

FORMULES DE BENOÎT SAINT-AUBIN POUR LA THÉORIE
CONFORME DES CHAMPS DE LIOUVILLE

Mémoire de master de Tunan ZHU
sous la direction de Vincent VARGAS

8 septembre 2017

Table des matières

1	Introduction	1
2	Quelques outils mathématiques	2
2.1	Métrie Riemannienne	2
2.2	Champ libre gaussien (GFF)	4
2.3	Chaos multiplicatif gaussien (GMC)	7
2.4	Propriétés des vecteurs gaussiens et du GMC	11
3	Fonctions de corrélation de Liouville	14
3.1	Construction	15
3.2	Invariance conforme des fonctions de corrélation	18
4	Formules de Benoît et Saint-Aubin (BSA)	20
4.1	Calculs des dérivées	20
4.2	Intégrales hyper-singulières des corrélations	23
4.3	Règles de récurrence	25
4.4	Preuve des équations BPZ d'ordre (2,1) et (3,1)	29
4.5	Etude des corrélations à 4 points	30
4.6	Résolution des équations BPZ d'ordre (3,1) pour les corrélations à 4 points	33
4.7	Problème de monodromie	37
4.8	Forme intégrale des fonctions de corrélation	40
A	Algorithmes matlab pour vérifier la validité des équations BPZ d'ordre (r,1) (testés pour r allant de 1 à 8)	44

Mots Clés— Liouville conformal field theory, BSA formulas, BPZ equations, Gaussian multiplicative chaos

1 Introduction

La théorie conforme des champs de Liouville (LCFT) rentre dans le cadre général de la théorie conforme des champs. Un des buts principaux de la théorie est de caractériser les fonctions de corrélation, qui peuvent être considérées comme des amplitudes de probabilité pour un système de particules en interaction. Ceux qui sont intéressés peuvent consulter [25] pour le point de vue des physiciens.

Le but de ce mémoire est de montrer que certaines fonctions de corrélation de la théorie de Liouville satisfont les équations de Belavin-Polyakov-Zamolodchikov (BPZ), qui ont été premièrement proposées en 1984 dans l'article fondateur [4]. Ensuite on utilise cette équation pour donner une formule explicite pour ces fonctions de corrélation, ce qui donnera en corollaire des résultats intéressants sur les chaos multiplicatifs gaussiens. Les équations BPZ sont indexées par deux paramètres (r, s) , avec r, s entiers supérieur à 1 (l'équation associée au paramètre (r, s) est un opérateur différentiel d'ordre $r + s - 1$ en plusieurs variables complexes). Les équations d'ordre $(2, 1)$ et $(3, 1)$ (et ses équations duales d'ordre $(1, 2)$ et $(1, 3)$) sont particulièrement intéressantes et simples, mais une formule générale pour les équations BPZ n'est pas connue. Néanmoins, en 1988, Benoît et Saint-Aubin (BSA, [5]) ont trouvé une formule remarquable et explicite pour les équations BPZ de paramètre $(r, 1)$. L'approche que les auteurs emploient est basée sur la théorie des représentations. Malgré la simplicité, cette approche manque des définitions propres aux objets intervenus. Récemment, dans un cadre mathématique rigoureux, une approche probabiliste à la théorie de Liouville a été proposée dans David-Kupiainen-Rhodes-Vargas [8] : les auteurs construisent les fonctions de corrélation de Liouville en s'appuyant sur la théorie du chaos multiplicatif gaussien et initient l'étude de ces fonctions de corrélation. L'enjeu est de montrer qu'elles vérifient les propriétés prédites par les physiciens dans le cadre de la théorie conforme des champs. Dans cette direction, les auteurs de [19] ont retrouvé dans le cadre probabiliste les équations BPZ d'ordre $(2, 1)$ et $(1, 2)$. Dans ce mémoire, on va introduire les outils probabilistes derrière [19] et ensuite on généralisera ce que font les auteurs dans cet article. Dans la section 4.4 on retrouve les équations BPZ d'ordre $(3, 1)$ dans le cadre probabiliste de [8] ; ce résultat est nouveau. Par ailleurs, on retrouvera de façon rigoureuse une formule due à Litvinov-Fateev [14].

On considère la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ munie d'une métrique g . On introduit $\mu > 0$, $\gamma \in]0, 2[$ et $Q = \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma}$. Pour une fonction $X : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$, l'action de Liouville est donnée par

$$S(X, g) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} (|\nabla_g X|^2 + QR_g X + 4\pi\mu e^{\gamma X}) \lambda_g \quad (1.1)$$

où ∇_g , R_g , $d\lambda_g$ sont respectivement le gradient, la courbure de Ricci et la forme volume dans la métrique g (On rappellera les définitions dans la section 2.1). Le dernier terme de l'action est un terme d'interaction, avec μ l'analogie de la constante cosmologique de la gravité deux-dimensionnelles, et le choix de Q assure la propriété d'invariance conforme de la théorie. Les fonctions de corrélation sont formellement définies par l'intégrale suivante :

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle := \int \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) e^{-S(X, g)} DX \quad (1.2)$$

où les $V_{\alpha_l}(z_l) = e^{\alpha_l X(z_l)}$ sont appelés les opérateurs de vertex (terminologie en physique) et DX est la "mesure de Lebesgue" sur l'espace des fonctions $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$. On verra dans la section 3.1 que ces fonctions de corrélation sont bien définies par l'équation 1.2 lorsque les α_l satisfont les bornes de Seiberg [27] :

$$\forall l, \alpha_l < Q \text{ et } \sum_l \alpha_l > 2Q \quad (1.3)$$

La formule BSA donne l'opérateur différentiel suivant, pour $r \geq 2$:

$$\mathcal{D}_r = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k} \\ n_1 + \dots + n_k = r}} \frac{\left(\frac{\gamma^2}{4}\right)^{r-k}}{\prod_{j=1}^{k-1} (\sum_{i=1}^j n_i) (\sum_{i=j+1}^k n_i)} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \quad (1.4)$$

(Par convention, lorsque $k = 1$, $\prod_{j=1}^{k-1} (\sum_{i=1}^j n_i) (\sum_{i=j+1}^k n_i) = 1$)
 Les L_{-n} sont donnés par

$$L_{-1} = \partial_z \quad (1.5)$$

$$L_{-n} = \sum_{l=1}^N \left(-\frac{1}{(z_l - z)^{n-1}} \partial_{z_l} + \frac{\Delta_l (n-1)}{(z_l - z)^n} \right) \quad n \geq 2 \quad (1.6)$$

avec $\Delta_l = \frac{\alpha_l}{2} (Q - \frac{\alpha_l}{2})$ appelé le poids conforme. L'équation de BPZ d'ordre $(r, 1)$ s'écrit

$$\mathcal{D}_r \langle V_{-\frac{(r-1)\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = 0 \quad (1.7)$$

On note qu'il existe une version duale de ces équations, qui sont les équations BPZ d'ordre $(1, r)$:

$$\sum_{k=1}^r \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k} \\ n_1 + \dots + n_k = r}} \frac{\left(\frac{4}{\gamma^2}\right)^{r-k}}{\prod_{j=1}^{k-1} (\sum_{i=1}^j n_i) (\sum_{i=j+1}^k n_i)} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \langle V_{-\frac{2(r-1)}{\gamma}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = 0 \quad (1.8)$$

Ces équations peuvent être prouvées exactement de la même façon que les équations 1.7, donc on ne traite pas les équations duales dans ce mémoire.

La vérification de ces équations permet de faire le lien entre l'approche probabiliste par l'intégrale de chemin et l'approche des physiciens nommée "conformal bootstrap". Les cas d'ordre $(2, 1)$ et $(1, 2)$ sont particulièrement intéressants et ils donnent des informations importantes sur les fonctions de corrélation, plus précisément sur les constantes de structure, dont on verra la définition dans la section 4.5. Les idées générales du conformal bootstrap sont présentées dans [21], et l'approche par l'intégrale de chemin est expliqué dans [17].

2 Quelques outils mathématiques

2.1 Métrique Riemannienne

Soit M une variété de classe \mathcal{C}^∞ . On note $\mathcal{C}^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur M , et $\Gamma^\infty(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ sur M .

Définition 1. On appelle métrique Riemannienne (de classe \mathcal{C}^∞) la donnée pour tout $p \in M$ d'un produit scalaire g_p sur l'espace tangent T_p dépendant de façon \mathcal{C}^∞ de p . Le couple (M, g) est appelé une variété Riemannienne.

Remarque. Une façon alternative est de donner une matrice $(g_{ij}(p))_{i,j}$ à chaque point $p \in M$ telle que les g_{ij} soient de classe \mathcal{C}^∞ . Alors pour $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^\infty(TM)$ et $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \in \Gamma^\infty(M)$, on a

$$g_p(X(p), Y(p)) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) X_i(p) Y_j(p) \quad (2.1)$$

Pour la sphère \mathbb{S} , on considère la carte locale donnée par la projection stéréographique de pôle nord :

$$\begin{aligned} \varphi_N : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{S} \setminus \{N\} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \frac{2x_2}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{1 + |x|^2} \right) \end{aligned}$$

On prend \hat{g} la métrique induite sur \mathbb{S} par la métrique canonique de \mathbb{R}^3 . Cette métrique est appelée métrique canonique de \mathbb{S} . Un calcul facile donne

$$\hat{g}_{ij}(\varphi_N(x)) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi_N, \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi_N \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{4\delta_{i,j}}{(1+|x|^2)^2} \quad (2.2)$$

On prend désormais $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (qu'on voit comme une variété réelle), muni de la métrique sphérique

$$(\hat{g}_{ij}(z))_{i,j} = \frac{4}{(1+|z|^2)^2} I_2 =: \hat{g}(z) I_2 \quad (2.3)$$

Définition 2. On donne les éléments de calculs différentiels dont on a besoin sur une variété Riemannienne n -dimensionnelle orientable (M, g) .

