

10 Mouvement brownien II

Exercice 10.1 (Condition de cône extérieur). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . On dit que Ω satisfait la condition de cône extérieur si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un $r > 0$ et un cône ouvert de révolution C de sommet x tel que $\Omega \cap C \cap B(x, r) = \emptyset$. Montrer qu'un ouvert Ω qui satisfait la condition de cône extérieur et régulier au sens où pour tout $x \in \partial\Omega$ on a

$$\inf\{t > 0 : B_t^x \not\subset \Omega\} = 0.$$

Correction : Voir preuve du Lemme 14.6.7 dans le poly de Jean-François Le Gall.

Exercice 10.2 (Zéros du mouvement brownien). Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réel que l'on suppose continu pour tout ω .

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\omega, t) &\mapsto \mathbb{1}_{B_t(\omega)=0} \end{aligned}$$

est mesurable lorsque l'on munit $\Omega \times \mathbb{R}^+$ de la tribu $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

Indication: on pourra considérer les ensembles de la forme

$$E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in]a, b[, B_t(\omega) \neq 0\}$$

pour tous $0 \leq a < b$, et montrer qu'ils sont dans \mathcal{F} .

2. Soit $\mathcal{Z} = \{t \geq 0 \mid B_t = 0\}$, l'ensemble des zéros du mouvement brownien. Montrer que p.s. \mathcal{Z} est fermé, non borné, de mesure de Lebesgue nulle et sans point isolé.

Indication: pour montrer cette dernière propriété, on pourra considérer les temps d'arrêt $d_q = \inf\{t \geq q \mid B_t = 0\}$ pour $q \in \mathbb{Q}^+$, montrer que pour tout q , p.s., $d_q < \infty$, et montrer dans un premier temps que ces éléments particuliers de \mathcal{Z} ne sont pas isolés p.s.

Correction :

1. Il suffit de montrer que $\varphi^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Pour cela on remarque que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\{0\}) &= \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \mid B_t(\omega) \neq 0\} \\ &= \bigcup_{0 \leq a < b \in \mathbb{Q}^+} \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in]a, b[, |B_t(\omega)| \neq 0\} \times]a, b[\end{aligned}$$

car à ω fixé, $\{t \in \mathbb{R}^+ \mid B_t(\omega) \neq 0\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^+ (par continuité de B). Il suffit donc de montrer que pour tous $0 \leq a < b \in \mathbb{Q}^+$,

$$E_{a,b} = \{\omega \in \Omega \mid \forall t \in]a, b[, |B_t(\omega)| \neq 0\}$$

est dans \mathcal{F} . Or on a

$$\begin{aligned}
E_{a,b} &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \{ \omega \in \Omega \mid \forall t \in [a + 1/n, b - 1/n], |B_t(\omega)| \neq 0 \} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{ \omega \in \Omega \mid \forall t \in [a + 1/n, b - 1/n], |B_t(\omega)| \geq \frac{1}{p} \} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \{ \omega \in \Omega \mid \forall t \in [a + 1/n, b - 1/n] \cap \mathbb{Q}, |B_t(\omega)| \geq \frac{1}{p} \} \\
&= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{t \in [a + 1/n, b - 1/n] \cap \mathbb{Q}} \{ \omega \in \Omega \mid |B_t(\omega)| \geq \frac{1}{p} \} \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

On a utilisé la continuité de $t \rightarrow B_t(\omega)$ d'abord pour se ramener à des intervalles compacts $[a + 1/n, b - 1/n]$, puis pour affirmer que si $|B_t(\omega)| > 0$ sur $[a + 1/n, b - 1/n]$ il existe $p(\omega) \in \mathbb{N}^*$ tel que $|B_t(\omega)| \geq 1/p(\omega)$ sur $[a + 1/n, b - 1/n]$ par compacité de $[a + 1/n, b - 1/n]$, et enfin pour se restreindre à des valeurs de t dans \mathbb{Q} . Ceci achève la démonstration de 1..

2. • Pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue ce qui implique que $\mathcal{Z}(\omega)$ est fermé.
• De plus, on sait que p.s.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} B_t = +\infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} B_t = -\infty \quad \text{et} \quad t \mapsto B_t \quad \text{continu}$$

ce qui implique que \mathcal{Z} est p.s. non borné.

- Notons $M = \lambda(\mathcal{Z})$ la mesure de Lebesgue de \mathcal{Z} . On a, d'après le théorème de Fubini (on peut bien l'appliquer grâce à la question 1.),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M) &= \int \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} dt \right) d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \int_0^\infty \left(\int \mathbb{1}_{\{B_t(\omega)=0\}} d\mathbb{P}(\omega) \right) dt \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(B_t = 0) dt = 0,
\end{aligned}$$

car pour tout t , la loi de B_t n'a pas d'atome en 0. La variable aléatoire M étant positive, cela implique que $M = 0$ p.s. c'est à dire que \mathcal{Z} est de mesure de Lebesgue nulle p.s..

- Enfin, montrons que \mathcal{Z} n'a pas de point isolé. Pour $q \in \mathbb{Q}^+$, posons

$$d_q = \inf\{t \geq q \mid B_t = 0\}.$$

Le point d_q est un élément de \mathcal{Z} , pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$, et d_q est un temps d'arrêt. De plus, pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$, d_q est fini p.s. car $\limsup B = +\infty$ et $\liminf B = -\infty$. Par la propriété de Markov

forte appliquée en d_q (donc pas besoin du conditionnement par $d_q < \infty$ ici), on sait que le processus $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$\tilde{B}_t = \begin{cases} B_{d_q+t} - B_{d_q} = B_{d_q+t} & \text{si } d_q < \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est un mouvement brownien issu de 0. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\inf\{t > d_q \mid B_t = 0\} = d_q) &= \mathbb{P}(\inf\{t > 0 \mid B_{t+d_q} = B_{d_q} = 0\} = 0) \\ &= \mathbb{P}(\inf\{t > 0 \mid \tilde{B}_t = 0\} = 0) \\ &= 1, \end{aligned}$$

car on sait d'après le cours que p.s., pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{[0,\varepsilon]} B > 0$ et $\inf_{[0,\varepsilon]} B < 0$, donc par continuité p.s. du mouvement brownien, $\inf\{t > 0 \mid B_t = 0\} = 0$ p.s. Ainsi, p.s., d_q n'est pas isolé puis p.s., pour tout $q \in \mathbb{Q}_+$, d_q n'est pas isolé.

Pour $\omega \in \Omega$, considérons $T(\omega) \in \mathcal{Z}(\omega) \setminus \{d_q(\omega), q \in \mathbb{Q}_+\}$ et une suite de rationnels $(r_n)_{n \geq 0}$ telle que $r_n \uparrow T(\omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi, pour tout $n \geq 0$, $r_n \leq d_{r_n}(\omega) < T(\omega)$ ce qui implique que $d_{r_n}(\omega) \rightarrow T(\omega)$ quand $n \rightarrow \infty$. Donc $T(\omega)$ n'est pas isolé, et ainsi, p.s., \mathcal{Z} n'a pas de point isolé.

Exercice 10.3 (Loi de l'arcsinus). On définit $d_1 = \inf\{t \geq 1 \mid B_t = 0\}$ et $g_1 = \sup\{t \leq 1 \mid B_t = 0\}$.

1. Montrer que d_1 est un temps d'arrêt mais pas g_1 .
2. On veut calculer la densité de la loi de d_1 .
 - (a) Montrer que pour tout $t \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{E}[g(B_1)],$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a posé

$$g(x) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \geq |x|\right)$$

avec \tilde{B} un mouvement brownien issu de 0 et indépendant de \mathcal{F}_1 .

