Analyse fonctionnelle
TD n° 1

Autour du théorème de Baire

Séance du 6 février 2019

Exercice 1. *Échauffement*

L'espace $c_0(\mathbb{Z})$ des suites indexées par $\mathbb{Z}$ et tendant vers 0 à l'infini est-il de Banach pour la topologie de la norme uniforme ? Celui des suites presques nulles (*i.e.* nulles à partir d'un certain rang) ?

⋆

Exercice 2. *Sur certains sous-espaces de L^1*

Soit (Ω, μ) un espace mesuré. Soit V un sous-espace fermé de $L^1(\Omega, \mathbb{C})$ possédant la propriété suivante : pour tout $f \in V$, il existe $p = p(f) > 1$ tel que $f \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$.

1. Rappeler pourquoi, si $g \in L^1 \cap L^p$ pour un $p > 1$, alors $g \in L^q$ pour tout $q \in [1, p]$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $F_n := \{f \in V \cap L^{1+\frac{1}{n}},\ \|f\|_{L^{1+\frac{1}{n}}} \leq n\}$. Montrer que
— $\bigcup_{n \geq 1} F_n = V$,
— pour tout $n \geq 1$, F_n est un fermé de V. *(On pourra utiliser le lemme de Fatou.)*

3. En déduire qu'il existe $p_0 > 1$ tel que $V \subset L^{p_0}$, avec injection continue.

⋆

Exercice 3. *Sur les hypothèses du théorème de l'application ouverte*

1. Trouver une application linéaire continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

2. Trouver une application continue surjective $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

3. On note E l'ensemble des suites $\{x_n\}_{n \geq 0}$ presque nulles, muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Trouver $T \in \mathcal{L}_c(E)$ bijectif, continu, dont l'inverse n'est pas continu.

⋆

Exercice 4. *Séries de Fourier*

Pour $f \in L^1(0, 2\pi)$, on définit la suite de ses coefficients de Fourier par

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et la somme partielle de Fourier

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_N(x - t) \mathrm{d}t,$$

avec $D_N(y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{iny} = \frac{\sin(y(N+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{y}{2})}$ (prolongé par continuité par $2N + 1$ en 0).

On veut montrer une conséquence classique du théorème de Banach-Steinhaus, à savoir que pour tout x dans $[0, 2\pi[$, l'ensemble des fonctions continues 2π- périodiques dont la série de Fourier en x diverge est un G_δ-dense.

1. Démontrez le raffinement suivant du théorème de Banach-Steinhaus : soit $(T_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'opérateurs linéaires continus d'un Banach E dans un e.v.n F. Alors on a l'une des deux alternatives :

— soit $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < +\infty$;

— soit $\sup_{i\in I} \|T_i(y)\|_F = +\infty$ pour tout y dans un G_δ-dense de E.

2. Montrer que $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)} \to +\infty$ lorsque $N \to +\infty$.

3. À N fixé, construire une suite $(g_k)_k$ de fonctions continues telles que $-1 \leq g_k \leq 1$, et qui converge simplement vers la fonction $\mathrm{sgn}(D_N)$. En utilisant cette suite, montrer que l'application $\Lambda_N : f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \mapsto S_N f(x) \in \mathbb{R}$ est une application linéaire continue de norme $\|D_N\|_{L^1(0,2\pi)}$. Conclure.

On s'intéresse maintenant à l'application $\mathcal{F} : f \mapsto \{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sur $L^1(0, 2\pi)$.

4. Montrer que $\mathcal{F}$ prend ses valeurs dans $c_0(\mathbb{Z})$, l'ensemble des suites tendant vers 0 à l'infini.

5. Montrer que $\mathcal{F}$ est injective.

6. Montrer par l'absurde que $\mathcal{F}$ n'est pas surjective à l'aides des fonctions D_N.

Bonus : Quel serait un meilleur espace sur lequel considérer $\mathcal{F}$?

⋆

Exercice 5. *Un théorème de Grothendieck*

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit (Ω, μ) un espace mesuré de mesure totale finie et $p \in [1, +\infty[$. On considère S un sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \mathbb{C})$, inclus dans $L^\infty(\Omega)$. Alors S est de dimension finie.*

1. On commence par se ramener au cas où $p = 2$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in S$, $\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{L^p}$. En déduire (en distinguant les cas $p \leq 2$ et $p > 2$) que, pour une certaine constante $M > 0$, on a, $\forall f \in S$,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq M\|f\|_{L^2}.$$

2. Soit $n \geq 1$. On suppose qu'il existe une famille libre de n fonctions de S. Montrer qu'il existe alors une famille de fonctions $\phi_1, \dots, \phi_n$ de S, orthonormale pour le produit scalaire (hermitien) de $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

3. On note $B := \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n,\ \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq 1\}$ la boule unité de $\mathbb{C}^n$. Pour $\lambda \in B$, on introduit $f_\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$. Montrer qu'il existe un ensemble $\mathcal{N} \subset \Omega$ de mesure nulle tel que

$$\forall \lambda \in B,\ \forall x \in \Omega\backslash\mathcal{N},\ |f_\lambda(x)| \leq M.$$

4. En déduire que $\forall x \in \Omega\backslash\mathcal{N}$, on a $\sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2 \leq M^2$, et conclure.

5. Montrer qu'en revanche, il existe des sous-espaces fermés de $L^2([0, 2\pi])$, inclus dans $L^4([0, 2\pi])$ et de dimension infinie. On pourra considérer par exemple

$$E := \left\{ f : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{i2^n x},\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \right\}.$$

Généraliser.

⋆

Exercice 6. *Théorème de Sunyer i Balaguer*

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction lisse telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n = n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n(x))}(x) = 0$. Montrer que f est polynomiale.

Indication : On peut poser $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a < x < b,\ f|_{]a,b[}$ n'est pas polynomiale$\}$, et montrer par l'absurde que $X = \emptyset$ en utilisant le théorème de Baire.

⋆