10 Mouvement brownien II

Exercice 10.1 (Condition de cône extérieur)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On dit que Ω satisfait la condition de cône extérieur si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un $r > 0$ et un cône ouvert de révolution C de sommet x tel que $\Omega \cap C \cap B(x,r) = \emptyset$.* Montrer qu'un ouvert Ω qui satisfait la condition de cône extérieur et régulier au sens où pour tout $x \in \partial\Omega$ on a

$$\inf\{t > 0 : B_t^x \notin \Omega\} \quad = \quad 0.$$

Exercice 10.2 (Zéros du mouvement brownien)**.** Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel que l'on suppose continu pour tout ω.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ & \to & \{0,1\} \\ (\omega, t) & \mapsto & \mathbb{1}_{B_t(\omega)=0} \end{array}$$

   est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathscr{F} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^+)$.

   Indication: on pourra considerer les ensembles de la forme

$$E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall t \in]a,b[, B_t(\omega) \neq 0\}$$

   pour tous $0 \leq a < b$, et montrer qu'ils sont dans $\mathscr{F}$.

2. Soit $\mathscr{Z} = \{t \geq 0 \,|\, B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. Montrer que p.s. $\mathscr{Z}$ est fermé, non borné, de mesure de Lebesgue nulle et sans point isolé.

   Indication: pour montrer cette dernière propriété, on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \geq q \,|\, B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$, montrer que pour tout q, p.s., $d_q < \infty$, et montrer dans un premier temps que ces éléments particuliers de $\mathscr{Z}$ ne sont pas isolés p.s.

Exercice 10.3 (Loi de l'arcsinus)**.** On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 \,|\, B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 \,|\, B_t = 0\}$.

1. Montrer que d_1 est un temps d'arrêt mais pas g_1.

2. On veut calculer la densité de la loi de d_1.

   (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{E}[g(B_1)],$$

   où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a posé

$$g(x) = \mathbb{P}(\sup_{s \in [0,t-1]} \widetilde{B}_s \geq |x|)$$

   avec $\widetilde{B}$ un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de $\mathscr{F}_1$.

(b) Montrer que

$$d_1 = 1 + \left(\frac{N}{\hat{N}}\right)^2 \quad \text{en loi,}$$

où N et $\hat{N}$ sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

(c) En déduire la densité de la loi de d_1.

3. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).

Exercice 10.4. 1. Soient X et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans S^1, la sphère unité. Montrer que si Z suit la loi uniforme sur S^1, alors XZ suit la même loi que Z et est indépendant de X.

2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et T un temps d'arrêt fini. Soit U une variable aléatoire strictement positive $\mathscr{F}_T$-mesurable. Montrer que

$$(B_t^T)_{t\geq 0}^{(U)} = \left(\frac{1}{U} B^T_{U^2 t}\right)_{t\geq 0}$$

est un mouvement brownien indépendant de $\mathscr{F}_T$ (et donc aussi de U). On rappelle que $B_t^T = B_{T+t} - B_T$.

Exercice 10.5 (Maxima locaux du mouvement brownien)**.** Soient $p, q, r, s \in \mathbb{Q}_+$ tels que $p < q < r < s$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\sup_{p\leq t\leq q} B_t = \sup_{r\leq t\leq s} B_t\right) = 0.$$

En déduire que p.s. les maxima locaux de la fonction $t \longmapsto B_t$ sont distincts.

Exercice 10.6 ($B_t = a$ et $B_t > a$)**.** Montrer que pour tout $a > 0$, p.s., on a

$$\inf\{t \geq 0 \,|\, B_t = a\} = \inf\{t \geq 0 \,|\, B_t > a\}.$$