

Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

EQUATIONS ELLIPTIQUES

Séance du 26 avril 2013

Exercice 1. Inégalité de Poincaré-Wirtinger

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On suppose Ω borné et connexe. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

où $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u$.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde.

★

Exercice 2. Problème de Neumann

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d . Soit $f \in L^2(\Omega)$. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

On dit que u est *solution faible* de (1) si $u \in H^1(\Omega)$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv.$$

1. Montrer que si $u \in C^2(\bar{\Omega})$ et $f \in C^0(\Omega)$, alors u est solution faible de (1) si et seulement si u est solution classique de (1).

2. Montrer qu'il existe une unique solution faible de (1) et donner une caractérisation de ce problème en terme de minimisation.

3. On suppose Ω connexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

admette une solution faible. Déterminer l'ensemble des solutions dans ce cas.

(Indication : On pourra introduire $H_K^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} u = 0\}$.)

★

Exercice 3. Un problème elliptique non-linéaire

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d , et $p > 1$. Étant donné $g \in H^1(\Omega)$, on cherche à résoudre, pour $u \in H^1(\Omega)$, l'équation

$$\begin{cases} \Delta u = |u|^{p-1}u & \Omega, \\ u = g & \partial\Omega. \end{cases} \quad (*)$$

On introduit

$$H_g^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}\}.$$

1. Expliquer pourquoi $H_g^1(\Omega)$ est bien défini (non vide), et montrer que $H_g^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ si $p \leq \frac{d+2}{d-2}$.

2. Soit J la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1}.$$

Soit $u_n \in H_g^1(\Omega) \cap L^{p+1}(\Omega)$ une suite de minimiseurs de J , i.e une suite vérifiant

$$J(u_n) \rightarrow \inf_{v \in H_g^1(\Omega)} J(v).$$

Montrer qu'il existe $u \in H_g^1(\Omega)$ réalisant le minimum et tel que quitte à extraire, $u_n - u \rightarrow 0$ dans $H_0^1(\Omega)$ -faible et $L^{p+1}(\Omega)$ -faible.

Montrer qu'un tel minimiseur est unique.

3. En déduire que u est une solution faible de (*).

★

Exercice 4. *Problème elliptique avec contrainte intégrale*

Soit Ω un ouvert borné connexe et régulier de \mathbb{R}^d . Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction régulière. On note $g = G'$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x dans \mathbb{R} :

$$|g(x)| \leq C(|x| + 1)$$

On note pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ les fonctionnelles définies par :

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2,$$

$$J(u) = \int_{\Omega} G(u).$$

On introduit \mathcal{A} le sous-ensemble de $H_0^1(\Omega)$:

$$\mathcal{A} = \{w \in H_0^1(\Omega) | J(w) = 0\}.$$

1. Supposons que \mathcal{A} soit non vide. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{A}$ satisfaisant :

$$I(u) = \min_{w \in \mathcal{A}} I(w).$$

2. Soit u un minimiseur du problème précédent. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} g(u) v dx.$$

★