

PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 1
ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F . Soit \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . On suppose que X est indépendante de \mathcal{G} et que Y est \mathcal{G} -mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \rightarrow \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X, Y)|\mathcal{G}] = \int_E g(x, Y)P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X . Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \rightarrow \int g(x, y)P_X(dx)$ (ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Correction : (Extrait du poly de J.-F. Le Gall) La variable aléatoire $\phi(Y)$ est $\sigma(Y)$ -mesurable, donc \mathcal{G} -mesurable. Pour montrer l'égalité p.s. $\mathbb{E}[g(X, Y)|\mathcal{G}] = \phi(Y)$, il suffit donc de vérifier que pour toute variable aléatoire Z \mathcal{G} -mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(X, Y)Z] = \mathbb{E}[\phi(Y)Z].$$

Notons $P_{(X, Y, Z)}$ la loi du triplet (X, Y, Z) , qui est une mesure de probabilité sur $E \times F \times \mathbb{R}^+$. Comme X est indépendant de (Y, Z) , on a

$$P_{(X, Y, Z)} = P_X \otimes P_{(Y, Z)}$$

et donc, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(X, Y)Z] &= \int_{E \times F \times \mathbb{R}^+} g(x, y)z P_{(X, Y, Z)}(dx dy dz) \\ &= \int_{E \times F \times \mathbb{R}^+} g(x, y)z P_X(dx) P_{(Y, Z)}(dy dz) \\ &= \int_{F \times \mathbb{R}^+} z \left(\int_E g(x, y) P_X(dx) \right) P_{(Y, Z)}(dy dz) \\ &= \int_{F \times \mathbb{R}^+} z \phi(y) P_{(Y, Z)}(dy dz) \\ &= \mathbb{E}[\phi(Y)Z] \end{aligned}$$

ce qui était le résultat recherché.

Exercice 2.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p, q \in]0, 1[$. On pose $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y>0\}}$ et $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Calculer $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
2. Soient U, T des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans des espaces mesurables quelconques (E, \mathcal{A}) et (F, \mathcal{B}) telles que pour toute sous-tribu \mathcal{G} de \mathcal{F} , pour toutes fonctions réelles mesurables bornées f et g définies respectivement sur (E, \mathcal{A}) et (F, \mathcal{B}) , $\mathbb{E}(f(U)|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(g(T)|\mathcal{G})$ sont indépendantes. Montrer que U ou T est constante.

Correction :

1. On est dans le cas d'un conditionnement discret: les ensembles $\{Z = 0\}$ et $\{Z = 1\}$ forment une partition de Ω qui engendre \mathcal{G} . Ainsi,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|Z = 0) \mathbb{1}_{\{Z=0\}} + \mathbb{E}(X|Z = 1) \mathbb{1}_{\{Z=1\}}.$$

Sur $\{Z = 0\}$, $X = 0$ p.s. et donc $\mathbb{E}(X|Z = 0) = 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Z = 1) &= \frac{P(X = 1)}{P(X + Y \geq 1)} \\ &= \frac{P(X = 1)}{1 - P(X + Y = 0)} \\ &= \frac{p}{1 - (1 - p)(1 - q)} = \frac{p}{p + q - pq}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \frac{p}{p + q - pq} \mathbb{1}_{\{Z \geq 1\}}.$$

Les rôles de X et Y étant symétriques,

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}) = \frac{q}{p + q - pq} \mathbb{1}_{\{Z \geq 1\}}.$$

Les variables aléatoires $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ et $\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ sont donc proportionnelles p.s. et non constantes, elles ne sont donc pas indépendantes.

2. Supposons que ni U , ni T ne soient constantes. Alors il existe des ensembles mesurables A, B des espaces d'arrivée respectifs de U, T tels que $X := 1_A(U), Y := 1_B(T)$ soient des v.a. de loi de Bernoulli de paramètres $p, q \in]0, 1[$. X et Y sont indépendantes (par hypothèse en conditionnant avec la tribu \mathcal{F}). Par 1., l'hypothèse est mise en défaut.

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} et X une variable aléatoire positive sur Ω . Montrer que $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ est le plus petit ensemble \mathcal{G} -mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Correction : La variable aléatoire $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ est par définition une application \mathcal{G} -mesurable, et $]0, +\infty[$ est un borélien, donc $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$ est un ensemble \mathcal{G} -mesurable. De plus, par définition de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}(X \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=0\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=0\}}) = 0.$$

Or $X \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=0\}} \geq 0$ p.s., donc $X \mathbb{1}_{\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G})=0\}} = 0$ p.s.. Cela signifie que

$$\{X > 0\} \subset \{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\}$$

à un ensemble négligeable près. Soit A un ensemble \mathcal{G} -mesurable contenant $\{X > 0\}$, i.e., sur A^c on a $X = 0$ p.s.. Alors toujours par définition de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_{A^c}) = \mathbb{E}(X \mathbb{1}_{A^c}) = 0.$$

De même $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ donc sur A^c on a $\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = 0$ p.s., c'est à dire $\{\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) > 0\} \subset A$ à un ensemble négligeable près.

