TD 10 : FONCTIONS SPÉCIALES 2

Exercices : à préparer à la maison avant le TD, seront corrigés en début de TD.
Exercices : seront traités en classe en priorité.
Exercices : plus difficiles.

Exercice 1:

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes. On considère la série :

$$f(s) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

1. *(Cette question a déjà été traitée la dernière fois)*. Montrer que si $f(s)$ converge pour un certain s tel que $\mathrm{Re}(s) = \sigma_0$, alors $f(s)$ converge pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.
2. On suppose qu'il existe C et $\sigma_1 > 0$ tel que :
$$|a_1 + ... + a_n| \leq Cn^{\sigma_1}$$
pour tout n. Montrer que $f(s)$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > \sigma_1$.
3. On suppose qu'il existe un nombre complexe ρ et $\sigma_1 \in [0,1[$ tels que $a_1 + ... + a_n = n\rho + O(n^{\sigma_1})$. D'après la question précédente, la série f converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. Montrer que f s'étend en une fonction méromorphe sur $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \sigma_1\}$. Montrer que le seul pôle de ce prolongement est 1 et qu'il est simple.

Exercice 2: Soit f une fonction holomorphe sur $U = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > 0\}$. On suppose que $f(z+1) = zf(z)$ pour tout z, que f est bornée sur la bande $\{z \in \mathbb{C}, 1 \leq \mathrm{Re}(z) < 2\}$, que $f(1) = 1$ et que f ne s'annule pas.

1. Vérifier que la fonction Γ satisfait les mêmes hypothèses que la fonction f.
2. Montrer que f s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer que f/Γ est entière d'ordre 1.
4. En déduire que $f = \Gamma$.
5. A l'aide de la question précédente montrer que la fonction Γ satisfait les équations
$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{k})\Gamma(z+\frac{2}{k})\ldots\Gamma(z+\frac{k-1}{k}) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(k-1)}k^{\frac{1}{2}-kz}\Gamma(kz)$$
pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 3:

Soit H le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

1. Rappeler pourquoi, si $\mathrm{Re}(s) > 1$,
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx$$
où $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire de x. En déduire que la fonction ζ s'étend meromorphiquement au demi-plan H.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(x) = o(1/x^2)$ et $f'(x) = o(1/x^2)$ quand $|x| \to +\infty$. Montrer que :
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n),$$
où $\hat{f}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nx} f(x)dx$.
3. Considérons la fonction thêta :
$$\theta(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}$$
et la fonction xi :
$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

(a) Vérifier que θ et ξ sont des fonctions holomorphes sur le demi-plan H.

(b) Montrer que, pour s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a :

$$2\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\int_0^{+\infty}(\theta(u)-1)u^{s/2}\frac{du}{u}.$$

(c) Montrer que, pour $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\theta(1/s) = s^{1/2}\theta(s).$$

(d) En déduire que, pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$, on a :

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

4. Montrer que la fonction ζ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$. Quels sont ses pôles ?

Exercice 4: Soit $\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. On rappelle que ξ est entière et qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle $\xi(1-s) = \xi(s)$.

1. Montrer qu'il existe une fonction entière f telle que $\xi(s+1/2) = f(s^2)$.

2. Montrer que la fonction ξ est d'ordre inférieur ou égal à 1.

3. Montrer qu'une fonction entière dont l'ordre est fini et n'est pas entier admet une infinité de zéros.

4. En déduire que la fonction ζ a une infinité de zéros dans la bande $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$.

Exercice 5:

1. On se donne $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels, $q > 0$ entier et $M > 0$. Montrer que l'on peut trouver $t \in [M, Mq^n]$ et des entiers $m_1, \dots, m_n$ tels que pour tout $1 \le k \le n$,

$$|ta_k - m_k| \le \frac{1}{q}.$$

2. Soit $\sigma > 1$. Montrer que pour tout réel t

$$|\zeta(\sigma + it)| \le \zeta(\sigma)$$

et que pour tout $\epsilon > 0$, il existe des t arbitrairement grands tels que

$$|\zeta(\sigma + it)| \ge (1-\epsilon)\zeta(\sigma).$$

3. En déduire que pour tout $R > 0$, la fonction ζ n'est pas bornée sur l'ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Im}(s) > R$.

Exercice 6:

1. On se donne $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$ et $M > 0$. Montrer que si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_M^T\left(\prod_{k=1}^n f_k(a_k t)\right)dt = \prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(t)\,dt\right).$$

On pourra commencer par traiter le cas des polynômes trigonométriques.

2. On conserve les notations précédentes et on se donne de plus $b_1, \dots, b_n$ des réels, et $\epsilon > 0$. Montrer l'existence d'un réel $t > M$ et de n entiers $m_1, \dots, m_n$ tels que pour tout $1 \le k \le n$,

$$|ta_k - b_k - 2\pi m_k| < \epsilon.$$

On va appliquer ce résultat à l'étude de $1/\zeta$.

3. Montrer que la fonction $s \mapsto \mathrm{Re}\left(\log(\zeta(s)) - \sum_p p^{-s}\right)$ est bornée sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$.

4. On fixe $n \ge 1$ et $M > 0$. Montrer que l'on peut trouver $t > M$, tel que pour tout $\sigma > 1$, l'on ait, si $s = \sigma + it$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_p p^{-s}\right) \le -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n p_k^{-\sigma} + \sum_{k>n} p_k^{-\sigma}.$$

5. En déduire que quelque soit $M > 0$, $1/\zeta$ n'est pas bornée sur l'ouvert $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\mathrm{Im}(s) > M$.

Exercice 7: A l'aide du théorème des nombres premiers, montrer que :

- si p_n désigne le n-ème nombre premier, $p_n \sim n \log n$ quand $n \to +\infty$;
- l'ensemble des rationnels de la forme p/q avec p et q premiers, est dense dans $\mathbb{R}^+$;
- pour toute chaîne finie d'entiers $a_1 \dots a_n$, avec $a_i \in \{0, \dots, 9\}$ pour tout i et $a_1 \neq 0$, il existe un nombre premier dont le développement décimal commence par $a_1 \dots a_n$.

Exercice 8: Pour tout $T > 0$, on note $N(T)$ le nombre de zéros de ζ dans la bande $0 < \mathrm{Im}(s) \leq T$.

1. Montrer que

$$\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds = \sum_{\rho, \xi(\rho)=0} \int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{ds}{s-\rho}$$

et en déduire que

$$(N(T+1) - N(T)) \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{2} \leq \mathrm{Im}\left(\int_{2+iT}^{2+i(T+1)} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} ds \right).$$

2. On rappelle l'équivalent (Stirling) valable pour s dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq 0$:

$$\log \Gamma(s) = s \log(s) - s + O(\log(|s|)).$$

A l'aide de cet équivalent, prouver que

$$N(T+1) - N(T) = O(\log(T)).$$

3. Redémontrer le résultat de la question précédente, en prouvant que $N(T+1) - N(T) \leq n(\sqrt{5})$, $n(r)$ désignant le nombre de zéros dans le cercle de centre $2 + iT$ de rayon r, puis en utilisant la formule de Jensen.
En fait, on sait montrer (et Riemann savait déjà...) que

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log\left(\frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{1}{T}\right).$$

4. Que peut-on dire asymptotiquement de la multiplicité d'un zéro de la fonction ζ dans le rectangle considéré ?