- (b) Montrer que

$$d_1 = 1 + \left(\frac{N}{\hat{N}}\right)^2 \text{ en loi,}$$

où N et \hat{N} sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

- (c) En déduire la densité de la loi de d_1 .

3. Montrer que $g_1 = (d_1)^{-1}$ en loi. En déduire la densité de la loi de g_1 (la loi de g_1 s'appelle la loi de l'arcsinus).

Correction :

1. Pour d_1 c'est facile. En revanche g_1 n'est pas un temps d'arrêt car il donne de l'information sur le futur.
2. (a) Pour tout $t \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d_1 \leq t) &= \mathbb{P}(\exists s \in [1, t] | B_s = 0) \\
&= \mathbb{P}(\exists s \in [0, t-1] | B_{1+s} - B_1 = -B_1) \\
&= \mathbb{P}(\exists s \in [0, t-1] | \tilde{B}_s = -B_1),
\end{aligned}$$

où par la propriété de Markov faible on sait que \tilde{B} est un mouvement brownien issu de 0, indépendant de \mathcal{F}_1 . On en déduit que

$$\mathbb{P}(d_1 \leq t) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\exists s \in [0, t-1] | \tilde{B}_s = -B_1\}} | \mathcal{F}_1) \right) = \mathbb{E}(g(B_1)),$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
g(x) &= \mathbb{P}(\exists s \in [0, t-1] | \tilde{B}_s = -x) \\
&= \begin{cases} \mathbb{P}(\sup_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \geq -x) & \text{si } x < 0 \\ \mathbb{P}(\inf_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \leq -x) = \mathbb{P}(\sup_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \geq x) & \text{si } x \geq 0 \text{ (car } \tilde{B} = -\tilde{B} \text{ en loi)} \end{cases} \\
&= \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \geq |x| \right).
\end{aligned}$$

On a utilisé la même propriété de l'espérance conditionnelle que dans l'exercice 1, et on a utilisé le fait que \tilde{B} est continu p.s.

- (b) En appliquant le changement d'échelle de paramètre $\gamma = \sqrt{t-1}$ à \tilde{B} , i.e. en remarquant que $(\hat{B}_s)_{s \geq 0} = (\tilde{B}_{(t-1)s} / \sqrt{t-1})_{s \geq 0}$ est un mouvement brownien (toujours indépendant de \mathcal{F}_1), et en notant $\hat{S}_u = \sup_{s \in [0, u]} \hat{B}_s$ on obtient

$$\begin{aligned}
g(x) &= \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, t-1]} \tilde{B}_s \geq |x| \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} \tilde{B}_{(t-1)s} \geq |x| \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} \sqrt{t-1} (\tilde{B}_{(t-1)s} / \sqrt{t-1}) \geq |x| \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sqrt{t-1} \sup_{s \in [0, 1]} \hat{B}_s \geq |x| \right) \\
&= \mathbb{P} \left(\sqrt{t-1} \hat{S}_1 \geq |x| \right)
\end{aligned}$$

On note en passant que \hat{S}_1 est indépendant de \mathcal{F}_1 , donc de B_1 . On en déduit, en notant

génériquement P_Z la loi de Z , que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(d_1 \leq t) &= \int g(x) dP_{B_1}(x) \\
&= \int \left(\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |x|\}}] \right) dP_{B_1}(x) \\
&= \mathbb{E} \left[\int \mathbb{1}_{\{\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |x|\}} dP_{B_1}(x) \right] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |B_1|\}} | \hat{S}_1]] \\
&= \mathbb{P}[\sqrt{t-1}\hat{S}_1 \geq |B_1|].
\end{aligned}$$

On remarque que \hat{S}_1 et $|B_1|$ sont des variables indépendantes (on l'a d'ailleurs utilisé pour faire apparaître le conditionnement). De plus on a l'égalité en loi $\hat{S}_1 = |\hat{B}_1|$, donc \hat{S}_1 et $|B_1|$ sont égales en loi, de même loi que la valeur absolue d'une gaussienne centrée réduite. En notant N et \hat{N} deux gaussiennes centrées réduites indépendantes, on en déduit que

$$\mathbb{P}[d_1 \leq t] = \mathbb{P}[\sqrt{t-1}|\hat{N}| \leq |N|] = \mathbb{P}[1 + N^2/\hat{N}^2 \leq t].$$

Cela montre que d_1 a la loi de $1 + (N/\hat{N})^2$ où N et \hat{N} sont deux gaussiennes centrées réduites indépendantes.