1) La forme volume de (M, g) lu dans une carte locale est donnée par

$$\lambda_g = \sqrt{|\det g|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (2.4)$$

2) Le gradient est l'opérateur $\nabla_g : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \Gamma^\infty(M)$ tel que pour tout $X \in \Gamma^\infty(M)$,

$$g(\nabla_g f, X) = df(X) \quad (2.5)$$

3) La divergence est l'opérateur $\operatorname{div}_g : \Gamma^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ qui satisfait

$$d(i_X \lambda^g) = \operatorname{div}_g \cdot \lambda_g \quad (2.6)$$

où $i_X \lambda^g$ est une $(n-1)$ -forme donnée par

$$i_X \lambda_g(X_1, \dots, X_{n-1}) = \lambda_g(X, X_1, \dots, X_{n-1})$$

4) Le Laplacien est l'opérateur $\Delta_g : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ défini par

$$\Delta_g = \operatorname{div}_g \circ \nabla_g \quad (2.7)$$

5) La courbure de Ricci pour $n = 2$ est donnée par la formule

$$R_g = -\Delta_g \ln(\sqrt{|\det g|}) \quad (2.8)$$

Avec ces définitions, on peut déduire leurs formules explicites dans une carte locale. Les preuves sont laissées en exercice.

Proposition 1. On note $(g^{ij})_{i,j}$ l'inverse de la matrice $(g_{ij})_{i,j}$. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et $X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \Gamma^\infty(M)$, on a

$$\nabla_g f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.9)$$

$$\operatorname{div}_g X = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i \sqrt{|\det g|} \right) \quad (2.10)$$

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det g|} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad (2.11)$$

Remarque. On peut faire le calcul sur $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{g})$, avec $z = x_1 + ix_2$:

$$\int_{\mathbb{C}} \lambda_{\hat{g}} = \int_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[} \frac{4}{(1+r^2)^2} r dr d\theta = 4\pi \quad (2.12)$$

$$R_{\hat{g}}(z) = -\frac{1}{\hat{g}(z)} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\ln \left(\frac{4}{(1+|z|^2)^2} \right) \right) = 2 \quad (2.13)$$

En particulier, on trouve $\int_{\mathbb{C}} R_{\hat{g}} \lambda_{\hat{g}} = 8\pi$. Ce résultat a une forme générale appelée la formule de Gauss-Bonnet : pour une surface Riemannienne compacte orientable sans bord (M, g) ,

$$\int_M R_g \lambda_g = 8(\pi - \text{genre de la surface}) \quad (2.14)$$

On s'intéresse à une déformation conforme de g , i.e. $\tilde{g} = e^\varphi g$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. C'est une déformation qui préserve les angles. On peut déduire grâce à la proposition 1 :

Proposition 2. *Les opérateurs sous la nouvelle métrique \tilde{g} deviennent*

$$\nabla_{\tilde{g}} = e^{-\varphi} \nabla_g \quad (2.15)$$

$$\text{div}_{\tilde{g}}(X) = \text{div}_g(X) + \frac{n}{2} X(\varphi) \quad (2.16)$$

$$\Delta_{\tilde{g}} = e^{-\varphi} \Delta_g + \left(\frac{n}{2} - 1\right) e^{-\varphi} \nabla_g \varphi \quad (2.17)$$

On revient vers $\hat{\mathbb{C}}$, où $n = 2$.

Proposition 3. *Pour $(\hat{\mathbb{C}}, g)$, $\tilde{g} = e^\varphi g$ une déformation conforme ($\varphi(z)$ et $\varphi(\frac{1}{z})$ sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C}), on a*

$$R_{\tilde{g}} = e^{-\varphi} (R_g - \Delta_g \varphi) \quad (2.18)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} R_{\tilde{g}} &= -\Delta_{\tilde{g}} \ln(\sqrt{|\det \tilde{g}|}) = -e^{-\varphi} \Delta_g \ln(e^\varphi \sqrt{|\det g|}) \\ &= -e^{-\varphi} \Delta_g \varphi - e^{-\varphi} \Delta_g \ln(\sqrt{|\det g|}) = e^{-\varphi} (R_g - \Delta_g \varphi) \quad \square \end{aligned}$$

On montrera dans 3.2 que les fonctions de corrélation de Liouville sous la déformation conforme a une formule explicite, donc on peut se contenter de travailler avec la métrique \hat{g} .

Remarque. Dans la suite on identifie \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , et $d^2 z = \frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz = dx \wedge dy$. On ne considérera que $g = e^\varphi \hat{g}$, en particulier, $\lambda_g(d^2 z) = g(z) d^2 z$. En effet, toutes les métriques Riemanniennes sur la sphère peuvent s'écrire sous la forme $\psi^*(e^\varphi \hat{g})$, avec ψ un difféomorphisme, qui n'influence pas la structure de la surface.

2.2 Champ libre gaussien (GFF)

L'équation 1.2 n'a pas de sens mathématique, mais on peut remarquer que

$$e^{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} |\nabla_g X|^2(z) \lambda_g} DX = e^{\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} X(z) \Delta_g X(z) \lambda_g} DX \quad (2.19)$$

Formellement, cela peut être vu comme une loi gaussienne de covariance $(-2\pi \Delta_g)^{-1}$ (pourtant ce n'est pas une probabilité en général), ce qui nous emmène à l'étude de champ libre gaussien. Voir [6] et [12] pour une introduction au champ libre gaussien dans un domaine borné. Ici c'est un peu différent comme on travaille sur le plan tout entier, mais l'idée reste la même. On donne une définition pour la fonction de Green, qui traduit l'opérateur $(-2\pi \Delta_g)^{-1}$.

Définition 3. La fonction de Green G_g pour Δ_g est solution de l'équation

$$\begin{cases} \Delta_g G(\cdot, y) = -2\pi\delta(\cdot - y) \\ \int_{\mathbb{C}} G(\cdot, y)\lambda_g(d^2y) = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

On a une expression explicite pour G_g

$$G_g(x, y) = \ln \frac{1}{|x - y|} - m_g(\ln \frac{1}{|x - \cdot|}) - m_g(\ln \frac{1}{|y - \cdot|}) + \theta_g \quad (2.21)$$

avec

$$m_g(f) = \frac{1}{\lambda_g(\mathbb{C})} \int_{\mathbb{C}} f \lambda_g \quad (2.22)$$

$$\theta_g = \frac{1}{\lambda_g(\mathbb{C})^2} \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \ln \frac{1}{|z - z'|} \lambda_g(d^2z) \lambda_g(d^2z') \quad (2.23)$$

On va noter pour toute fonction f qui vérifie la condition d'intégrabilité

$$G_g f := (-2\pi\Delta_g)^{-1} f = \int_{\mathbb{C}} G(\cdot, y) f(y) \lambda(d^2y) \quad (2.24)$$

On remarque que $G_g - \ln \frac{1}{|x-y|}$ est borné pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ et toute g . On pose

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{ \rho \text{ mesure signéé} : \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} G_g(x, y) \rho(d^2x) \rho(d^2y) < \infty \} \\ &= \{ \rho \text{ mesure signéé} : \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \ln \frac{1}{|x - y|} \rho(d^2x) \rho(d^2y) < \infty \} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Définition 4 (GFF processus). Le champ libre gaussien X_g sur la sphère $(\hat{\mathbb{C}}, g)$ est un processus gaussien centré indexé par \mathcal{M} , avec la fonction de covariance G_g (ou $(-2\pi\Delta_g)^{-1}$). Plus précisément, pour $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{M}$,

$$\text{Cov}[X_g(\rho_1), X_g(\rho_2)] = \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} G_g(x, y) \rho_1(d^2x) \rho_2(d^2y) \quad (2.26)$$

Remarque. La définition est valide car G_g est défini positif. Il existe plusieurs définitions équivalentes pour le champ libre gaussien, voir [13].

On donne aussi une construction précise du champ libre gaussien, qui lui donne l'existence dans l'espace des distributions modulo constantes additives.

On pose $\mathcal{C}^\infty(g)$ l'espace des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur $(\hat{\mathbb{C}}, g)$. L'espace des opérateurs continus linéaires sur $\mathcal{C}^\infty(g)$ est noté $\mathcal{D}'(g)$

Définition 5 (Distribution modulo constantes additives). On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{D}'(g) : h_1 \stackrel{\mathcal{R}}{\sim} h_2$ si $h_1 - h_2 = \text{cste}$. L'espace des distributions modulo constantes additives est défini par la classe d'équivalence de $\mathcal{D}'(g)$ pour la relation \mathcal{R} . On note cette classe d'équivalence $\mathcal{D}'_0(g)$.

Un élément de $\mathcal{C}^\infty(g)$ peut être interprété comme une distribution dans $\mathcal{D}'_0(g)$, on note $H_0^1(g)$ l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty(g) \subset \mathcal{D}'_0(g)$ pour la norme hermitienne

$$\|f\|_{H_0^1(g)} = 2\pi \int_{\mathbb{C}} |\nabla_g f|^2 \lambda_g \quad (2.27)$$

Remarque. La norme $\|\cdot\|_{H_0^1(g)}$ ne dépend pas de $g = e^\varphi \hat{g}$ et elle est équivalente à la norme de Sobolev par l'inégalité de Poincaré. On remarque aussi que les espaces qu'on définit en haut ne dépendent pas de g , mais on garde g dans la notation pour s'en souvenir de la métrique.

Proposition 4 (GFF distribution). *Soient $(f_n)_n$ une base orthonormée de $H_0^1(g)$, $(\epsilon_n)_n$ des variables gaussiens standards i.i.d., alors la somme $\sum_n \epsilon_n f_n$ converge p.s. dans $\mathcal{D}'_0(g)$. La limite peut être prise comme définition du champ libre gaussien sur la sphère.*

Preuve. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(g)$, $G_g f$ appartient à $H_0^1(g)$, et

$$\sum_n \epsilon_n (f_n, f) = \sum_n \epsilon_n (f_n, G_g f)_{H_0^1(g)}$$

converge p.s. La limite est un gaussien de variance

$$\|G_g f\|_{H_0^1(g)}^2 = \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} f(x) G_g(x, y) f(y) \lambda_g(d^2 x) \lambda_g(d^2 y)$$

On peut facilement étendre l'argument à un $\rho \in \mathcal{M}$, et on retrouve la définition 4. \square

On donne quelques propriétés de la fonction de Green. On rappelle que les transformations de Möbius sur la sphère Riemannienne $\hat{\mathbb{C}}$ sont les fonctions $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$.

