Td n° 1 d'Analyse fonctionnelle

Un peu de topologie

Séance du 14 février 2014

Exercice 1. *Théorème de Banach-Steinhaus*

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit X un espace de Banach et Y un e.v.n. On considère une suite $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ telle que*

$$\forall u \in X,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n u\|_Y < +\infty.$$

Alors la suite A_n est bornée dans $\mathcal{L}(X,Y)$.

1. Rechercher dans vos notes ou dans vos souvenirs l'énoncé et la preuve du théorème de Baire.

2. On suppose $\sup \|A_n\| = +\infty$. On introduit les ensembles $\omega_k = \cup_{n\in\mathbb{N}}\omega_{k,n}$ où

$$\omega_{k,n} = \{u \in X, \|A_n u\| > k\}.$$

Montrer que les ω_k sont denses.

3. Conclure.

⋆

Exercice 2. *Série de Fourier*

On note $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π périodiques. On veut montrer une conséquence classique du théorème de Banach-Steinhaus, à savoir que pour tout x dans $[0, 2\pi[$, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier en x diverge est un G_δ dense.

1. Démontrez le raffinement suivant du théorème de Banach-Steinhaus : soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'opérateurs linéaires continus d'un Banach E dans un e.v.n F. Alors on a l'une des deux alternatives :
- $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty$,
- Pour tout y d'un G_δ dense de E, $\sup_{i\in I} \|T_i(y)\|_F = +\infty$.

On fixe $s \in \mathbb{T}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, on introduit les coefficients de Fourier $c_n(f)$ et la somme partielle de Fourier $S_N(f)$

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_N(x-t)dt,$$

avec $D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny}$.

2. Montrer que $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \longrightarrow +\infty$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

A N fixé, on introduit une suite g_k de fonctions continues telles que $-1 \leq g_k \leq 1$ et qui convergent simplement vers la fonction $sgn(D_N)$ (avec par exemple la convention $sgn(0) = +1$).

3. En utilisant cette suite, montrer que : $\|S_N(.,x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{T});\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}$.

4. Conclure.

⋆

Exercice 3. *Corollaires du théorème de Hahn-Banach*

1. Soit G un sous espace vectoriel de E, et $g : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe $f \in E'$, prolongeant f telle que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} \underset{def}{=} \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} g(x).$$

2. Soit $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe $f_0 \in E'$ telle que

$$\|f_0\|_{E'} = \|x_0\|_E \quad et \quad < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2.$$

3. Soit $x \in E$. Montrer que $\|x\| = \sup_{f\in E', \|f\|\leq 1} | < f, x > |$.

4. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$. Montrer qu'il existe $f \in E'$, non nulle telle que $\forall x \in F, < f, x >= 0$.

⋆

Exercice 4. *Théorème de Krein Milman*

Soit K une partie d'un espace vectoriel E. On dit que x est un point extrémal si $\forall y, z \in K$ et $\theta \in]0, 1[$, $x = \theta y + (1 - \theta)z$ implique $x = y = z$. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 2. *Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel topologique E. Alors K est inclus dans l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.*

1. On considère l'ensemble des parties extrémales de K, c'est à dire les parties A compactes non vides telles que si $x, y \in K$, $\theta \in]0, 1[$ et $\theta x + (1 - \theta)y \in A$ alors $x, y \in A$, munie de la relation d'ordre $A < B$ si $B \subset A$. Montrer que l'ensemble des parties extrémales admet un élément maximal.

2. En utilisant le théorème de Hahn-Banach (forme géomètrique) montrer que les éléments maximaux sont réduits à des points.

3. A l'aide encore du théorème de Hahn-Banach, montrer que K est inclus dans l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

⋆

Exercice 5. *La sphère unité n'est pas fermée pour la topologie faible*

Soit E un e.v.n de dimension infinie. On va montrer que l'adhérence faible de $\mathbb{S} = \{x \in E, \|x\| = 1\}$ est $\mathbb{B} = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

1. Montrer que tout voisinage faible contient une droite.

2. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| < 1$. Montrer que tout voisinage faible contenant x_0 intersecte $\mathbb{S}$.

3. En utilisant le théorème de Hahn Banach, montrer que $\mathbb{B}$ est fermé pour la topologie faible. Conclure.

4. montrer que si $(E, \sigma(E, E'))$ était métrisable, on pourrait construire une suite $x_n \in E$ telle que $\|x_n\| = n$ et $x_n \rightharpoonup 0$. Conclure.

⋆