Exercice 4. On se donne deux réels a et b strictement positifs, et (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \leq t) = b \int_0^t \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy.$$

On rappelle la formule suivante (qui se démontre facilement par récurrence):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{(X+1)}]$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[1_{\{X=n\}}|Y]$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Correction : Pour tout $n \geq 0$, on a par le théorème de convergence dominée

$$\mathbb{P}(X = n) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X = n, Y \leq p) = b \int_0^{\infty} \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy = \frac{b}{a+b} \left(\frac{a}{a+b} \right)^n > 0.$$

Donc, puisque $\mathbb{P}(X = n) > 0$,

$$\mathbb{E}(h(Y)|X = n) = \frac{\mathbb{E}(h(Y) \mathbb{1}_{X=n})}{\mathbb{P}(X = n)}.$$

On remarque que:

$$\mathbb{E}(h(Y) \mathbb{1}_{X=n}) = b \int_0^{\infty} h(y) \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy. \quad (1)$$

Pour justifier cette égalité assez intuitive, on peut suivre le raisonnement suivant. On vérifie facilement que (??) est vraie pour $h = \mathbb{1}_{]s,t]}$. On montre par le théorème de convergence dominée que $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y=t\}} \mathbb{1}_{\{X=n\}}) = \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y \in]t-1/p, t\}} \mathbb{1}_{\{X=n\}}) = 0$ donc (??) est satisfaite pour tout $h = \mathbb{1}_I$ où I est un intervalle. Par linéarité de l'espérance et de l'intégrale, on en déduit que (??) est satisfaite pour toute fonction étagée. Toute fonction h mesurable positive étant la limite croissante d'une suite de fonctions positives étagées, on conclut grâce au théorème de convergence monotone que (??) est vraie pour toute fonction h mesurable positive. On conclut par la décomposition $h = \max(h, 0) - |\min(h, 0)|$ et la linéarité de l'espérance et de l'intégrale que (??) est vraie en toute généralité. En utilisant (??), on obtient:

$$\mathbb{E}(h(Y)|X = n) = \frac{\mathbb{E}(h(Y) \mathbb{1}_{X=n})}{\mathbb{P}(X = n)} = (a+b)^{n+1} \int_0^{\infty} h(y) \frac{y^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy := \phi(n),$$

et par définition

$$\mathbb{E}(h(Y)|X) = \phi(X).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(Y|X = n) = (a+b)^{n+1} \int_0^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n!} \exp(-(a+b)y) dy = \frac{n+1}{a+b}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+1}\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+1}\middle|X\right)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{X+1}\mathbb{E}(Y|X)\right] \\
 &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}(Y|X=n)\mathbb{1}_{\{X=n\}}\right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\mathbb{E}(Y|X=n)\mathbb{P}(X=n) \\
 &= \frac{1}{a+b}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{a+b}.
 \end{aligned}$$

Puis, pour toute fonction h mesurable telle que $h(Y)$ soit intégrable, on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(h(Y)) &= \sum_{n=0}^{\infty} b \int_0^{\infty} h(y) \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy \\
 &= b \int_0^{\infty} h(y) \exp(-by) dy,
 \end{aligned}$$

donc la densité de la loi de Y est la fonction

$$q(y) = be^{-by} \mathbb{1}_{\{y>0\}}.$$

Ainsi, pour toute fonction h bornée,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}h(Y)) &= b \int_0^{\infty} h(y) \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-(a+b)y) dy \\
 &= \int_0^{\infty} h(y) q(y) \frac{(ay)^n}{n!} \exp(-ay) dy \\
 &= \mathbb{E}\left(h(Y) \frac{(aY)^n}{n!} \exp(-aY)\right).
 \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}|Y) = \frac{(aY)^n}{n!} \exp(-aY),$$

($\sigma(Y)$ -mesurabilité et propriété caractéristique vérifiée, comme précédemment).