Proposition 5 (Invariance conforme). *Soient ψ une transformation de Möbius sur la sphère et une métrique $g_\psi(z) = |\psi'(z)|^2 g(\psi(z))$, alors*

$$G_{g_\psi}(x, y) = G_g(\psi(x), \psi(y)) \quad (2.28)$$

Preuve. Une transformation de Möbius préserve le rapport anharmonique : pour $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ distincts,

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{(\psi(z_1) - \psi(z_3))(\psi(z_2) - \psi(z_4))}{(\psi(z_2) - \psi(z_3))(\psi(z_1) - \psi(z_4))}$$

Par 2.21 (et $\lambda_g(\mathbb{C}) = 4\pi$),

$$\begin{aligned} G_{g_\psi}(x, y) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \ln \frac{|x - z||y - z'|}{|x - y||z - z'|} \lambda_{g_\psi}(d^2 z) \lambda_{g_\psi}(d^2 z') \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \ln \frac{|x - \psi^{-1}(z)||y - \psi^{-1}(z')|}{|x - y||\psi^{-1}(z) - \psi^{-1}(z')|} \lambda_g(d^2 z) \lambda_g(d^2 z') \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \iint_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}} \ln \frac{|\psi(x) - z||\psi(y) - z'|}{|\psi(x) - \psi(y)||z - z'|} \lambda_g(d^2 z) \lambda_g(d^2 z') \\ &= G_g(\psi(x), \psi(y)) \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 6 (Changement de métrique pour GFF). *Soient g, g' deux métriques conformément équivalentes à \hat{g} . On note $m_{g'}(X_g)$ la variable gaussien centrée défini par $m_{g'}(X_g) = X_g(\frac{1}{4\pi} \lambda_{g'})$. On a égalité en loi suivante*

$$X_g - m_{g'}(X_g) \stackrel{(d)}{=} X_{g'} \quad (2.29)$$

Preuve. Ceci se déduit facilement de l'expression de la fonction de covariance 2.26, comme $X_g - m_{g'}(X_g), X_{g'}$ sont deux processus gaussiens centrés avec la même covariance, ils ont la même loi. \square

Remarque. On a $m_g(X_g) = 0$ p.s.

Proposition 7 (Fonction de Green explicite).

$$G_{\hat{g}}(x, y) = \ln \frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{4} (\ln \hat{g}(x) + \ln \hat{g}(y)) + \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (2.30)$$

Soit une transformation de Möbius ψ . Avec la métrique $g_\psi = e^\varphi \hat{g}$, on a

$$G_{g_\psi}(x, y) \stackrel{5}{=} G_{\hat{g}}(\psi(x), \psi(y)) = G_{\hat{g}}(x, y) - \frac{1}{4} (\varphi(x) + \varphi(y)) \quad (2.31)$$

La preuve consiste à faire un calcul technique, voir [8] pour les détails.

On reprend 2.19 : $e^{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} X(z) \Delta_g X(z) \lambda_g} DX$ ne dépend pas de g , donc le choix de X est arbitraire, les choix sont à une constante additive près. On note \mathbb{P}_g la loi de X_g et on considère $\overline{\mathbb{P}}_g$ la mesure image de $\mathbb{P}_g \otimes dc$ par $(X_g, c) \mapsto X_g + c$. Cette nouvelle mesure ne dépend pas de g . On va prendre $Z_g \overline{\mathbb{P}}_g$ comme l'interprétation de la mesure $e^{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} X(z) \Delta_g X(z) \lambda_g} DX$, avec Z_g une constante de normalisation donnée par

$$Z_g = \det(-\Delta_g)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.32)$$

La formule de Ray-Singer-Polyakov ([23]) donne la relation suivante :

$$Z_{e^\varphi \hat{g}} = e^{\frac{1}{96\pi} \int_{\mathbb{C}} |\nabla_{\hat{g}} \varphi|^2 + 2R_{\hat{g}} \varphi d\lambda_{\hat{g}}} Z_{\hat{g}} \quad (2.33)$$

La fonction de corrélation s'écrit

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle_g = Z_g \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C}} \prod_l e^{\alpha_l (X_g(z_l) + c)} e^{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} (QR_g(X_g + c) + 4\pi \mu e^{\gamma(X_g + c)}) \lambda_g} dc \right] \quad (2.34)$$

Il y a encore des problèmes dans cette expression : comme X_g est vu comme un processus, $e^{\alpha_l X_g(z_l)}$ et $\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma X_g} \lambda_g$ n'ont pas de sens. Ce qui fait l'objet de la section suivante.

Grâce à la proposition 6, on peut considérer simplement la métrique \hat{g} , on verra dans la section 3.2 que la formule pour une métrique g conforme à \hat{g} sera déduite directement de celle de \hat{g} (anomalie de Weyl).

2.3 Chaos multiplicatif gaussien (GMC)

Le but de cette section est de donner un sens au terme $\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma X_{\hat{g}}} \lambda_{\hat{g}}$ dans 2.34. Les mesures de la forme $e^{\gamma h} d\sigma$, avec h une distribution et σ une mesure, ont été premièrement étudié dans [18]. [24] donne une revue complète avec des applications en finance et en physique. Une approche très générale du chaos multiplicatif gaussien a été récemment introduite dans [29].

On choisit une régularisation $\theta \in \mathcal{M}_{\hat{g}}$, et on note θ_ϵ la mesure image de θ sous $z \mapsto \epsilon z$, $\theta_{x,\epsilon}$ la mesure image de θ_ϵ sous $z \mapsto x - z$. Comme l'exponentiel d'une distribution n'existe pas, on considère $X_{\hat{g}} * \theta_\epsilon(x) := X_{\hat{g}}(\theta_{x,\epsilon})$ et on tend $\epsilon \rightarrow 0$ dans $e^{\gamma X_{\hat{g}} * \theta_\epsilon} \lambda_{\hat{g}}$. Le théorème suivant donne la convergence et unicité de la limite quelque soit la fonction de régularisation choisie, sous des hypothèses appropriés.

Théorème 1 (Définition de GMC). *Soit θ une mesure de Radon positive avec le support contenu dans $B(0, 1)$, telle que $\theta(\mathbb{C}) = 1$ et*

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \ln \frac{1}{|x-y|} \right| \theta(dy) \leq C < \infty \quad (2.35)$$

On note $X_{\hat{g},\epsilon}^{(\theta)} = X_{\hat{g}} * \theta_\epsilon$, et

$$M_{\gamma,\epsilon}^{(\theta)}(d^2 z) := e^{\frac{\gamma^2}{2} (\ln 2 - \frac{1}{2})} e^{\gamma X_{\hat{g},\epsilon}^{(\theta)}} e^{-\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{\hat{g},\epsilon}^{(\theta)})^2]} \lambda_{\hat{g}} \quad (2.36)$$

Alors pour $\gamma < 2$, $M_{\gamma,\epsilon}^{(\theta)}$ converge en probabilité (au sens de la topologie faible) vers une mesure aléatoire M_γ , lorsque ϵ tend vers 0. De plus, pour f une fonction continue bornée, $\mathbb{E}[\int_{\mathbb{C}} f dM_{\gamma,\epsilon}^{(\theta)} - \int_{\mathbb{C}} f dM_\gamma] \rightarrow 0$. La mesure limite M_γ ne dépend pas de θ choisie.

On appelle M_γ le chaos multiplicatif gaussien (GMC) de $X_{\hat{g}}$ pour la mesure $\lambda_{\hat{g}}$.

Remarque. La constante multiplicative $e^{\frac{\gamma^2}{2} (\ln 2 - \frac{1}{2})}$ dans l'expression de $M_{\gamma,\epsilon}$ sera expliquée après. D'ailleurs, on peut définir les mesures de chaos pour tout champ Y ayant une corrélation de type $\ln_+ \frac{1}{|x-y|} + h(x, y)$, où h est une fonction bornée.

Preuve. Pour simplicité on montre pour $\gamma < \sqrt{2}$ la convergence L^2 , le cas $\sqrt{2} \leq \gamma < 2$ est prouvé dans [7]. Soit θ une mesure vérifiant les conditions du théorème, par un calcul simple, on peut montrer que pour $0 < \epsilon' \leq \epsilon$ il existe $c, C > 0$ tels que

$$c - \frac{1}{4}(\ln \hat{g}(x) + \ln \hat{g}(y)) + \ln \frac{1}{|y-x| + \epsilon} \leq \mathbb{E}[X_{\hat{g}, \epsilon'}^{(\theta)}(x) X_{\hat{g}, \epsilon}^{(\theta)}(y)] \leq C - \frac{1}{4}(\ln \hat{g}(x) + \ln \hat{g}(y)) + \ln \frac{1}{|y-x| + \epsilon} \quad (2.37)$$

On remarque que les deux bornes ne dépendent pas de ϵ' . Alors pour tout compact A et tout $\epsilon' \leq \epsilon$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_{\gamma, \epsilon}^{(\theta)}(A) M_{\gamma, \epsilon'}^{(\theta)}(A))] &= e^{\gamma^2(\ln 2 - \frac{1}{2})} \int_A \int_A \mathbb{E}[e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon}^{(\theta)}(x) + X_{\hat{g}, \epsilon'}^{(\theta)}(y)) - \frac{\gamma^2}{2}(\mathbb{E}[(X_{\hat{g}, \epsilon}^{(\theta)}(x))^2] + \mathbb{E}[(X_{\hat{g}, \epsilon'}^{(\theta)}(y))^2])}] d^2x d^2y \\ &= e^{\gamma^2(\ln 2 - \frac{1}{2})} \int_A \int_A e^{\gamma^2 \mathbb{E}[X_{\hat{g}, \epsilon}^{(\theta)}(x) X_{\hat{g}, \epsilon'}^{(\theta)}(y)]} d^2x d^2y \\ &\xrightarrow{\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0} e^{\gamma^2(\ln 2 - \frac{1}{2})} \int_A \int_A e^{\gamma^2 G_{\hat{g}}(x, y)} d^2x d^2y \end{aligned}$$

où la dernière convergence vient de la convergence dominée grâce aux inégalités 2.37, on note que $\gamma < \sqrt{2}$ assure l'intégrabilité. Ainsi pour tout compact A et tout $\epsilon' \leq \epsilon$,

$$\mathbb{E}[(M_{\gamma, \epsilon}^{(\theta)}(A) - M_{\gamma, \epsilon'}^{(\theta)}(A))^2] \xrightarrow{\epsilon, \epsilon' \rightarrow 0} 0$$

Ce qui montre la convergence L^2 . On peut tout à fait prendre une autre mesure θ' et montrer de la même façon que

$$\mathbb{E}[(M_{\gamma, \epsilon}^{(\theta)}(A) - M_{\gamma, \epsilon}^{(\theta')}(A))^2] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

et on voit que la limite est indépendante de θ . □

On peut donc travailler avec une régularisation θ particulière : la mesure uniforme sur le cercle unité, qui vérifie les hypothèses du théorème. On note $\bar{\theta}$ la mesure uniforme sur le cercle unité.

