Corrigé – TD 10

Mesures signées, Théorème de Radon-Nikodym, Dualité $\mathbb{L}^p$–$\mathbb{L}^q$

Exercice 1 (L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$)**.** Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures signées boréliennes sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme $\mu \mapsto \|\mu\|$, où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$.

Corrigé : Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$.

Étape 1: pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ et $n, p \geq 1$, on a $|\mu_n(A) - \mu_p(A)| \leq \|\mu_n - \mu_p\|$, ce qui implique que la suite $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et converge donc vers une limite notée $\mu(A)$.

Étape 2: montrons que μ est une mesure signée. Prouvons tout d'abord que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|\,;\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = 0. \tag{1}$$

À cet effet, soient $\epsilon > 0$ et $n_0 > 1$ tels que $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \epsilon$ pour $n, k \geq n_0$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On choisit $k > n_0$ tel que $|\mu(A) - \mu_k(A)| < \epsilon$. Alors pour $n > n_0$:

$$|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \mu_n(A)| \leq \epsilon + \|\mu_n - \mu_k\| \leq 2\epsilon,$$

ce qui prouve (1).

Ensuite, les mesures signées μ_n sont en particulier finiment additives, ce qui implique aisément que μ est finiment additive. Montrons maintenant que μ est σ-additive. Soient $(A_i)_{i\geq 1}$ des boréliens disjoints et $\epsilon > 0$. D'après (1), il existe $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$:

$$\sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|;\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \leq \epsilon.$$

On choisit ensuite $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$:

$$\left|\mu_n\Big(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\Big)\right| \leq \epsilon.$$

En particulier, ceci implique que pour $k \geq k_0$:

$$\left|\mu\Big(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\Big)\right| \leq 2\epsilon.$$

Par additivité (finie) de μ, on obtient finalement pour tout $k \geq k_0$:

$$\left|\mu\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) - \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\right| = \left|\mu\Big(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\Big)\right| \leq 2\epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, la σ-additivité de μ en découle, ce qui prouve que μ est une mesure signée.

Étape 3: on vérifie que $\|\mu_n - \mu\| \to 0$. Ceci découle immédiatement de (1) et de l'inégalité

$$\|\nu\| = \nu(X^+) + |\nu(X^-)| \leq 2\sup\{|\nu(A)|\,;\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

vérifiée pour une mesure signée ν sur $\mathbb{R}$ (où on a noté $X^\pm$ les supports de $\nu^\pm$).

On a donc prouvé que $(\mathcal{M}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Pour des questions, n'hésitez pas à envoyer un mail à `shen.lin@ens.fr`, ou bien à passer au bureau V7.

Exercice 2 (Contre-exemple à Radon-Nikodym)**.**
Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{R}))$, c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure.

Corrigé :

1. Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ telle que $m_0(A) = 0$. Alors $A = \varnothing$ et donc $\lambda(A) = 0$.
2. Supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f dm_0 = f(x).$$

   Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction.
3. La mesure m_0 n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas.

Exercice 3. On veut prouver le résultat suivant, appelé *dualité* $\mathbb{L}^p$–$\mathbb{L}^q$:
Soit μ une mesure positive σ-finie sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$, soit $p \in [1, \infty[$ et soit q l'exposant conjugué de p. Alors, pour toute forme linéaire continue $\phi\colon \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu) \to \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $g_\phi \in \mathbb{L}^q(E, \mathscr{E}, \mu)$ telle que pour toute $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$,

$$\phi(f) = \int_E f g_\phi d\mu.$$

De plus, la norme d'opérateur de ϕ

$$\|\phi\|_p' := \sup\{|\phi(f)|\colon f \in \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu), \|f\|_p = 1\} = \|g_\phi\|_q,$$

et l'application $\phi \mapsto g_\phi$ est une isométrie linéaire bijective du dual topologique de $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ sur $\mathbb{L}^q(E, \mathscr{E}, \mu)$.

1. Supposons d'abord que la mesure μ est finie.
   (a) On définit $\nu(A) = \phi(\mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{E}$. Vérifier que l'application ν ainsi définie est une mesure complexe absolument continue par rapport à μ.
   (b) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions étagées $\mathscr{E}$-mesurables, et on se rappelle que $\mathcal{S}$ est dense dans $\mathbb{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mu)$. Montrer en utilisant le théorème de Radon-Nikodym qu'il existe une fonction $g\colon E \to \mathbb{C}$, $\mathscr{E}$-mesurable et μ-intégrable telle que

   $$\forall f \in \mathbb{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mu), \quad \phi(f) = \int_E fg\, d\mu.$$

   (c) Si $p = 1$, montrer que cette fonction $g \in \mathbb{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mu)$ et $\|g\|_\infty = \|\phi\|_1'$.

(d) Si $1 < p < \infty$, montrer que $g \in \mathbb{L}^q(E, \mathscr{E}, \mu)$ et $\|g\|_q = \|\phi\|'_p$.

2. Supposons que la mesure μ est σ-finie: soient $E_n \in \mathscr{E}, n \in \mathbb{N}$ tels que $\cup E_n = E$ et $\mu(E_n) < \infty$.

   (a) On pose $\omega = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2^{-n-1}}{1+\mu(E_n)} \mathbf{1}_{E_n}$ et $\mu^* = \omega\mu$. Alors μ^* est une mesure positive de masse finie.

