, \frac{x}{t} \in V\}.$$

2. Soit E un espace topologique séparé. On rappelle qu'un ensemble A est borné si pour tout voisinage V de 0, il existe $t > 0$ tel que $A \subset tV$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :

i) E est normable,

ii) E admet une base de voisinage convexes et bornés,

iii) il existe une famille finie et séparante de semi-normes engendrant la topologie de E.

$\star$

Exercice 2. *L'espace $C^k(\Omega)$*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On munit $C^k(\Omega)$ (ensemble des fonctions k-fois différentiables avec différentielle $k^{\text{iéme}}$ continue), des semi-normes $\|\cdot\|_{m,K}$ pour tout $m \leq k$ (quelconque si $k = \infty$) et pour tout compact $K \subset \Omega$, où

$$\|\phi\|_{m,K} = \sum_{\alpha:|\alpha|\leq m} \|D^\alpha \phi\|_{C^0(K)}.$$

1. Montrer que $C^k(\Omega)$ muni de la topologie $\mathcal{T}$ induite par ces semi-normes est un espace de Fréchet.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in C^k(\Omega)$ non nulle telle que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.

3. En déduire que $\mathcal{T}$ n'est pas normable.

4. Montrer à l'aide du lemme de Baire que l'espace des fonctions continues à support compact $C_c^0(\Omega)$, muni de la topologie induite par les normes $\|\cdot\|_{0,K}$ pour K compact de Ω, est un espace métrisable qui n'est pas complet.

$\star$

Exercice 3. *Théorème de Riesz*

1. Montrer qu'un espace vectoriel topologique localement compact est nécessairement de dimension finie.

2. Petite application : montrer qu'un sous-espace vectoriel fermé F de $C([0,1])$ (muni de la topologie de la convergence uniforme) inclus dans $C^1([0,1])$ est forcément de dimension finie.

⋆

Exercice 4. *Série de Fourier*

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodiques. On veut montrer une conséquence classique du théorème de Banach-Steinhaus, à savoir que pour tout x dans $[0, 2\pi[$, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier en x diverge est un G_δ dense.

1. Démontrez le raffinement suivant du théorème de Banach-Steinhaus : soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'opérateurs linéaires continus d'un Banach E dans un e.v.n F. Alors on a l'une des deux alternatives :

– $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$,

– Pour tout y d'un G_δ dense de E, $\sup_{i\in I} \|T_i(y)\|_F = +\infty$.

On fixe $s \in \mathbb{T}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on introduit les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et la somme partielle de Fourier $S_N(f)$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t)dt,$$

avec $D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny}$.

2. Montrer que $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \longrightarrow +\infty$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

A N fixé, on introduit une suite g_k de fonctions continues telles que $-1 \leq g_k \leq 1$ et qui convergent simplement vers la fonction $sgn(D_N)$ (avec par exemple la convention $sgn(0) = +1$).

3. En utilisant cette suite, montrer que :

$$\|S_N(.,x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{T});\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}.$$

4. Conclure.

⋆

Exercice 5. *Corollaires du théorème de Hahn-Banach, forme analytique*

1. Soit G un sous espace vectoriel de E, et $g : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe $f \in E'$, prolongeant f telle que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \underset{def}{=} \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} g(x).$$

2. Soit $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f_0 \in E'$ telle que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad et \quad < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2.$$

3. Soit $x \in E$. Montrer que

$$\|x\| = \sup_{f\in E', \|f\|\leq 1} | < f, x > |.$$

⋆