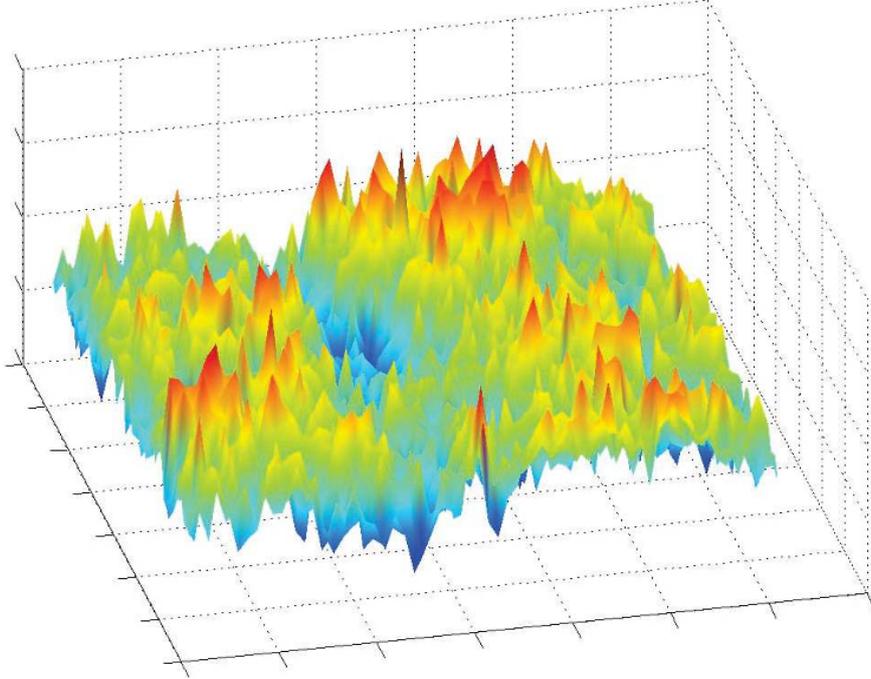


FIGURE 1 – GMC sur le plan

Définition 6. On définit la régularisation 'circle average' du GFF

$$X_{\hat{g},\epsilon} = X_{\hat{g}} * \tilde{\theta}_\epsilon \quad (2.38)$$

Pour ψ une transformation de Möbius sur la sphère, on définit la composition $X_{\hat{g}} \circ \psi$:

$$\forall h \in H^{-1}(\mathbb{C}, \hat{g}), X_{\hat{g}} \circ \psi(h) = X_{\hat{g}}(\psi^\# h) \quad (2.39)$$

où $\psi^\# h \in H^{-1}(\mathbb{C}, \hat{g})$ est tel que pour toute fonction de test $f \in \bar{\mathcal{C}}_0^\infty(\mathbb{C}, \hat{g})$,

$$(\psi^\# h, f) = (h, f \circ \psi)$$

En particulier, pour $\rho \in \mathcal{M}_{\hat{g}}$, $\psi^\# \rho$ correspond à la mesure image de ρ par ψ .

Proposition 8. On a les convergences suivantes uniformément sur \mathbb{C} :

1.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon}(x)^2] + \ln \epsilon + \frac{1}{2} \ln \hat{g}(x) = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (2.40)$$

2. Soit ψ une transformation de Möbius sur la sphère. On note $(X_{\hat{g}} \circ \psi)_\epsilon = (X_{\hat{g}} \circ \psi) * \tilde{\theta}_\epsilon$, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[(X_{\hat{g}} \circ \psi)_\epsilon(x)^2] + \ln \epsilon + \frac{1}{2} \ln \hat{g}(\psi(x)) + \ln |\psi'(x)| = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad (2.41)$$

Remarque. $X_{\hat{g},\epsilon}(x)$ et $(X_{\hat{g}} \circ \psi)_\epsilon(x)$ sont des gaussiens centrés.

Preuve. Par 2.26 et la formule de la fonction de Green 2.30,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon}(x)^2] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{\hat{g}}(x + \epsilon e^{i\theta}, x + \epsilon e^{i\theta'}) d\theta d\theta' \\ &= \ln \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|} d\theta d\theta' - \frac{1}{2} \ln \hat{g}(x) + o_\epsilon(1) + \ln 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

où le $o_\epsilon(1)$ est uniforme pour tout $x \in \mathbb{C}$, la première convergence découle de l'identité :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|e^{i\theta} - e^{i\theta'}|} d\theta d\theta' = 0$$

qui se voit facilement si on fait un changement de variable $\theta_0 = -\theta$, $\theta'_0 = -\theta'$. Pour la deuxième convergence,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{\hat{g}} \circ \psi)_\epsilon(x)^2] &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} G_{\hat{g}}(\psi(x + \epsilon e^{i\theta}), \psi(x + \epsilon e^{i\theta'})) d\theta d\theta' \\ &\stackrel{2.31}{=} \mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon}(x)^2] - \frac{1}{2} \ln \frac{|\psi'(x)|^2 |\hat{g} \circ \psi(x)}{\hat{g}(x)} + o_\epsilon(1) \\ &= \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln |\psi'(x)|^2 |\hat{g} \circ \psi(x) + \ln 2 - \frac{1}{2} + o_\epsilon(1) \end{aligned}$$

où le $o_\epsilon(1)$ est uniforme pour tout $x \in \mathbb{C}$. □

On prend dans 2.36 $\theta = \tilde{\theta}$, avec la proposition précédente, on obtient

$$M_{\gamma,\epsilon}^{(\tilde{\theta})}(d^2 z) = \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g},\epsilon} + \frac{\mathcal{Q}}{2} \ln \hat{g}) + o_\epsilon(1)} d^2 z$$

On pose

$$M_{\gamma,\epsilon}(d^2 z) := \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g},\epsilon} + \frac{\mathcal{Q}}{2} \ln \hat{g})} d^2 z \quad (2.42)$$

alors $M_{\gamma,\epsilon}$ converge vers M_γ au sens décrit dans le théorème 1. La proposition suivante donne le comportement du GMC sous une transformation de Möbius :

Proposition 9. Soit $f \in \bar{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$ et ψ une transformation de Möbius sur la sphère. Alors

$$(X_{\hat{g}}, \int_{\mathbb{C}} f dM_{\gamma}) \stackrel{(d)}{=} (X_{\hat{g}} \circ \psi^{-1} - m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}}), e^{-\gamma m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})} \int_{\mathbb{C}} f \circ \psi e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} dM_{\gamma}) \quad (2.43)$$

avec $\hat{g}_{\psi} = |\psi'|^2 \hat{g} \circ \psi$, et $e^{\varphi} = \hat{g}_{\psi} / \hat{g}$.

Preuve. Par les propositions 5 et 6,

$$X_{\hat{g}} \circ \psi \stackrel{(d)}{=} X_{\hat{g}_{\psi}} \stackrel{(d)}{=} X_{\hat{g}} - m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})$$

Donc $X_{\hat{g}} \stackrel{(d)}{=} X_{\hat{g}} \circ \psi^{-1} - m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})$. Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}} f \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z &= \int_{\mathbb{C}} f \circ \psi \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g} \circ \psi)} |\psi'|^2 d^2 z \\ &= \int_{\mathbb{C}} f \circ \psi e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} \left(\frac{\epsilon}{|\psi'|} \right)^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z \end{aligned}$$

On écrit $\psi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$. Alors $\psi'(z) = (cz + d)^{-2}$ et

$$\varphi(z) = 2(\ln(1 + |z|^2) - \ln(|az + b|^2) + |cz + d|^2)$$

A l'aide de la proposition 8, on déduit que sur $A_{\eta} := B(0, \frac{1}{\eta}) \setminus B(-\frac{d}{c}, \eta)$,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[X_{\hat{g}, \epsilon}(\psi(z))^2] - \mathbb{E}[(X_{\hat{g}} \circ \psi)_{\frac{\epsilon}{|\psi'(z)|}}(z)^2] = 0$$