   (b) On définit $\psi\colon \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu^*) \to \mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu)$ par $\psi(h) = \omega^{1/p} h$. Vérifier que ψ est une isométrie bijective linéaire.

   (c) Conclure en considérant la forme linéaire continue $\varphi = \phi \circ \psi$ sur $\mathbb{L}^p(E, \mathscr{E}, \mu^*)$.

Corrigé : Voir le polycopié de cours.

Exercice 4 (Petit contre-exemple)**.** Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathscr{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

Corrigé : On a $\mathbb{L}^\infty = \{f\colon E \to \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{L}^1 = \{f\colon E \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0\}$. Donc le dual topologique de $\mathbb{L}^1$ est $(\mathbb{L}^1)' = \{f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \alpha f(a)\colon \alpha \in \mathbb{R}\}$. On voit ici que l'application $g \in \mathbb{L}^\infty \mapsto \Phi_g \in (\mathbb{L}^1)'$, où $\Phi_g\colon f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \int_E fg\, d\mu$), est surjective mais pas injective.

La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de dualité (avec $p = 1$ et $q = +\infty$) ne s'applique pas dans ce cas.

Exercice 5 (Théorème de Vitali-Saks)**.** Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré. Une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures sur $\mathscr{E}$ est dite *absolument équicontinue* par rapport à la mesure μ si:

$$\begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \in \mathscr{E}, & \mu(A_\varepsilon) < +\infty \quad \text{et} \quad \forall i \in I, \nu_i(A_\varepsilon^c) < \varepsilon, \\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall A \in \mathscr{E}, & \mu(A) < \delta \implies \forall i \in I, \nu_i(A) < \varepsilon \end{cases}$$

On suppose que $\mathscr{E} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe stable par intersection finie contenant E. Le but est de prouver le résultat suivant :

Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures finies sur $\mathscr{E}$, absolument équicontinue par rapport à μ et telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu_n(C)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $A \in \mathscr{E}$, $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\mathbb{R}_+$ et ν définit une mesure absolument continue par rapport à μ.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathscr{E};\, \nu(A) = \lim_n \nu_n(A) \text{ existe dans } \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par différence propre (c'est-à-dire si $A, B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{B}$).

2. Soient $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{B}$ et B leur réunion. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k).$$

3. En déduire que $\mathcal{B} = \mathscr{E}$.

4. Montrer que l'application ν est une mesure sur $\mathscr{E}$, absolument continue par rapport à la mesure μ.

Corrigé (ou plutôt ébauche de corrigé) :

1. Pas de difficulté.
2. D'abord voir que
$$\sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n(B)$$
en utilisant le lemme de Fatou (pour la mesure de comptage). Pour prouver que
$$\limsup_{n\to\infty} \nu_n(B) \leq \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k),$$
écrire pour tout $\epsilon > 0$ et $n, k \geq 1$:
$$\nu_n(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu_n(B_j) + \nu_n\Big(A_\varepsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\Big) + \nu_n\left(A_\varepsilon^c \cap B\right),$$
et utiliser le fait que $\mu\big(A_\varepsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\big) \to 0$ lorsque $k \to \infty$.
3. On vérifie que $\mathcal{B}$ est une classe monotone, ce qui fournit le résultat désiré en utilisant le lemme de la classe monotone.
4. Pas de difficulté en utilisant l'équicontinuité.

Exercice 6 (Séquentielle compacité faible dans $\mathbb{L}^1$, théorème de Dunford–Pettis)**.**
Soit $(E, \mathscr{E}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. On suppose que $\mathscr{E} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe dénombrable stable par intersection finie contenant E.

1. Montrer que c'est bien le cas lorsque E est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ (c'est-à-dire la suite $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ est bornée) telle que la suite de mesures $(|f_n| \cdot \mu)_{n\geq 1}$ est absolument équicontinue par rapport à μ (voir l'exercice précédent pour une définition).

2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ telle que les deux suites de mesures définies par $\nu^{\pm} := f_n^{\pm} \cdot \mu$ vérifient: pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu^{\pm}_{\phi(n)}(C)$ existent dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu)$ vérifiant pour tout $A \in \mathscr{E}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_{\phi(n)} d\mu = \int_A f d\mu$.
4. En déduire la convergence faible de $f_{\phi(n)}$ vers f: $\forall g \in \mathbb{L}^\infty(E, \mathscr{E}, \mu)$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_{\phi(n)} g \, d\mu = \int_E f g \, d\mu.$$
5. Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement converge-t-elle nécessairement μ-p.p. ou en norme $\|\cdot\|_1$ vers f ?

Corrigé (ou plutôt ébauche de corrigé) :

1. Prendre $\mathcal{U} = (U_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de E avec $U_0 := E$, puis choisir $\mathcal{C}$ comme étant composée par les intersections finies d'éléments de $\mathcal{U}$.

2. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, les suites $(\nu_n^{\pm}(C))_{n\geq 1}$ sont bornées, donc admettent une valeur d'adhérence. Utiliser ensuite le procédé d'extraction diagonal et la dénombrabilité de $\mathcal{C}$.

3. Appliquer l'exercice précédent aux suites de mesures $(\nu_n^{\pm})_{n\geq 1}$, puis le théorème de Radon-Nikodym à leur limite (justifier qu'on peut l'appliquer !)

4. Si $g \in \mathbb{L}^{\infty}(E, \mathscr{E}, \mu)$, voir que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction étagée g_ϵ telle que $\|g - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.

5. Non. Considérer la suite définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sin(nx)$.