Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Espaces de Hilbert et opérateurs compacts

Séance du 21 mai 2012

Exercice 1. *Convergence faible dans un Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne.

1. Montrer qu'une suite bornée (x_n) converge faiblement si et seulement si pour tout p, $(e_p|x_n)$ admet une limite (dans $\mathbb{R}$) quand $n \to \infty$. En déduire que $e_n \rightharpoonup 0$.

2. Quelle est l'adhérence faible de la sphère unité $\mathbb{S} = \{x \in H | \|x\| = 1\}$?

3. On considère $F = \{e_m + me_n | m, n \geq 1\}$. 0 est-il dans l'adhérence séquentielle faible de F ? Et dans l'adhérence séquentielle faible de l'adhérence séquentielle faible de F ? Qu'en conclure ?

⋆

Exercice 2. *Opérateurs compacts*

1. Soient E et F des Banach. Montrer qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini est compact, et que la limite d'opérateurs de rang fini est compacte.

2. Si F est un Hilbert, montrer tout $T \in \mathcal{K}(E, F)$ est limite d'opérateurs de rang fini.

3. Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est réfléxif. Montrer que T est compact si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de E convergeant faiblement vers un certain x, la suite $(Tx_n)_n$ converge fortement vers Tx.

4. On considère la multiplication par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $M_a : \ell^2 \to \ell^2$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que M_a est continue si et seulement si $(a_n) \in \ell^\infty$. Montrer que M_a est compacte si et seulement si $a_n \to 0$.

⋆

Exercice 3. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne (e_n) de H telle que $\sum_n \|Te_n\|^2 < \infty$.

1. Soit (f_p) une base hilbertienne de H. Montrer que

$$\sum_p \|T^* f_p\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

En déduire que pour toute base hibertienne $(\tilde{e}_m)$ de H,

$$\sum_m \|T\tilde{e}_m\|^2 = \sum_n \|Te_n\|^2.$$

On note cette quantité $\|T\|_{HS}^2$.

2. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact. Que dire de la réciproque ?

3. On suppose que $H = L^2(\Omega)$ avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction $L^2(\Omega \times \Omega)$. On définit

$$(T_K f)(x) = \int K(x,y)f(y)dy.$$

Montrer que pour toute base hilbertienne (e_n) de $L^2(\Omega)$ on a

$$\|K\|^2_{L^2(\Omega\times\Omega)} = \sum_n \|T_K e_n\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

4. Montrer qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $L^2(\Omega)$ s'écrit de manière unique sous la forme T_K.

⋆

Exercice 4. *S.e.v. de fonctions dérivables fermé dans les fonctions continues*

Soit F un s.e.v. fermé de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, inclus dans $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

1. Montrer que la dérivation $D : F \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$ est continue.

Indication : On pourra par exemple utiliser le théorème du graphe fermé.

2. En déduire que F est de dimension finie.

⋆

Exercice 5. *Première valeur propre du laplacien, partie 1*

Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^d$. Étant donné $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $-\Delta u = f$. On note $(-\Delta)^{-1}(f) = u$.

1. Montrer qu'il existe donc une suite croissante $\lambda_n \to \infty$ et une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, notée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset H^1_0(\Omega)$ telle que

$$-\Delta e_n = \lambda_n e_n.$$

2. Montrer que $\sqrt{\lambda_1} = \inf_{u\in H^1_0, \|u\|_{L^2}=1} \|\nabla u\|_{L^2}$ est la constante optimale dans l'inégalité de Poincaré, et que cet optimum est réalisé uniquement sur l'espace propre E_{λ_1} associé à λ_1.

⋆

Exercice 6. *Opérateurs à noyaux*

Soit (X,μ) et (Y,η) deux espaces mesurés et $K \in L^2(X \times Y, \mu \times \eta)$. Pour tout $f \in L^2(Y,\eta)$, on définit

$$Tf(x) = \int_Y k(x,y)f(y)d\eta(y).$$

Montrer que $T : L^2(Y,\eta) \to L^2(X,\mu)$ est continu et compact.

⋆