École Normale Supérieure — Topologie, analyse et calcul différentiel
5 Décembre 2017

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$10

Exercice 1 : petites questions

1. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dériver les fonctions $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.

2. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, quelle est sa différentielle en un point donné ?

3. a) On considère le changement de variable des coordonnées polaires : $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ défini sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(x, y)\ :\ x \leq 0, y = 0\}$, montrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme sur son image.
b) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(x, y)\ :\ x \leq 0, y = 0\}$, on pose $g(r, \theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, relier les dérivées partielles en fonction de x et y à celles en fonction de x et θ.
c) On pose maintenant $f(x, y) = h(x, \theta)$, calculer les dérivées partielles par rapport à x et expliquer la différence.

Exercice 2 : différentielle du déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \det(M)$ est différentiable en tout point.

2. Calculer sa différentielle en Id.

3. Soit $M_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M_0.

4. Soit $M_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la différentielle de det en M_0 en fonction de la comatrice de M_0.

5. En déduire les points critiques du déterminant.

Exercice 3 : différentielle chez les matrices

On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer la différentielle de $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^{-1}$. (On pourra commencer par la calculer en l'identité)

2. Faire de même avec l'exponentielle. (La formule est moins jolie) Montrer que la différentielle s'écrit

$$\mathrm{d}_A \exp \cdot H = \int_0^1 e^{tA} H e^{(1-t)A} \mathrm{d}t.$$

3. Montrer les formules de Lie-Trotter-Kato : si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\left(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}}\right)^n \longrightarrow e^{A+B}$$

et

$$\left(e^{\frac{A}{n}} e^{\frac{B}{n}} e^{-\frac{A}{n}} e^{-\frac{B}{n}}\right)^n \longrightarrow e^{AB-BA}.$$

Exercice 4 : isométries de $\mathbb{R}^n$

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne. Rappelons que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une *isométrie* si, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a $||f(y) - f(x)|| = ||y - x||$.
Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. On va montrer que f est une isométrie si et seulement si sa différentielle est une isométrie en tout point.

1. Si f est une isométrie différentiable, démontrer que sa différentielle l'est également.

2. À partir de maintenant, on suppose que la différentielle de f est une isométrie en tout point. Montrer que, pour tous $h, k, l \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle d^{(2)}f(x).(h,l), df(x).k\rangle + \langle df(x).h, d^{(2)}f(x).(k,l)\rangle = 0.$$

3. On note $g(h,k,l) = \langle d^{(2)}f(x).(h,l), df(x).k\rangle$. Déduire de la question précédente que $g(h,k,l) = -g(k,h,l)$ puis montrer que $g(h,k,l) = 0$.

4. Conclure.

Exercice 5 : lois de groupe sur $\mathbb{R}$

Soit $*$ une loi de groupe sur $\mathbb{R}$ telle que l'application $f(x,y) := x * y$ soit $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\partial_2(x * y, e) = \partial_2 f(x,y) \cdot \partial_2 f(y,e)$$

et en déduire que $\partial_2 f(y,e) > 0$. (dériver en la troisième variable la formule d'associativité et utiliser l'inverse de y.)

2. On cherche à construire une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(x * y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. En dérivant par rapport à y montrer que l'on a nécessairement

$$\varphi(x) = a \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t,e)}$$

où a est une constante.

3. Montrer réciproquement que pour chaque constante a cette formule définit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ qui transforme $*$ en $+$.

Exercice 6 : fonction à dérivées successives prescrites

On rappelle que le *support* d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'adhérence de $f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$. Dans cet exercice, on souhaite montrer le résultat suivant, dû à Borel :

> Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et I un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}$. Il existe $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à support dans I, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = c_n$.

1. Montrer qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, à support dans $]-1,1[$, qui vaut 1 au voisinage de 0.

2. On introduit, pour ε_n suffisamment petit pour que $]-\varepsilon_n, \varepsilon_n[\subset I$, la fonction

$$g_n(x) = c_n \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon_n}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Montrer que si ε_n est assez petit, on a $\left|g_n^{(\alpha)}(x)\right| \leq 2^{-n}$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $\alpha \in \{0, \ldots, n-1\}$.

3. Conclure, en utilisant la fonction $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

Exercice 7 : fonctions homogènes

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient E et F deux espaces de Banach réels. Une application $f : E \to F$ est *homogène de degré* k si, pour tout $x \in E$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(tx) = t^k f(x)$.

1. On suppose que f est homogène de degré k et différentiable en-dehors de 0. Montrer que, pour tout $x \neq 0$ et $t \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$df(x).x = kf(x) \qquad\qquad df(tx) = t^{k-1} df(x)$$

2. Montrer qu'une application f homogène de degré k et de classe $\mathcal{C}^k$ vérifie :

$$\forall h \in E, f(h) = \frac{1}{k!} d^k f(0).(h, ..., h)$$

[c'est-à-dire que f est induite par une application k-multilinéaire.]

3. Cela reste-t-il vrai si f n'est pas de classe $\mathcal{C}^k$?

Exercice 8 : descente de gradient

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne usuelle.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe telle que $f(x) \to +\infty$ lorsque $||x|| \to +\infty$.

1. Montrer que f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^n$ et que le minimum est atteint en un point unique, qu'on note x^*.

[Indication : on pourra admettre qu'une fonction convexe de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ est nécessairement continue.]

On suppose maintenant que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On définit récursivement, pour tout $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n)$$

2. On suppose que l'application $x \to \nabla f(x)$ est L-lipschitzienne pour un certain $L > 0$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \qquad ||\nabla f(x) - \nabla f(y)|| \leq L||x - y||$$

a) Montrer que, pour tout n, $f(x_{n+1}) \leq f(x_n) - ||\nabla f(x_n)||^2 \alpha (1 - \frac{L\alpha}{2})$.

[Indication : écrire $f(x_{n+1}) - f(x_n)$ comme une intégrale.]

b) On suppose maintenant que $\alpha \leq 1/L$. Déduire de l'inégalité précédente que :

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &\leq f(x^*) + \langle \nabla f(x_n), x_n - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} ||\nabla f(x_n)||^2 \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2\alpha} \left(||x_n - x^*||^2 - ||x_{n+1} - x^*||^2 \right) \end{aligned}$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) - f(x^*) \leq \frac{1}{2n\alpha} ||x_0 - x^*||^2$.

[Indication : Montrer d'abord que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis sommer les inégalités obtenues à la question précédente.]

3. On suppose toujours que $x \to \nabla f(x)$ est L-lipschitzienne mais on suppose de plus que f est m-fortement convexe pour un certain $m > 0$, c'est-à-dire que la fonction $x \to f(x) - \frac{m}{2}||x||^2$ est convexe.

a) Montrer que, pour tous x, y :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{m}{2}||x-y||^2$$

b) Montrer que, si α est plus petit qu'une certaine constante ne dépendant que de m et L, alors il existe $c \in]0;1[$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad ||x_n - x^*|| \leq c^n ||x_0 - x^*||$$