Td n° 9 d'EDP

Régularité elliptique et inégalité de Trudinger

Séance du 12 décembre 2014

Exercice 1. *Régularité elliptique*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $A \in C^{0,1}(\Omega)$ telle que

$$< A\xi, \xi > \geq \lambda |\xi|^2.$$

Pour $h \in \mathbb{R}^n$ on note $\tau_h u = u(x+h)$ et $\Delta_h u = \frac{u(x+h)-u(x)}{|h|}$. Soit Ω' et Ω'' tels que $\overline{\Omega'} \subset \Omega''$ et $\overline{\Omega''} \subset \Omega$.

1. Rappeler pourquoi, pour $u \in H^1(\Omega)$ et h assez petit

$$\|\tau_h u - u\|_{L^2(\Omega'')} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. Soit u une solution faible de

$$-div(A\nabla u) = f.$$

2. Montrer que pour tout h assez petit et $\phi \in H^1$, à support dans Ω'' on a

$$\int (\tau_h A) \nabla(\Delta_h u).\nabla \phi = \int (\Delta_h f)\phi - \int \Delta_h A \nabla u.\nabla \phi.$$

3. En s'inspirant de la preuve de l'inégalité de Cacciopoli, montrer que

$$\int_{\Omega'} |\nabla \Delta_h u|^2 \leq C \int_\Omega \left(|u|^2 + |f|^2\right).$$

4. En déduire

$$\int_{\Omega'} |\nabla^2 u|^2 \leq C \int_\Omega \left(|u|^2 + |f|^2\right).$$

5. On considère maintenant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f \text{ sur } R \\ u = 0 \text{ sur } \partial R \end{cases}$$

où R est le rectangle $[0,a] \times [-a,a]^{n-1}$. Soit $R' = [0,a/2] \times [-a/2,a/2]^{n-1}$. Montrer que

$$\int_{R'} |\nabla^2 u|^2 \leq C \int_R \left(|u|^2 + |f|^2\right).$$

⋆

Exercice 2. *Inégalité de Trudinger*

1. Soit $u \in H^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que l'on peut écrire $u = J_{\frac{n}{2}} * v$, avec $v \in L^2$ et

$$\mathcal{F}(J_{\frac{n}{2}}) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n}{4}}}.$$

2. En étudiant la distribution

$$u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \mapsto \int e^{ix\xi} \frac{u(x)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n}{4}}} dx d\xi$$

définie par une intégrale oscillante, montrer que $J_{\frac{n}{2}}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et décroit rapidement quand $|x| \longrightarrow \infty$.

3. Montrer que pour $|x| \leq 1$, on a

$$|J_{\frac{n}{2}}(x)| \leq C|x|^{-\frac{n}{2}}.$$

Indication : On pourra remarquer que $J_{\frac{n}{2}} - \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ est une fonction continue, et estimer $\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-\frac{n}{2}})$ par homogénéité.

4. En déduire

$$\|J_{\frac{n}{2}}\|_{L^{2-\delta}}^{2-\delta} \leq \frac{C_n}{\delta}.$$

5. En utilisant le théorème de Young, montrer que

$$\|u\|_{L^p} \leq C(2+p)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} \|u\|_{H^{\frac{n}{2}}}.$$

6. En déduire qu'il existe $\gamma(\|u\|_{H^{\frac{n}{2}}})$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (e^{\gamma|u(x)|^2} - 1) dx < \infty.$$

⋆