Analyse fonctionnelle
TD n° 10

Théorie spectrale — Transformée de Fourier

Séance du 18 avril 2017

Exercice 1. *Échauffement*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un Borélien de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions $f,\, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telles que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que f et g soient à support compact ?

⋆

Exercice 2. *Rayon spectral*

1. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle sous-additive, c'est-à-dire telle que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ pour tous $n,\, m \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\{\frac{a_n}{n}\}$ converge.

2. Soit X un espace de Banach (sur $\mathbb{C}$), et $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur continu. Montrer que la suite $\{\|T^n\|^{1/n}\}$ converge. On appelle *rayon spectral* sa limite, et on la note $r(T)$.

3. Montrer que si X est un Hilbert, et si T est hermitien, alors $r(T) = \|T\|$.

4. On revient au cas général. Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la série

$$z\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} z^k T^k\right) =: R_z(T)$$

converge absolument. Montrer qu'alors $\frac{1}{z}$ n'est pas dans le spectre de T. En déduire que $r(T) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(T)} |\lambda|$.

⋆

Exercice 3. *Le calcul fonctionnel définit une application isométrique*

Soit H un espace de Hilbert séparable, et A un opérateur autoadjoint.

1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, le spectre de $P(A)$ est l'ensemble des images par P des éléments du spectre de A.

2. En déduire que $\|P(A)\|_{\mathcal{L}(H)} = \|P\|_{L^\infty(\mathrm{Sp}(A))}$, puis que l'application

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0(\mathrm{Sp}(A)) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \\ \qquad\qquad f \longmapsto f(A) \end{cases}$$

est isométrique.

⋆

Exercice 4. *Translations*

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. On note V le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$ engendré par les translatées de f, *i.e.* les fonctions $x \mapsto f(x+a)$, où $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $g \in V^\perp$ si et seulement si $\hat{g}\overline{\hat{f}} \equiv 0$.

2. Montrer que V est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si l'ensemble des zéros de $\hat{f}$ est de mesure nulle.

⋆

Exercice 5. *Théorème de Bochner*

Définition 1. *On dit que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est semi-définie positive si pour tous $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^d$ et tous $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, on a*

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\xi_j - \xi_k) z_j \bar{z_k} \geq 0,$$

et de plus, $f(-\xi) = \overline{f(\xi)}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

1. Soit μ une mesure finie positive sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \mu(dx), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d$$

est semi-défine positive, continue, et satisfait $f(0) = \mu(\mathbb{R}^d)$.

2. On va montrer la réciproque (le théorème de Bochner) : toute fonction semi-définie positive, continue, et telle que $f(0) = 1$, est la transformée de Fourier d'une mesure finie positive. Soit donc f une telle fonction. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a $|f(y)| \leq 1$.

3. On considère la forme linéaire définie par

$$\ell(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\phi}(\xi) f(\xi) d\xi,$$

pour tout ϕ dont la transformée de Fourier est dans L^1. Montrer que pour tout $\psi \in \mathcal{S}$ strictement positive, $\ell(\psi) > 0$.

Indication : On pourra écrire $\psi = \theta^2$, avec $\theta \in \mathcal{S}$.

4. On introduit la fonction $K_\lambda(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{(1+\lambda x_j^4)}$, et on fixe $\phi \in \mathcal{S}$ et $\varepsilon > 0$. Montrer que pour λ assez petit,

$$\phi(x) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) K_\lambda(x).$$

5. En déduire que

$$\ell(\phi) \leq (\varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{K}_\lambda(\xi) f(\xi) d\xi.$$

6. En faisant tendre λ vers 0, montrer que $|\ell(\phi)| \leq \varepsilon + \|\phi\|_{L^\infty}$, et conclure.

⋆