- (c) Calculons la densité de cette loi par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour tout fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(d_1)) &= \int_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} f\left(1 + \frac{n^2}{p^2}\right) e^{-\frac{n^2+p^2}{2}} dndp \\
&= 4 \int_{n=0}^{+\infty} \int_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} f\left(1 + \frac{n^2}{p^2}\right) e^{-\frac{n^2+p^2}{2}} dndp \\
&= 4 \int_{u=1}^{+\infty} \int_{p=0}^{+\infty} f(u) \frac{p}{4\pi\sqrt{u-1}} e^{-\frac{up^2}{2}} dudp \\
&= \int_{u=1}^{+\infty} \frac{f(u)}{\pi\sqrt{u-1}} \left(\int_{p=0}^{+\infty} p e^{-\frac{up^2}{2}} dp \right) du \\
&= \int_{u=1}^{+\infty} f(u) \frac{1}{\pi u \sqrt{u-1}} du.
\end{aligned}$$

La loi de d_1 a donc pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$u \mapsto \frac{1}{\pi u \sqrt{u-1}} \mathbb{1}_{\{u>1\}}.$$

3. On a, p.s.,

$$\begin{aligned}
g_1 &= \sup\{t \leq 1 \mid B_t = 0\} \\
&= \left(\inf\{u \geq 1 \mid B_{1/u} = 0\} \right)^{-1} \\
&= \left(\inf\{t \geq 1 \mid tB_{1/t} = 0\} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Puisque $(X_t)_{t \geq 0}$ défini par $X_0 = 0$ et $X_t = tB_{1/t}$ pour $t > 0$ est un mouvement brownien (résultat du cours), cela implique que g_1 a la même loi que $(d_1)^{-1}$. Alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable bornée, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(g_1)) &= \int_1^\infty f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\pi x \sqrt{x-1}} dx \\ &= \int_0^1 f(y) \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} dy, \end{aligned}$$

la loi de g_1 a donc pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$y \mapsto \frac{1}{\pi \sqrt{y(1-y)}} \mathbb{1}_{\{0 < y < 1\}}.$$

- Exercice 10.4.** 1. Soient X et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans S^1 , la sphère unité. Montrer que si Z suit la loi uniforme sur S^1 , alors XZ suit la même loi que Z et est indépendant de X .
2. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et T un temps d'arrêt fini. Soit U une variable aléatoire strictement positive \mathcal{F}_T -mesurable. Montrer que

$$(B_t^T)^{(U)}_{t \geq 0} = \left(\frac{1}{U} B_{U^2 t} \right)_{t \geq 0}$$

est un mouvement brownien indépendant de \mathcal{F}_T (et donc aussi de U). On rappelle que $B_t^T = B_{T+t} - B_T$.

Correction : Bureau V4.

Exercice 10.5 (Maxima locaux du mouvement brownien). Soient $p, q, r, s \in \mathbb{Q}_+$ tels que $p < q < r < s$. Montrer que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{p \leq t \leq q} B_t = \sup_{r \leq t \leq s} B_t \right) = 0.$$

En déduire que p.s. les maxima locaux de la fonction $t \mapsto B_t$ sont distincts.

Correction : Bureau V4.

Exercice 10.6 ($B_t = a$ et $B_t > a$). Montrer que pour tout $a > 0$, p.s., on a

$$\inf\{t \geq 0 \mid B_t = a\} = \inf\{t \geq 0 \mid B_t > a\}.$$

Correction : Bureau V4.