On peut ensuite utiliser un résultat de [29] pour justifier que les deux mesures

$$\left(\frac{\epsilon}{|\psi'|} \right)^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z \quad \text{et} \quad \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g} \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z$$

convergent en probabilité vers la même mesure aléatoire sur A_{η} . Comme $X_{\hat{g}} \circ \psi \stackrel{(d)}{=} X_{\hat{g}} - m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})$, on a

$$\epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g} \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z \xrightarrow{\mathbb{P}} e^{-\gamma m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})} dM_{\gamma}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_{A_{\eta}^c} \left(\frac{\epsilon}{|\psi'|} \right)^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z\right] &= \int_{A_{\eta}^c} \left(\frac{\epsilon}{|\psi'|} \right)^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{\hat{g}, \epsilon \circ \psi})^2] + \gamma \frac{Q}{2} \ln \hat{g}} d^2 z \\ &\stackrel{\text{proposition 8}}{\leq} C \int_{A_{\eta}^c} (\hat{g} / \hat{g}_{\psi})^{\frac{\gamma^2}{4}} \lambda_{\hat{g}} = C \int_{A_{\eta}^c} e^{-\frac{\gamma^2}{2} \varphi} \lambda_{\hat{g}} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{C}} f \circ \psi e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} \left(\frac{\epsilon}{|\psi'|} \right)^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon \circ \psi} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z \xrightarrow[\epsilon, \eta \rightarrow 0]{\mathbb{P}} e^{-\gamma m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})} \int_{\mathbb{C}} f \circ \psi e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} dM_{\gamma}$$

Et on a égalité p.s.

$$\int_{\mathbb{C}} f dM_{\gamma} \stackrel{p.s.}{=} e^{-\gamma m_{\hat{g}_{\psi}}(X_{\hat{g}})} \int_{\mathbb{C}} f \circ \psi e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} dM_{\gamma}$$

par unicité de la limite en probabilité. Enfin l'égalité de la loi jointe en découle facilement. \square

2.4 Propriétés des vecteurs gaussiens et du GMC

Commençons par deux résultats sur les vecteurs/ processus gaussiens :

Proposition 10 (Ipp Gaussienne discrète). *Soient $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ un vecteur gaussien centré, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec croissance polynomiale à l'infini. Alors*

$$\mathbb{E}[Xf(Y)] = \mathbb{E}[XY]\mathbb{E}[\nabla f(Y)] \quad (2.44)$$

Preuve. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, on calcule

$$\mathbb{E}[e^{\lambda X + \mu \cdot Y}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}\mathbb{E}[X^2] + \lambda\mu \cdot \mathbb{E}[XY] + \frac{1}{2}\mu' \text{Var}(Y)\mu}$$

On dérive l'équation par rapport à λ et on évalue en $\lambda = 0$:

$$\mathbb{E}[Xe^{\mu \cdot Y}] = \mu \cdot \mathbb{E}[XY]e^{\frac{1}{2}\mu' \text{Var}(Y)\mu}$$

On a donc montré la formule pour $f(y) = e^{\mu \cdot y}$. Par un argument de densité, on aura la proposition. \square

Théorème 2 (Inégalités convexes). *Soient $(Y(x))_{x \in D}$ et $(Z(x))_{x \in D}$ deux processus gaussiens centrés indépendants tels que pour tout $x, y \in D$,*

$$\mathbb{E}[Y(x)Y(y)] \leq \mathbb{E}[Z(x)Z(y)]$$

Alors pour toute fonction convexe (resp. concave) F avec croissance polynomiale à l'infini, et $\sigma \geq 0$ une mesure de Radon, on a

$$F\left(\int_D e^{Y(x) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y(x)^2]} \sigma(dx)\right) \leq (\text{ resp. } \geq) F\left(\int_D e^{Z(x) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z(x)^2]} \sigma(dx)\right) \quad (2.45)$$

Preuve. On montre l'inégalité pour les vecteurs gaussiens $(Y_i)_{i=1}^n$ et $(Z_i)_{i=1}^n$ indépendants vérifiant $\mathbb{E}[Y_i Y_j] \leq \mathbb{E}[Z_i Z_j]$, avec $(\sigma_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}_+^n$. Pour F convexe deux fois dérivable :

$$\mathbb{E}\left[F\left(\sum_i \sigma_i e^{Y_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_i^2]}\right)\right] \leq \mathbb{E}\left[F\left(\sum_i \sigma_i e^{Z_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2]}\right)\right]$$

et le théorème découle de ce résultat. On pose la fonction f continue définie sur $[0, 1]$:

$$f(t) = \mathbb{E}\left[F\left(\sum_i \sigma_i e^{A_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[A_i(t)^2]}\right)\right]$$

où $A_i(t) = \sqrt{t}Y_i + \sqrt{1-t}Z_i$. La fonction est dérivable sur $]0, 1[$, avec la dérivée

$$f'(t) = \mathbb{E}\left[\sum_i \sigma_i \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}Y_i - \frac{1}{2\sqrt{1-t}}Z_i - \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_i^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_i^2]\right) e^{A_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[A_i(t)^2]} F'\left(\sum_i \sigma_i e^{A_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[A_i(t)^2]}\right)\right]$$

On peut déduire de la proposition précédente

$$f'(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j (\mathbb{E}[Y_i Y_j] - \mathbb{E}[Z_i Z_j]) \mathbb{E}\left[e^{A_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[A_i(t)^2] + A_j(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[A_j(t)^2]} F''\left(\sum_i \sigma_i e^{A_i(t) - \frac{1}{2}\mathbb{E}[A_i(t)^2]}\right)\right]$$

Par conséquent, $f'(t) \leq 0$ et $f(0) \leq f(1)$, et on obtient l'inégalité voulue. \square

On considère X un champs gaussien avec la corrélation $\mathbb{E}[X(x)X(y)] = \ln_+ \frac{1}{|x-y|}$, ce champs peut être défini comme dans la définition 4 sur une famille plus large de mesures ρ . On note X_ϵ le circle average de X . Par un calcul simple de corrélation, on a pour tout $\lambda < 1$,

$$(X_{\lambda\epsilon}(\lambda x))_{|x|\leq 1} \stackrel{(loi)}{=} (X_\epsilon(x))_{|x|\leq 1} + \Omega_\lambda \quad (2.46)$$

avec Ω_λ une variable gaussienne centrée indépendante de X et $\mathbb{E}[(\Omega_\lambda)^2] = \ln \frac{1}{\lambda}$. On pose

$$\bar{M}_{\gamma,\epsilon}(d^2x) = e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[X_\epsilon(x)^2]} d^2x \quad (2.47)$$

et sa limite en probabilité (au sens de topologie faible) existe lorsque $\gamma < 2$, indépendante de régularisations. On la note \bar{M}_γ , qui est la définition d'un GMC classique ([24]). On déduit facilement de 2.46 la proposition :

Proposition 11 (Invariance d'échelle). *On a l'égalité de lois suivante :*

$$\forall \lambda \leq 1, (\bar{M}(\lambda A))_{A \subseteq B(0,1)} \stackrel{(loi)}{=} \lambda^2 e^{\gamma \Omega_\lambda - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[\Omega_\lambda^2]} (\bar{M}(A))_{A \subseteq B(0,1)} \quad (2.48)$$

avec Ω_λ une variable gaussienne centrée indépendante de \bar{M} et $\mathbb{E}[(\Omega_\lambda)^2] = \ln \frac{1}{\lambda}$.

Cette propriété est appelée l'invariance d'échelle de M_ϵ . On a le théorème suivant qui décrit les moments du GMC, la preuve peut être trouvée dans [26] et [3].

Théorème 3. *Pour $p \in]0, \frac{4}{\gamma^2}[$ et A borné de $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, ou pour $p \in]-\infty, 0[$ et A une boule bornée,*

$$\mathbb{E}[\bar{M}_\gamma(A)^p] < \infty \quad (2.49)$$

et on a la convergence

$$\mathbb{E}[\bar{M}_{\gamma,\epsilon}(A)^p] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\bar{M}_\gamma(A)^p] \quad (2.50)$$

On peut utiliser les inégalités convexes pour montrer que le théorème est valide pour M_γ .

Finalement on donne une estimation de GMC, on s'en servira pour estimer les fonctions de corrélation.

Proposition 12. *Soient $\gamma < 2$, $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha < Q$, alors pour $0 < p < \frac{4}{\gamma^2} \wedge \frac{2}{\gamma}(Q - \alpha)$ et $r_0 > 0$, il existe $C_{x_0} > 0$ tels que pour tout $r \leq r_0$,*

$$\sup_{0 < \epsilon \leq r} \mathbb{E}[\left(\int_{B(x_0,r)} \frac{1}{(|x-x_0|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} M_{\gamma,\epsilon}(d^2x)\right)^p] \leq C_{x_0} r^{\zeta(p)-\gamma\alpha p} \quad (2.51)$$

où $\zeta(p) = (2 + \frac{\gamma^2}{2})p - \frac{\gamma^2 p^2}{2}$ est appelée la fonction de structure de M_γ .

Remarque. Si on prend $\alpha = 0$, on retrouve le résultat classique sur les moments de GMC.