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X|Y) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X=n\}}|Y) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(aY)^n}{(n-1)!} \exp(-aY) \\
 &= aY.
 \end{aligned}$$

Exercice 5. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ . On note $T = X_1 + \dots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[h(X_1)|T]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne telle que $h(X_1)$ soit mesurable. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Correction : Soient $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes telles que $h(X_1)$ soit intégrable et f bornée. On a, par le changement de variables $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \dots + x_n)$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(h(X_1)f(X_1 + \dots + X_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \lambda^n \exp(-\lambda(x_1 + \dots + x_n))h(x_1)f(x_1 + \dots + x_n)dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_{\{0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n\}} \lambda^n \exp(-\lambda s_n)h(s_1)f(s_n)ds_1 \dots ds_n \\ &= \frac{\lambda^n}{(n-2)!} \int_{\{0 \leq s \leq t\}} \exp(-\lambda t)(t-s)^{n-2}h(s)f(t)dsdt. \end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On se donne $(X_i)_{i \geq 1}$ et $(\mathcal{F}_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et une suite de tribus de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_i]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $(X_i)_{i \geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Correction :

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\mathbb{P}(X_i > \varepsilon) > \varepsilon$ pour un certain ε et pour une infinité de $i \geq 0$. On ne raisonne que sur ces i désormais. On pose $A_i = \{\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_i] > \varepsilon^2/10\}$, alors par hypothèse $\mathbb{P}(A_i) \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$. On en déduit que $\mathbb{P}(\{X_i > \varepsilon\} \setminus A_i) \geq \varepsilon/2$ à partir d'un certain rang. Alors d'après les propriétés de l'espérance conditionnelle on a

$$\mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{A_i^c}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_i] \mathbf{1}_{A_i^c}] \leq \varepsilon^2/10,$$

et d'un autre côté

$$\mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{A_i^c}] \geq \mathbb{E}[X_i \mathbf{1}_{\{X_i > \varepsilon\} \setminus A_i}] \geq \varepsilon^2/2.$$

C'est une contradiction.

2. Il suffit de prendre $\mathcal{F}_i = \{\emptyset, \Omega\}$ et (X_i) une suite qui converge en probabilité vers 0 mais pas \mathbb{L}^1 vers 0.

Exercice 7. On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y , et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2 , alors $X = Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$

3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y) et en déduire que $X = Y$ p.s.

Correction :

1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X - Y)^2) &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)Y) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2).\end{aligned}$$

En échangeant les rôles de X et Y , on obtient $\mathbb{E}((X - Y)^2) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X^2)$ et donc $\mathbb{E}((X - Y)^2) = 0$. On en déduit que les variables X et Y sont égales p.s.

2. Soit $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z|Z \wedge a) &= \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z < a\}}|Z \wedge a) + \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z \geq a\}}|Z \wedge a) \\ &= \mathbb{E}((Z \wedge a)\mathbb{1}_{\{Z \wedge a < a\}}|Z \wedge a) + \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z \wedge a = a\}}|Z \wedge a) \\ &= (Z \wedge a)\mathbb{1}_{\{Z \wedge a < a\}} + \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{\{Z \wedge a = a\}}|Z \wedge a)\mathbb{1}_{\{Z \wedge a = a\}}.\end{aligned}$$

En remarquant que $\mathbb{E}(Z|Z \wedge a)\mathbb{1}_{\{Z \wedge a = a\}} \geq a\mathbb{1}_{\{Z \wedge a = a\}}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z|Z \wedge a) \wedge a &= (Z \wedge a)\mathbb{1}_{\{Z \wedge a < a\}} + a\mathbb{1}_{\{Z \wedge a = a\}} \\ &= Z \wedge a.\end{aligned}$$

3. En utilisant Jensen, puis l'inclusion $\sigma(Y \wedge a) \subset \sigma(Y)$, puis 2., on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a) &\leq \mathbb{E}(X|Y \wedge a) \wedge a \\ &\leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)|Y \wedge a) \wedge a \\ &\leq \mathbb{E}(Y|Y \wedge a) \wedge a \\ &\leq Y \wedge a.\end{aligned}$$

En passant à l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(X \wedge a) \leq \mathbb{E}(Y \wedge a),$$

et par symétrie il y a égalité. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Y \wedge a - \mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a)) = 0,$$

or c'est l'espérance d'une variable positive ou nulle, donc p.s.

$$Y \wedge a = \mathbb{E}(X \wedge a|Y \wedge a).$$

Par symétrie on a la même propriété en inversant X et Y , et en utilisant 1., les variables $X \wedge a$ et $Y \wedge a$ étant dans L^2 , on obtient

$$\forall a > 0, \text{ p.s. } \quad X \wedge a = Y \wedge a.$$

On en déduit que

$$\text{p.s.}, \forall n \in \mathbb{N} \quad X \wedge n = Y \wedge n,$$

c'est à dire $X = Y$ p.s..

Exercice 8. On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes conditionnellement à \mathcal{G} si pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z \mathcal{G} -mesurable positive, pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives,

$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$

et aussi à: pour toute fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurable positive,

$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Correction :

1. Si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, l'égalité s'écrit

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives c'est à dire que X et Y sont indépendantes. Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, l'égalité est triviale et on ne peut rien dire sur les variables X et Y .

