PROCESSUS ALÉATOIRES - TD 1
ESPÉRANCE CONDITIONNELLE

Exercice 1.
Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs respectivement dans E et F. Soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On suppose que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$-mesurable. Montrer que pour toute fonction mesurable $g : E \times F \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\mathbb{E}[g(X,Y)|\mathcal{G}] \;=\; \int_E g(x,Y)P_X(dx)$$

où P_X désigne la loi de X. Le terme de droite est la composée de la variable aléatoire Y par l'application $\phi : y \to \int g(x,y)P_X(dx)$ (ϕ est mesurable grâce au théorème de Fubini).

Exercice 2.
Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et X une variable aléatoire positive sur Ω. Montrer que $\{\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] > 0\}$ est le plus petit ensemble $\mathcal{G}$-mesurable (aux ensembles négligeables près) qui contient $\{X > 0\}$.

Exercice 3.
1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p,q $\in]0,1[$. On pose $Z = \mathbb{1}_{\{X+Y>0\}}$ et $\mathcal{G} = \sigma(Z)$. Calculer $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[Y|\mathcal{G}]$. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

2. Soient U, T des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans des espaces mesurables quelconques $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ telles que pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, pour toutes fonctions réelles bornées f et g définies respectivement sur E et F et telles que $f(U)$ et $g(T)$ soient mesurables, $\mathbb{E}[f(U)|\mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[g(T)|\mathcal{G}]$ sont indépendantes. Montrer que U ou T est constante.

Exercice 4.
On se donne deux réels a et b strictement positifs, et (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ dont la loi est caractérisée par

$$\mathbb{P}(X = n, Y \le t) \;=\; b\int_0^t \frac{(ay)^n}{n!}\exp(-(a+b)y)dy\,.$$

On rappelle la formule suivante (qui se démontre facilement par récurrence):

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt = n!.$$

Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)|X]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, puis $\mathbb{E}[\frac{Y}{(X+1)}]$. Calculer ensuite $\mathbb{E}[1_{\{X=n\}}|Y]$ et enfin $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 5.
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ. On note $T = X_1 + \ldots + X_n$. Calculer $\mathbb{E}[h(X_1)|T]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée. Que remarque-t-on lorsque $n = 2$?

Exercice 6.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On se donne $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(\mathcal{F}_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives et une suite de tribus de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_i \mid \mathcal{F}_i]$ converge en probabilité vers 0.

1. Montrer que $(X_i)_{i\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 7.
On se donne deux variables aléatoires réelles positives X et Y, et on suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$.

1. Montrer que si X et Y sont dans L^2, alors $X = Y$ p.s.
2. Montrer que pour toute variable aléatoire positive Z et tout $a \geq 0$,
$$\mathbb{E}[Z|Z \wedge a] \wedge a = Z \wedge a.$$
3. Montrer que le couple $(X \wedge a, Y \wedge a)$ vérifie les mêmes hypothèses que le couple (X, Y) et en déduire que $X = Y$ p.s.

Exercice 8.
On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{G}$ si pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,
$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[f(X)|\mathcal{G}]\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

1. Que signifie ceci si $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$? Si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$?
2. Montrer que la définition précédente équivaut à : pour toute variable aléatoire Z $\mathcal{G}$-mesurable positive, pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurables positives,
$$\mathbb{E}[f(X)g(Y)Z] = \mathbb{E}[f(X)Z\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}]],$$
et aussi à: pour toute fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mesurable positive,
$$\mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G} \vee \sigma(X)] = \mathbb{E}[g(Y)|\mathcal{G}].$$

Exercice 9.
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ une suite décroissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, avec $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$. Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que les variables $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]$ sont orthogonales dans L^2, et que la série
$$\sum_{n\geq 0}(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}])$$
converge dans L^2. Montrer que si $\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] \quad \text{dans } L^2.$$