PROCESSUS STOCHASTIQUES - TD 10

Exercice 1 (Les parapluies)**.**
Pierre possède n parapluies qu'il garde soit chez lui, soit dans son bureau à Ulm. Le matin, avant d'aller au travail, il regarde par la fenêtre le temps qu'il fait :

- s'il fait beau, il ne prend pas de parapluie.
- s'il pleut et qu'il a un parapluie chez lui, il prend le parapluie et va au travail.
- s'il pleut et qu'il n'y a plus de parapluie, il décide de rester chez lui.

Le soir, il fait la même chose (s'il pleut et qu'il n'a pas de parapluies, il décide de rentrer quand même). On suppose que chaque demi-journée, il pleut avec probabilité p et il fait beau avec probabilité $(1-p)$, et que de plus, la météo de chaque demi-journée sont indépendantes. Quel est la limite, quand k tend vers l'infini, de la probabilité que Pierre reste chez lui le k-ème jour ?

Exercice 2 (Marche aléatoire en milieu aléatoire)**.**
Soient $(\omega_x^+)_{x\in\mathbb{Z}}$ une famille de v.a.i.i.d. sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ à valeurs dans $]0,1[$. On fait les notations suivantes :

$$\omega_x^- = 1-\omega_x^+,\ \ \omega_x = (\omega_x^-,\omega_x^+),$$

$$\omega = (\ldots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\omega_2,\ldots),\quad \text{et}\ \ \rho_x = \frac{\omega_x^-}{\omega_x^+}.$$

Prenons un ω fixé qui servira d'environnement aléatoire. Maintenant définissons $((X_n)_{n\geq 0},P_\omega)$ la chaîne de Markov issue de 0 qui vérifie :

$$P_\omega[X_{n+1}=x+1|X_n=x]=\omega_x^+ \ \text{ et }\ P_\omega[X_{n+1}=x-1|X_n=x]=\omega_x^-.$$

Nous allons montrer le théorème suivant :

- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]<0$, alors $P_\omega[\lim X_n=+\infty]=1$, $\mathbb{P}$-p.s.
- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]>0$, alors $P_\omega[\lim X_n=-\infty]=1$, $\mathbb{P}$-p.s.
- Si $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]=0$, alors $P_\omega[\limsup X_n=+\infty,\liminf X_n=-\infty]=1$, $\mathbb{P}$-p.s.

1. Soit $a\leq b$ des entiers, définissons

$$\Pi_{a,b}=\prod_{a<x\leq b}\rho_x$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{0\leq x<z}\Pi_{0,x} \quad \text{si}\ \ z\geq 0 \\ f(z) &= -\sum_{z\leq x<0}\Pi_{x,0}^{-1} \quad \text{si}\ \ z<0 \end{aligned}$$

   Montrer que $f(X_n)$ est une martingale sous P_ω pour la filtration canonique.

2. Soient $M_-<0<M_+$, calculer $P_\omega[X_n$ touche M_+ avant $M_-]$.
3. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)]<0$, montrer que $P_\omega[\lim X_n=+\infty]=1$ $\mathbb{P}$-p.s.

4. Lorsque $\mathbb{E}[\log(\rho_0)] = 0$ et $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)] < \infty$. Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

En déduire que $P_\omega[\limsup X_n = +\infty, \liminf X_n = -\infty] = 1$.

5. ($\star$) Même question lorsqu'on ne suppose pas $\mathbb{E}[\log^2(\rho_0)] < \infty$.

Exercice 3 (Polymères dirigés en milieu aléatoire)**.**
Soit $((X_n)_{n\geq 0}, Q)$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$. Soient $(\omega_{n,x})_{(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}^d}$ une famille de v.a. réelles i.i.d. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Elles nous serviront de milieu aléatoire. On suppose que pour tout $\beta > 0$, $\mathbb{E}[e^{\beta\omega_{0,0}}] < \infty$ et on définit

$$\lambda(\beta) = \log\left(\mathbb{E}[e^{\beta\omega_{0,0}}]\right).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $X = (X_k)_{k\geq 0}$ une trajectoire fixée, on définit

$$H_n(X) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{k,X_k},$$

et pour $\beta > 0$ nous allons définir une nouvelle mesure μ_n^β sur l'espace des trajectoires de $\mathbb{Z}^d$:

$$d\mu_n^\beta(X) = \frac{1}{Z_n^\beta} e^{\beta H_n(X)} dQ(X),$$
$$Z_n^\beta = E_Q[e^{\beta H_n(X)}].$$

Ainsi, la mesure μ_n^β dépend de ω, c'est une mesure aléatoire sur l'espace des trajectoires sur $\mathbb{Z}^d$. Dans cet exercice nous allons simplement nous intéresser au comportement de Z_n^β.

1. Calculer $\mathbb{E}[Z_n^\beta]$.

2. Montrer que $W_n^\beta := Z_n^\beta e^{-n\lambda(\beta)}$ est une martingale pour la filtration

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\omega_{k,x}, x \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq k \leq n).$$

3. Montrer que W_n^β converge p.s. vers une variable limite W_∞^β.

4. Montrer que $\mathbb{P}[W_\infty^\beta = 0] \in \{0, 1\}$.

5. Soit X et $\widehat{X}$ deux trajectoires sur $\mathbb{Z}^d$ et $n > 0$, on définit

$$N_n(X, \widehat{X}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k = \widehat{X}_k}$$

le nombre de rencontres des deux trajectoires avant l'instant n. Montrer que

$$\mathbb{E}[(W_n^\beta)^2] = Q^{\otimes 2}\left[e^{(\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta))N_n(X,\widehat{X})}\right],$$

où l'ecriture $Q^{\otimes 2}$ signifie qu'on fait l'espérance pour X et $\widehat{X}$ sont indépendants.

6. Soit π_d la probabilité de rencontre de deux marches aléatoires simples sur $\mathbb{Z}^d$:

$$\pi_d := Q^{\otimes 2}[\exists k > 0, X_k = \widehat{X}_k].$$

Montrer que si $e^{\lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta)} \leq \frac{1}{\pi_d}$ alors $W_\infty^\beta > 0$ $\mathbb{P}$-p.s.