2. * On suppose que pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

Soit Z une variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable positive. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G})Z] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z] \\ &= \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z] \end{aligned}$$

Réciproquement, on suppose que pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives, et pour toute variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable positive Z ,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z].$$

Alors comme $Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]$ est \mathcal{G} -mesurable positive, on a

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}[f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z],$$

et par la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, comme $\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})$ est \mathcal{G} -mesurable, on obtient

$$\mathbb{E}(f(X)|\mathcal{G})\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(f(X)g(Y)|\mathcal{G}).$$

* On note $(\mathbb{H}, \mathcal{H})$ l'espace dans lequel X prend ses valeurs. L'ensemble Π des parties de Ω de la forme $X^{-1}(H) \cap G$ avec $H \in \mathcal{H}$ et $G \in \mathcal{G}$ engendre $\mathcal{G} \vee \sigma(X)$ et est stable par intersection finie. On suppose que pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives, et pour toute variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable positive Z ,

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) = \mathbb{E}(f(X)\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})Z).$$

En particulier, pour tous $H \in \mathcal{H}$ et $G \in \mathcal{G}$, on a

$$\mathbb{E}(g(Y)\mathbb{1}_{X^{-1}(H)}\mathbb{1}_G) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})\mathbb{1}_{X^{-1}(H)}\mathbb{1}_G).$$

Par le lemme de classe monotone, puisque Π est stable par intersection finie et engendre $\sigma(X) \vee \mathcal{G}$, on sait que cette propriété caractérise $\mathbb{E}(g(Y)|\sigma(X) \vee \mathcal{G})$ parmi toutes les variables $(\sigma(X) \vee \mathcal{G})$ -mesurables (c'est un résultat du cours), or $\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})$ est $(\sigma(X) \vee \mathcal{G})$ -mesurable. On en déduit que

$$\mathbb{E}(g(Y)|\sigma(X) \vee \mathcal{G}) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

Réciproquement, on suppose que pour toute fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurable positive

$$\mathbb{E}(g(Y)|\sigma \vee \mathcal{G}) = \mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G}).$$

Alors, pour toutes fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} mesurables positives, et pour toute variable aléatoire \mathcal{G} -mesurable positive Z

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)g(Y)Z) &= \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\sigma(X) \vee \mathcal{G})) \\ &= \mathbb{E}(f(X)Z\mathbb{E}(g(Y)|\mathcal{G})). \end{aligned}$$

Exercice 9. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une suite décroissante de sous-tribus de \mathcal{F} , avec $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2 , et que la série

$$\sum_{n \geq 0} (\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])$$

converge dans L^2 . Montrer que si $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$

Correction : Pour $m > n$, $\mathcal{F}_m, \mathcal{F}_{m+1} \subset \mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}$, donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|\mathcal{F}_m] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_m]$$

(de même en remplaçant n par $n+1$ et / ou m par $m+1$). En utilisant la propriété caractéristique de l'espérance conditionnelle, on obtient donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1}))] \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m)) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1})) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m)) \\ &\quad + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1})) \\ &= \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m))^2) - \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1}))^2) - \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_m))^2) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{m+1}))^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les variables $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})$ sont donc orthogonales dans \mathbb{L}^2 . De même, on a pour $n \geq 0$,

$$0 \leq \mathbb{E} \left((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}))^2 \right) = \mathbb{E} \left((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))^2 \right) - \mathbb{E} \left((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}))^2 \right).$$

Pour la convergence \mathbb{L}^2 , remarquons tout d'abord que la suite $\mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n))^2)$ est décroissante et positive, donc convergente. On déduit de ce qui précède que pour tous $p \geq 0$ et $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left(\sum_{n=k}^{k+p} \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}) \right)^2 \right) &= \sum_{n=k}^{k+p} \mathbb{E} \left((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1}))^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_k))^2 \right) - \mathbb{E} \left((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{k+p}))^2 \right). \end{aligned}$$

Ainsi, la série de terme général $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})$ vérifie le critère de Cauchy dans \mathbb{L}^2 , elle converge donc dans \mathbb{L}^2 . On en déduit que la suite $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ converge dans \mathbb{L}^2 . Notons Y sa limite. Pour tout $n \geq 0$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_n) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{\mathbb{L}^2} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$$

car par Jensen

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left([\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)]^2 \right) &\leq \mathbb{E} \left(\mathbb{E}([\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p) - Y]^2|\mathcal{F}_n) \right) \\ &\leq \mathbb{E}([\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p) - Y]^2) \\ &\xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Or pour tout $p \geq n$,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p).$$

Donc, pour tout $n \geq 0$, $Y = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$ c'est à dire que Y est \mathcal{F}_n -mesurable. Ainsi, Y est \mathcal{F}_∞ -mesurable. De plus, de la même manière,

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_\infty) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{\mathbb{L}^2} \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty) = Y$$

et pour tout $p \geq 0$, $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_p)|\mathcal{F}_\infty) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$. Donc $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_\infty)$.