Td n° 10 d'Analyse fonctionnelle

Transformée de Fourier

Séance du 17 Avril 2015

Exercice 1. *Quelques questions sur la transformée de Fourier*

1. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie non nulle. Montrer que $\widehat{\mathbb{1}_A}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$, mais pas à $L^1(\mathbb{R}^d)$.

2. Existe-t-il deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $f * g = 0$? Que se passe-t-il si on demande de plus que $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$?

3. Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $a_1, ...a_k$ des réels non tous nuls tel que $\sum_{i=1}^k a_i \partial^i u = 0$. Montrer que $u = 0$.

⋆

Exercice 2. *Transformée de Fourier de* $\operatorname{vp} x$

On rappelle que la *valeur principale* de $1/x$ est définie par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), < \operatorname{vp} x, \phi >= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right).$$

1. Montrer que $x \operatorname{vp} x = \mathbb{1}$.

2. Montrer que $\mathcal{F}(\operatorname{vp} x)$ est impaire au sens des distributions, c'est-à-dire que, en notant $\varphi^v(x) = \varphi(-x)$, on a $< \mathcal{F}(\operatorname{vp} x), \varphi^v >= - < \mathcal{F}(\operatorname{vp} x), \varphi >$.

3. En déduire $\mathcal{F}(\operatorname{vp} x)$.

⋆

Exercice 3. *Théorème de Paley-Wiener*

1. Expliquer pour quoi la transformée de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{E}(\mathbb{R})'$ est analytique.

Cependant, la transformée de Fourier d'une fonction analytique n'est pas toujours une distribution à support compact (elle n'est même pas toujours définie!). Le but de cet exercice est de montrer une condition nécessaire et suffisante pour avoir cette propriété.

2. On suppose $F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$ avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On suppose f supportée dans $B(0, R)$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe C_N telle que

$$|F(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N} e^{R|\Im(\xi)|}. \tag{1}$$

3. Soit F une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété (1) pour tout N. On pose $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} F(\xi) d\xi$. Montrer que cela défini bien une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

4. En utilisant l'intégration sur un contour dans le plan complexe, montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq C e^{R|\eta| - x\eta}$. En déduire que f est à support compact. Conclure.

5. Montrer qu'une fonction F, analytique sur $\mathbb{C}$ est la transformée de Fourier d'une distribution T à support compact si et seulement si il existe R, N, C tels que

$$|F(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^N e^{R|\Im(\xi)|}.$$

Indication : On pourra régulariser T et utiliser la question précédente.

⋆

Exercice 4. *L'équation de Schrödinger*

On considère l'équation sur $\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}u + \Delta u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{2}$$

1. On suppose $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Résoudre l'équation (2) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$.

2. Justifier pourquoi la transformée de Fourier de $e^{it|\xi|^2}$ est bien définie.

3. Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{C}$ de partie réelle strictement négative, on a $\mathcal{F}^{-1}(e^{\alpha|\xi|^2}) = \frac{1}{(-4\alpha\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4\alpha}}$.

4. Montrer que cette égalité reste vraie, au sens de $\mathcal{S}'$, pour α imaginaire pur.

5. En déduire qu'il existe C (à déterminer) telle que pour $u_0 \in L^1$ la solution $u(t,x)$ vérifie, pour $t > 0$ $\|u(t,.)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{n}{2}}}\|u_0\|_{L^1}$.

⋆

Exercice 5. *Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin*

On veut montrer le résultat suivant : soit $1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0 \neq q_1 \leq \infty$ et T un opérateur tel que

– $T \in \mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0})$ de norme M_0,
– $T \in \mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})$ de norme M_1.

On veut montrer que T se prolonge en un opérateur de $\mathcal{L}(L^p, L^q)$ de norme $M \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta$, où p, q, θ sont tels que $0 < \theta < 1$ et $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ et $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$.

1. Soit $f, g \in \mathcal{D}$ tels que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^{q'}} = 1$. Pour $O \leq \Re(z) \leq 1$ on pose $\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$ et $\frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}$. On pose alors

$$\phi(x,z) = |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}}\frac{f}{|f|}, \quad \psi(x,z) = |g(x)|^{\frac{q'}{q'(z)}}\frac{g}{|g|}.$$

Montrer que $F(z) =< T\phi(z), \psi(z) >$ est analytique dans $0 < \Re(z) < 1$ et continue et bornée sur $0 \leq\ Re(z) \leq 1$ et que l'on a $|F(it)| \leq M_0, \quad |F(1+it)| \leq M_1$.

2. Montrer $|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta$.

Indication : On pourra considérer les fonctions $F_\epsilon(z) = e^{\epsilon z^2 + \lambda z}F(z)$, et utiliser le principe du maximun.

3. Conclure

Applications du théorème de Riesz-Thorin

4. Inégalité de Young. Soit $f \in L$, $g \in L^q$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. Montrer que $f * g \in L^r$ où r est tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

5. Inégalité de Haussdorff-Young. Soit $1 \leq p \leq 2$. Montrer que l'on peut prolonger la transformée de Fourier en une appliation $\mathcal{F} : L^p \mapsto L^{p'}$.

6. Montrer que pour $u_0 \in L^p$ avec $1 \leq p \leq 2$ la solution de l'équation de Scrödinger (2) vérifie, pour $t > 0$

$$\|u(t)\|_{L^{p'}} \leq \frac{C}{|t|^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}}\|u_0\|_{L^p}.$$

⋆