Preuve. Sans perte de généralité on suppose $r_0 = 1$. Commençons par le cas $r = r_0 = 1$. On rappelle que

$$M_{\gamma,\epsilon}(d^2x) = \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(X_{\hat{g},\epsilon} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2z = e^{\frac{\gamma^2}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2})} e^{\gamma X_{\hat{g},\epsilon}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{\hat{g},\epsilon}(x))^2] + c_\epsilon(x)} \lambda_{\hat{g}}(d^2x)$$

où

$$c_\epsilon(x) = \frac{\gamma^2}{4} (\ln \hat{g}(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \hat{g}(x + \epsilon e^{i\theta}) d\theta)$$

converge uniformément vers 0 pour tout $x \in \mathbb{C}$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. D'ailleurs, pour $x, y \in B(x_0, 1)$ il existe $C, c > 0$ qui dépendent de x_0 uniquement tels que

$$\ln_+ \frac{1}{|x-y|} + c^2 \leq \mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon}(x)X_{\hat{g},\epsilon}(y)] \leq \ln_+ \frac{1}{|x-y|} + C^2$$

i.e.

$$\mathbb{E}[(X_\epsilon(x) + cZ)(X_\epsilon(y) + cZ)] \leq \mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon}(x)X_{\hat{g},\epsilon}(y)] \leq \mathbb{E}[(X_\epsilon(x) + CZ)(X_\epsilon(y) + CZ)]$$

avec Z une variable gaussienne centrée réduite indépendante des autres. On applique l'inégalité convexe 2 à $\sigma(d^2x) = \frac{\exp(\frac{\gamma^2}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}) + c_\epsilon(x))}{(|x-x_0|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} \hat{g}(x)d^2x$ et $F(x) = x^p$. Lorsque $p \geq 1$, F est convexe, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(\int_{B(x_0,1)} \frac{1}{(|x-x_0|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} M_{\gamma,\epsilon}(d^2x))^p] &\leq \mathbb{E}[(\int_{B(x_0,1)} e^{\gamma CZ - \frac{\gamma^2 C^2}{2}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} \sigma(d^2x))^p] \\ &= e^{\frac{\gamma^2 C^2 (p^2 - p)}{2}} \mathbb{E}[(\int_{B(x_0,1)} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} \sigma(d^2x))^p] \end{aligned}$$

Lorsque $0 < p < 1$, F est concave, et

$$\mathbb{E}[(\int_{B(x_0,1)} \frac{1}{(|x-x_0|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} M_{\gamma,\epsilon}(d^2x))^p] \leq e^{\frac{\gamma^2 C^2 (p^2 - p)}{2}} \mathbb{E}[(\int_{B(x_0,1)} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} \sigma(d^2x))^p]$$

On note que dans σ , $\exp(\frac{\gamma^2}{2}(\ln 2 - \frac{1}{2}) + c_\epsilon(x))\hat{g}(x)$ peut être borné par une constante indépendante de ϵ , pour tout $x \in B(x_0, 1)$. Donc il suffit de montrer l'inégalité suivante

$$\sup_{0 < \epsilon \leq 1} \mathbb{E}[(\int_{B(x_0,1)} \frac{1}{(|x-x_0|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x)^p] < \infty$$

Sans perte de la généralité, on montre pour $x_0 = 0$.

◇ Si $p \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x)^p]^{1/p} \\ &= \mathbb{E}[(\int_{B(0,\frac{1}{2})} \frac{1}{(|x|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x)^p]^{1/p} + \mathbb{E}[(\int_{B(\frac{1}{2},1)} \frac{1}{(|x|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x)^p]^{1/p} \\ &\leq 2^{-2} \mathbb{E}[(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x/2|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x/2) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x/2))^2]} d^2x)^p]^{1/p} + C' \end{aligned}$$

Pour l'inégalité on a utilisé le résultat classique 3 sur les moments de chaos comme $p < \frac{4}{\gamma^2}$. On utilise ensuite 2.46 :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x|+\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x)^p]^{1/p} \\ &\leq 2^{\gamma\alpha-2} \mathbb{E}[(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x|+2\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma\Omega_{1/2} - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(\Omega_{1/2})^2]} e^{\gamma X_{2\epsilon}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{2\epsilon}(x))^2]} d^2x)^p]^{1/p} + C' \\ &= 2^{\gamma\alpha-\zeta(p)/p} \mathbb{E}[(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x|+2\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma\Omega_{1/2} - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(\Omega_{1/2})^2]} e^{\gamma X_{2\epsilon}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{2\epsilon}(x))^2]} d^2x)^p]^{1/p} + C' \end{aligned}$$

$p < \frac{2}{\gamma}(Q - \alpha)$ implique que $\gamma\alpha - \zeta(p)/p < 0$. En itérant, on peut montrer que pour $\epsilon_n = \frac{1}{2^n}$,

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}[(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x|+\epsilon_n)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_{\epsilon_n}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{\epsilon_n}(x))^2]} d^2x)^p] < \infty$$

Pour un ϵ quelconque, il existe $n \geq 0$ tel que $\epsilon_{n+1} < \epsilon \leq \epsilon_n$. On peut utiliser l'inégalité convexe 2 pour majorer l'espérance pour ϵ par une constante universelle fois le la même quantité pour ϵ_{n+1} . Il est pareil que ce qu'on a fait au début de la preuve pour passer de $X_{\hat{g},\epsilon}$ à X_ϵ . On montre ainsi pour $p \geq 1$:

$$\sup_{0 < \epsilon \leq 1} \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x| + \epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x\right)^p\right] < \infty \quad (2.52)$$

◊ Si $0 < p < 1$, on utilise la sous-additivité de $x \mapsto x^p$ en suivant la preuve pour $p \geq 1$, et on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x| + \epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x\right)^p\right] \\ &= 2^{\gamma\alpha - \zeta(p)/p} \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x| + 2\epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma \Omega_{1/2} - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(\Omega_{1/2})^2]} e^{\gamma X_{2\epsilon}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{2\epsilon}(x))^2]} d^2x\right)^p\right] + C'' \end{aligned}$$

et on montre 2.52 pour $0 < p < 1$.

Maintenant on passe à la preuve pour $r < 1$. On a $\epsilon \leq r$, par l'invariance d'échelle 2.46 :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(0,r)} \frac{1}{(|x| + \epsilon)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_\epsilon(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_\epsilon(x))^2]} d^2x\right)^p\right] \\ &= r^{2p - \gamma\alpha p} \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x| + \epsilon/r)^{\gamma\alpha}} e^{\gamma \Omega_{1/r} - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(\Omega_{1/r})^2]} e^{\gamma X_{\epsilon/r}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{\epsilon/r}(x))^2]} d^2x\right)^p\right] \\ &\leq r^{\zeta(p) - \gamma\alpha p} \sup_{0 < \epsilon' \leq 1} \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{(|x| + \epsilon')^{\gamma\alpha}} e^{\gamma X_{\epsilon'}(x) - \frac{\gamma^2}{2} \mathbb{E}[(X_{\epsilon'}(x))^2]} d^2x\right)^p\right] \end{aligned}$$

On conclut par le cas $r = 1$. □

On note que la proposition est valide pour toute mesure de chaos pour un champ gaussien centré Y avec corrélation de type $\ln \frac{1}{|x-y|} + h(x, y)$ et h est une fonction bornée.

3 Fonctions de corrélation de Liouville

On rappelle l'expression de la fonction de corrélation 2.34 sous \hat{g} :

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle_{\hat{g}} = Z_{\hat{g}} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{C}} \prod_l e^{\alpha_l(X_{\hat{g}}(z_l) + c)} e^{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} (QR_{\hat{g}}(X_{\hat{g}} + c) + 4\pi\mu e^{\gamma(X_{\hat{g}} + c)}) \lambda_{\hat{g}} dc}\right]$$

On peut interpréter $\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma X_{\hat{g}}} \lambda_{\hat{g}}$ comme $M_\gamma(\mathbb{C})$. D'après 2.42,

$$M_{\gamma,\epsilon}(\mathbb{C}) = \int_{\mathbb{C}} \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma X_{\hat{g},\epsilon} + \frac{\mathcal{Q}}{2} \ln \hat{g}} d^2z \xrightarrow{\mathbb{P}} M_\gamma(\mathbb{C})$$

Vu cette forme, on a envie de poser une approximation pour l'opérateur de sommet $V_\alpha(z) = e^{\alpha X(z)}$:

$$V_{\alpha,\epsilon}(z) := \epsilon^{\frac{\alpha^2}{2}} e^{\alpha(X_{\hat{g},\epsilon}(z) + c) + \frac{\mathcal{Q}}{2} \ln \hat{g}(z)} \quad (3.1)$$

Remarque. La raison particulière pour l'ajout de $\frac{\mathcal{Q}}{2} \ln \hat{g}(z)$ est de garder une sorte de propriété d'invariance conforme sous la transformation $(z_l)_l \mapsto (\psi(z_l))_l$.

3.1 Construction

On commence par citer le théorème de Girsanov.

Théorème 4 (Girsanov). *Soit $(Y(x))_{x \in D}$ un processus gaussien centré indexé par D de classe \mathcal{C}^∞ , avec la fonction de covariance K . Soit Z une variable gaussienne dans la L^2 -adhérence de $(Y(x))_{x \in D}$. Alors pour F une fonction bornée définie sur l'espace des fonctions continues sur \mathbb{C} , on a*

$$\mathbb{E}[F((Y(x))_{x \in \mathbb{C}})e^{Z - \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{2}}] = \mathbb{E}[F((Y(x) + \mathbb{E}[Y(x)Z])_{x \in \mathbb{C}})] \quad (3.2)$$

On définit les fonctions de corrélation de Liouville sous la métrique \hat{g} par la limite suivante

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_{\hat{g}} \mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{C}} \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) e^{-\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{C}} QR_{\hat{g}}(X_{\hat{g}} + c) \lambda_{\hat{g}} - \int_{\mathbb{C}} \mu e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon} + c + \frac{Q}{2} \ln \hat{g})} d^2 z} dc \right] \quad (3.3)$$

La proposition suivante donne l'existence de la limite :

Proposition 13 ([8]). *La limite 3.3 existe et elle est non nulle sous les bornes de Seiberg :*

$$\forall l, \alpha_l < Q \text{ et } \sum_l \alpha_l > 2Q \quad (3.4)$$

Supposons que les bornes de Seiberg sont satisfaites, alors les fonctions de corrélation $\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle_{\hat{g}}$ s'exprime :

$$Z_{\hat{g}} e^{C(z)} \left(\prod_l \hat{g}(z_l)^{\Delta_{\alpha_l}} \right) \gamma^{-1} \Gamma \left(\frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}, \mu \right) \mathbb{E} \left[\frac{1}{Z_0(\mathbb{C}) \frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}} \right] \quad (3.5)$$

où $\Delta_{\alpha_l} = \frac{\alpha_l}{2}(Q - \frac{\alpha_l}{2})$ le poids conforme, $\Gamma(a, b) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-bt} dt$ la fonction Gamma, et

$$C(z) := \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j G_{\hat{g}}(z_i, z_j) + \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{2} \sum_i \alpha_i^2 \quad (3.6)$$

$$Z_0(d^2 z) := e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g}}(z_i, z)} M_{\gamma}(d^2 z) \quad (3.7)$$

