Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Théorème de Hille-Yosida

Séance du 9 mai 2014

Exercice 1. *Régularité*

Soit H un espace de Hilbert, et $A : D(A) \to H$ un opérateur maximal accrétif. On définit, pour $k \geq 2$

$$D(A^k) = \{v \in \mathcal{D}(A^{k-1}),\ Av \in D(A^{k-1})\}.$$

C'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$< u, v >= \sum_{j=0}^{k} < A^j u, A^j v > .$$

Soit $u_0 \in \mathcal{D}(A^k)$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in C^1([0, +\infty[, H) \cap C([0, +\infty[, D(A))$ solution de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \ sur\ [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

2. On pose $H_1 = D(A)$, et on considère l'opérateur $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \to H_1$ défini par $D(A_1) = \mathcal{D}(A^2)$ et

$$A_1 u = Au,\ \forall u \in D(A_1).$$

Montrer que A_1 est maximal accrétif. En déduire que si $u_0 \in D(A^2)$, la solution u de (1) est en fait dans $C^1([0, +\infty[, H_1) \cap C([0, +\infty[, D(A_1))$.

3. Montrer que $v = \frac{du}{dt} \in C^1([0, +\infty[, H)$ et satisfait l'équation

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 \ sur\ [0, +\infty[\\ v(0) = -Au_0 \end{cases} \tag{2}$$

4. Montrer que si $u_0 \in D(A^k)$ alors, $\forall 0 \leq j \leq k$, $u \in C^{k-j}([0, +\infty[, D(A^j))$.

⋆

Exercice 2. *Opérateur auto-adjoint et effet régularisant*

1. Soit H un espace de Hilbert. On fait l'identification $H = H'$. Soit $A : D(A) \to H$ un opérateur non borné à domaine dense. Rappeler la définition de l'adjoint A^* de A.

2. Montrer qu'un opérateur maximal accrétif symétrique est auto-adjoint. Dans toute la suite A sera un opérateur maximal accrétif autoadjoint.

3. Soit $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$. Montrer que la solution u de (1) satisfait

$$\frac{1}{2}(|u(T)|^2 - |u_0|^2) + \int_0^T < Au, u >= 0.$$

4. Montrer que $\frac{d}{dt} < Au, u >= 2 < Au, \frac{du}{dt} >$.

5. En déduire que $|\frac{du}{dt}(T)| \leq \frac{1}{T}|u_0|$.

Indication : On pourra prendre le produit scalaire de (1) avec $t\frac{du}{dt}$ et intégrer de 0 à T.

6. Soit maintenant $u_0 \in H$. Montrer que l'on peut résoudre (1), et que la solution u est dans $C([0,+\infty[,H) \cap C^k(]0,+\infty[,D(A^j))$ pour tout $k,j \geq 0$ et satisfait

$$|u(t)| \leq |u_0|, \quad |\frac{du}{dt}| \leq \frac{1}{t}|u_0|.$$

Indication : On pourra approcher u_0 par des éléments de $D(A^2)$.

⋆

Exercice 3. *Noyau de la chaleur*

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. On s'intéresse à l'équation

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \Delta u = 0 \ sur \ \mathbb{R}^n \times [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 \ sur \ \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

1. En utilisant la transformée de Fourier, donner une formule explicite de la solution L^2.

2. Quelle est la régularité de u, pour $t > 0$?

⋆

Exercice 4. *Unicité rétrograde pour l'équation de la chaleur*

Soit U un ouvert borné, lisse de $\mathbb{R}^n$. Soit $u_1, u_2 \in C^2([0,T] \times \bar{U})$ deux solutions de

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \Delta u = 0 \ sur \ U \times [0,T] \\ u = g \ sur \ \partial U \times [0,T] \end{cases}$$

On suppose qu'au temps T, $u_1(T) = u_2(T)$.

1. On pose $w = u_1 - u_2$ et $e(t) = \int_U w(t,x)^2 dx$. Montrer que

$$\dot{e}(t)^2 \leq e(t)\ddot{e}(t)$$

2. On suppose, qu'il existe $[a,b] \subset [0,T]$ tel que $e > 0$ sur $[a,b]$. On pose alors $f(t) = \log(e(t))$. Montrer que f est convexe.

3. En déduire que $u_1 = u_2$ sur $[0,T] \times U$.

⋆