Remarque. Les bornes de Seiberg impliquent en particulier que le nombre d'opérateurs vertex N doit dépasser 3 pour que les fonctions de corrélation soient non triviales. D'ailleurs, on peut facilement séparer la dépendance en μ en notant que

$$\Gamma \left(\frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}, \mu \right) = \mu^{\frac{2Q - \sum_l \alpha_l}{\gamma}} \Gamma \left(\frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma} \right) \quad (3.8)$$

Preuve. On note $\langle \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_{\hat{g}}$ la partie dans la limite 3.3. Par les calculs dans la section de métrique Riemannienne (2.12 et 2.13),

$$\int_{\mathbb{C}} QR_{\hat{g}}(X_{\hat{g}} + c) \lambda_{\hat{g}} = 2Q m_{\hat{g}}(X_{\hat{g}}) + 2Qc = 2Qc$$

Donc $\langle \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_{\hat{g}} / Z_{\hat{g}}$ s'écrit

$$\int_{\mathbb{C}} \mathbb{E} \left[e^{\sum_i (\alpha_i - 2Q)c} \prod_i \epsilon^{\frac{\alpha_i^2}{2}} e^{\alpha_i (X_{\hat{g}, \epsilon}(z_i) + \frac{Q}{2} \ln \hat{g}(z_i))} e^{-\epsilon \frac{\gamma^2}{2} \mu e^{\gamma c} \int_{\mathbb{C}} e^{\gamma(X_{\hat{g}, \epsilon}(z) + \frac{Q}{2} \ln \hat{g}(z))} d^2 z} \right] dc$$

On applique le théorème de Girsanov à $Y(z) = X_{\hat{g},\epsilon}(z)$ et $Z = \sum_i \alpha_i X_{\hat{g},\epsilon}(z_i)$, à l'aide de la proposition 8 :

$$\mathbb{E}[Z^2] = \left(\sum_i \alpha_i^2 \right) \ln \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i^2 \ln \hat{g}(z_i) + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z_j) + \left(\sum_i \alpha_i^2 \right) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + o(1)$$

et on calcule aussi

$$\mathbb{E}[Y(z)Z] = \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z)$$

avec $G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z) = \mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon}(z_i)X_{\hat{g},\epsilon}(z)]$. Après le changement de probabilité, $\langle \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_{\hat{g}/Z_{\hat{g}}}$ devient

$$e^{C_\epsilon(z)} \left(\prod_l \hat{g}(z_l)^{\Delta_{\alpha_l}} \right) \int_{\mathbb{C}} \mathbb{E}[e^{\sum_i (\alpha_i - 2Q)c} e^{-\mu e^{\gamma c}} \int_{\mathbb{C}} e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z)} dM_{\gamma, \epsilon}(z)] dc$$

avec

$$C_\epsilon(z) := \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z_j) + \frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{2} \sum_i \alpha_i^2$$

qui converge vers $C(z)$. On note $Z_\epsilon(d^2 z) = e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z)} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 z)$, et on fait le changement de variable $t = e^{\gamma c} Z_\epsilon(\mathbb{C})$:

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_{\hat{g}/Z_{\hat{g}}} = e^{C_\epsilon(z)} \left(\prod_l \hat{g}(z_l)^{\Delta_{\alpha_l}} \right) \gamma^{-1} \Gamma(s, \mu) \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_\epsilon(\mathbb{C})^s}\right]$$

avec $s = \frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}$. Enfin $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_\epsilon(\mathbb{C})^s}\right]$ converge vers $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_0(\mathbb{C})^s}\right]$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, par le lemme suivant. \square

Lemme 1. Soit $s > 0$. Si $\alpha_l < Q$ pour tout l , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[Z_\epsilon(\mathbb{C})^{-s}] = \mathbb{E}[Z_0(\mathbb{C})^{-s}] \quad (3.9)$$

et la limite est non triviale : $0 < \mathbb{E}[Z_0(\mathbb{C})^{-s}] < \infty$.

Si $\alpha_l \geq Q$ pour certains l ,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[Z_\epsilon(\mathbb{C})^{-s}] = 0 \quad (3.10)$$

Pour rappel :

$$Z_\epsilon(d^2 z) := e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z)} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 z), \quad Z_0(d^2 z) := e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g}}(z_i, z)} M_\gamma(d^2 z)$$

Preuve. \diamond Si pour tout l , $\alpha_l < Q$:

Commençons par vérifier l'existence de $\mathbb{E}[Z_\epsilon(\mathbb{C})^{-s}]$. Soit \mathcal{B} une boule qui contient aucun des z_i , alors par le théorème 3 sur les moments du GMC,

$$\mathbb{E}[Z_\epsilon(\mathbb{C})^{-s}] \leq \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathcal{B}} e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z)} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 z)\right)^{-s}\right] \leq \inf_{z \in \mathcal{B}} \left(e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(z_i, z)}\right) \mathbb{E}[(M_{\gamma, \epsilon}(\mathcal{B}))^{-s}] < \infty$$

Par le même argument, on peut montrer que $\mathbb{E}[Z_0(\mathbb{C})^{-s}] < \infty$. On passe à la preuve de $\mathbb{E}[Z_0(\mathbb{C})^{-s}] > 0$. On écrit

$$Z_0(\mathbb{C}) = Z_0^c + \sum_i Z_i$$

où $Z_i = Z_0(B(z_i, \delta))$ et $Z_0^c = Z_0((\cup_i B(z_i, \delta))^c)$ et δ suffisamment petit. Alors pour un $0 < p < 1$ et par la sous-additivité de $x \mapsto x^p$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_0^{-s}] &\geq r^{-s} \mathbb{P}(Z_0 \leq r) = r^{-s} (1 - \mathbb{P}(Z_0 > r)) \geq r^{-s} (1 - r^{-p} \mathbb{E}[Z_0^p]) \\ &\geq r^{-s} (1 - r^{-p} (\mathbb{E}[(Z_0^c)^p] + \sum_i \mathbb{E}[Z_i^p])) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Il est facile de voir à l'aide du théorème 3 que $\mathbb{E}[(Z_0^c)^p] < \infty$, et pour $\mathbb{E}[Z_i^p]$, il suffit d'étudier grâce à l'inégalité convexe 2 (en passant par des ϵ)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_{B(z_i, \delta)} \frac{1}{|z - z_i|^{\gamma\alpha_i}} \bar{M}_\gamma(d^2 z)\right)^p\right] &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_{\frac{\delta}{2^n} \leq |z - z_i| \leq \frac{\delta}{2^{n-1}}} \frac{1}{|z - z_i|^{\gamma\alpha_i}} \bar{M}_\gamma(d^2 z)\right)^p\right] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{\delta}\right)^{p\gamma\alpha_i} \mathbb{E}\left[\left(\bar{M}_\gamma\left(B\left(z_i, \frac{\delta}{2^{n-1}}\right)\right)\right)^p\right] \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} 2^{np\gamma\alpha_i - (n-1)\zeta(p)} \end{aligned}$$

La dernière inégalité est un résultat classique sur les moments du GMC, qui se déduit simplement de l'invariance d'échelle 11. Pour rappel, $\zeta(p) = (2 + \frac{\gamma^2}{2})p - \frac{\gamma^2 p^2}{2}$. On peut choisir $p > 0$ petit pour avoir $p\gamma\alpha_i - \zeta(p) < 0$. Ainsi on a $\mathbb{E}[Z_i^p] < \infty$. On revient à l'inégalité 3.11, si r est grand, on obtient $\mathbb{E}[Z_0^{-s}] > 0$.

Pour la suite, on introduit

$$Z_\epsilon(\mathbb{C}) = Z_\epsilon(\cup_i B(z_i, r)) + Z_\epsilon((\cup_i B(z_i, r))^c) =: Z_{r, \epsilon} + Z_{r, \epsilon}^c$$

On a la convergence en probabilité

$$Z_{r, \epsilon}^c \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} Z_0((\cup_i B(z_i, r))^c) =: Z_{r, 0}^c$$

Par l'inégalité de Markov et la proposition 12, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\sup_{0 < \epsilon \leq r} \mathbb{P}(Z_{r, \epsilon} > r^\alpha) \leq C r^\beta \quad (3.12)$$

Dans la suite on écrit toutes les constantes C et elles sont différentes en général. On note $\chi_r = \mathbf{1}_{Z_{r, \epsilon} > r^\alpha}$. Par l'inégalité de Cauchy,

$$|\mathbb{E}[\chi_r((Z_{r, \epsilon} + Z_{r, \epsilon}^c)^{-s} - (Z_{r, \epsilon}^c)^{-s})]| \leq \mathbb{E}[2\chi_r(Z_{r, \epsilon}^c)^{-2s}]^{1/2} \leq C r^\beta \sup_{\epsilon \leq 1} \mathbb{E}[(Z_{1, \epsilon}^c)^{-2s}]^{1/2}$$

D'autre part, par l'inégalité $|(x + y)^{-s} - x^{-s}| \leq C x y^{-s-1}$,

$$|\mathbb{E}[(1 - \chi_r)((Z_{r, \epsilon} + Z_{r, \epsilon}^c)^{-s} - (Z_{r, \epsilon}^c)^{-s})]| \leq C r^\alpha \mathbb{E}[(Z_{r, \epsilon}^c)^{-s-1}] \leq C r^\alpha \sup_{\epsilon \leq 1} \mathbb{E}[(Z_{1, \epsilon}^c)^{-s-1}]$$

Par conséquent, pour $0 < \epsilon \leq r$,

$$|\mathbb{E}[(Z_\epsilon)^{-s}] - \mathbb{E}[(Z_{r, \epsilon}^c)^{-s}]| \leq C(r^\alpha + r^\beta) \quad (3.13)$$

On a $\mathbb{E}[(Z_{r, \epsilon}^c)^{-s}] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[(Z_r^c)^{-s}]$, et $(\mathbb{E}[(Z_\epsilon)^{-s}])_{0 < \epsilon \leq r}$ est bornée. Soit A une valeur d'adhérence de la famille $(\mathbb{E}[(Z_\epsilon)^{-s}])_{0 < \epsilon \leq r}$, alors

$$|A - \mathbb{E}[(Z_r^c)^{-s}]| \leq C(r^\alpha + r^\beta)$$

On tend r vers 0 et on obtient $A = \mathbb{E}[(Z_0)^{-s}]$. Ceci montre la convergence $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[(Z_\epsilon)^{-s}] = \mathbb{E}[(Z_0)^{-s}]$.

◇ S'il existe i tel que $\alpha_i \geq Q$: Sans perte de généralité, on travaille avec $z_i = 0$ et $\delta = 1$. On utilise encore l'inégalité convexe 2 pour se ramener à montrer $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[(\bar{Z}_{1, \epsilon})^{-s}] = 0$ où

$$\bar{Z}_\epsilon(d^2 z) := e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g}, \epsilon}(z_i, z)} \bar{M}_{\gamma, \epsilon}(d^2 z)$$

et $\bar{Z}_{1,\epsilon} = \bar{Z}_\epsilon(B(0,1))$. La définition de $\bar{M}_{\gamma,\epsilon}$ se trouve dans la partie 2.4. En notant que $\alpha_i = \alpha \geq Q$, on a la minoration suivante pour $\epsilon \leq 2^{-n}$:

$$\bar{Z}_{1,\epsilon} \geq c \sum_{k=1}^n 2^{\gamma\alpha k} \bar{M}_{\gamma,\epsilon}(A_k) \geq c \max_{1 \leq k \leq n} 2^{(2+\frac{\gamma^2}{2})k} \bar{M}_{\gamma,\epsilon}(A_k)$$

avec A_k l'anneau de rayon 2^{-k} et 2^{-k+1} . Par la proposition d'invariance d'échelle 11, on a

$$\bar{Z}_{1,\epsilon} \geq c' \bar{M}_{\gamma,\epsilon}(A_1) \max_{1 \leq k \leq n} e^{\gamma\Omega_{2^{-k}}} \quad (3.14)$$

c' ne dépend pas de n . On rappelle que $(\Omega_{e^{-t}})_t$ est un mouvement brownien indépendant de \bar{M} . Ainsi,

$$\mathbb{E}[(\bar{Z}_{1,\epsilon})^{-s}] \leq c'^{-s} \mathbb{E}[\bar{M}_{\gamma,\epsilon}(A_1)^{-s}] \mathbb{E}[(\max_{1 \leq k \leq n} e^{\gamma\Omega_{2^{-k}}})^{-s}]$$

Or par le principe de réflexion, on a

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} \Omega_{2^{-k}} > a) = \mathbb{P}(|\Omega_{2^{-n}}| > a)$$

On en déduit que $\max_{k \geq 1} \Omega_{2^{-k}} = \infty$ presque sûrement. On prend $n = \lfloor -\frac{\ln \epsilon}{\ln 2} \rfloor$ et on tend ϵ vers 0, ainsi on montre que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[(\bar{Z}_{1,\epsilon})^{-s}] = 0$. \square

3.2 Invariance conforme des fonctions de corrélation

On suppose que les bornes de Seiberg sont satisfaites. On veut étudier les fonctions de corrélation de Liouville sous l'effet des transformations conformes.

Théorème 5 (Formule de KPZ). *Soit ψ une transformation de Möbius sur la sphère. On a*

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(\psi(z_l)) \rangle_{\hat{g}} = \prod_l |\psi'(z_l)|^{-2\Delta_{\alpha_l}} \langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle_{\hat{g}} \quad (3.15)$$

Preuve. On avait

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(\psi(z_l)) \rangle_{\hat{g}} / Z_{\hat{g}} = e^{C(\psi(z))} \left(\prod_l \hat{g}(\psi(z_l))^{\Delta_{\alpha_l}} \right) \gamma^{-1} \Gamma(s, \mu) \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z_0^\psi(\mathbb{C})^s}\right]$$

où $s = \frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}$, et

$$Z_0^\psi(\mathbb{C}) = \int_{\mathbb{C}} e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g}}(\psi(z_i), z)} M_\gamma(d^2 z)$$

On applique la proposition 9 avec $f = e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g},\epsilon}(\psi(z_i), z)}$, et on tend ϵ vers 0, alors

$$\mathbb{E}[Z_0^\psi(\mathbb{C})^{-s}] = \mathbb{E}[e^{s\gamma m_{\hat{g}_\psi}(X_{\hat{g}})} \left(\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma \sum_i \alpha_i G_{\hat{g}}(\psi(z_i), \psi(z))} e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} dM_\gamma \right)^{-s}]$$

avec $e^\varphi = \frac{|\psi'|^2 \hat{g} \circ \psi}{\hat{g}}$. On applique le théorème de Girsanov à $e^{s\gamma m_{\hat{g}_\psi}(X_{\hat{g}})}$, et on calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[m_{\hat{g}_\psi}(X_{\hat{g}})^2] &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} G_{\hat{g}}(z, z') \lambda_{\hat{g}_\psi}(d^2 z) \lambda_{\hat{g}_\psi}(d^2 z') \\ &\stackrel{2.31}{=} \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} G_{\hat{g}_\psi}(z, z') \lambda_{\hat{g}_\psi}(d^2 z) \lambda_{\hat{g}_\psi}(d^2 z') + \frac{1}{2} m_{\hat{g}_\psi}(\varphi) \\ &= \frac{1}{2} m_{\hat{g}_\psi}(\varphi) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que

$$M_{\gamma,\epsilon}(d^2z) := \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma X_{\hat{g},\epsilon} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g}} d^2z$$

Le Girsanov introduit un shift $X_{\hat{g},\epsilon} \rightarrow X_{\hat{g},\epsilon} + s\mathbb{E}[X_{\hat{g},\epsilon} m_{\hat{g}_\psi}(X_{\hat{g}})]$, on tend ϵ vers 0, cela donne un terme $e^{\frac{s\gamma^2}{4\pi} G_{\hat{g}} e^\varphi(z)}$ de plus. Par conséquent :

$$\mathbb{E}[Z_0^\psi(\mathbb{C})^{-s}] = \mathbb{E}[e^{\frac{(s\gamma)^2}{4} m_{\hat{g}_\psi}(\varphi)} (\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma(\sum_i \alpha_i G_{\hat{g}}(\psi(z_i), \psi(z)) + \frac{s\gamma}{4\pi} G_{\hat{g}} e^\varphi(z))} e^{\gamma \frac{Q}{2} \varphi} dM_\gamma)^{-s}]$$

On remarque que $R_{\hat{g}} = R_{\hat{g}_\psi} = 2$, par la proposition 3, $e^\varphi = 1 - \frac{1}{2} \Delta_{\hat{g}} \varphi$, alors

$$\frac{1}{4\pi} G_{\hat{g}} e^\varphi = \frac{1}{4} (\varphi - m_{\hat{g}}(\varphi)) \quad (3.16)$$

Ainsi,

$$\alpha_i G_{\hat{g}}(\psi(z_i), \psi(z)) + \frac{s\gamma}{4\pi} G_{\hat{g}} e^\varphi(z) = \sum_i \alpha_i G_{\hat{g}}(z_i, z) - \frac{Q}{2} \varphi(z) - \frac{1}{4} \sum_i \alpha_i \varphi(z_i) - \frac{s\gamma}{4} m_{\hat{g}}(\varphi)$$

D'où

$$\mathbb{E}[Z_0^\psi(\mathbb{C})^{-s}] = e^{\frac{(s\gamma)^2}{4} (m_{\hat{g}_\psi}(\varphi) + m_{\hat{g}}(\varphi))} e^{-\frac{s\gamma}{4} \sum_i \alpha_i \varphi(z_i)} \mathbb{E}[Z_0(\mathbb{C})^{-s}]$$

Si on applique $m_{\hat{g}_\psi}$ à 3.16, on obtient :

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} G_{\hat{g}}(z, z') \lambda_{\hat{g}_\psi}(d^2z) \lambda_{\hat{g}_\psi}(d^2z') = \frac{1}{4} (m_{\hat{g}_\psi}(\varphi) - m_{\hat{g}}(\varphi))$$

mais on a calculé en utilisant 2.31 que ceci est égal à $-\frac{1}{2} m_{\hat{g}_\psi}(\varphi)$. En identifiant, on obtient

$$m_{\hat{g}_\psi}(\varphi) + m_{\hat{g}}(\varphi) = 0 \quad (3.17)$$

Donc

$$\mathbb{E}[Z_0^\psi(\mathbb{C})^{-s}] = e^{-\frac{s\gamma}{4} \sum_i \alpha_i \varphi(z_i)} \mathbb{E}[Z_0(\mathbb{C})^{-s}]$$

Enfin

$$C(\psi(\mathbf{z})) = C(\mathbf{z}) - \frac{1}{4} \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j \varphi(z_j) + \frac{1}{4} \alpha_i^2 \varphi(z_i)$$

$$g(\psi(z_i)) = |\psi'(z_i)|^{-2} e^{\varphi(z_i)}$$

En regroupant tous les éléments, on trouve la formule de KPZ. □

Le théorème suivant donne la fonction de corrélation dans une métrique conforme à \hat{g} :

Théorème 6 (Anomalie de Weyl). *Pour une métrique $g = e^\varphi \hat{g}$,*

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle_g = \exp\left(\frac{c_L}{96\pi} \int_{\mathbb{C}} (|\nabla_{\hat{g}} \varphi|^2 + 2R_{\hat{g}} \varphi) \lambda_{\hat{g}}\right) \langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle_{\hat{g}} \quad (3.18)$$

où le c_L est la charge centrale définie par

$$c_L = 1 + 6Q^2 \quad (3.19)$$

Grâce à ce théorème, on peut décrire la théorie de Liouville dans toutes les métriques $g = e^\varphi \hat{g}$ sur la sphère. On pouvait aussi donner une construction pour les fonctions de corrélation dans toutes les métriques $g = e^\varphi \hat{g}$, qui est tout à fait pareil que ce qu'on a fait pour \hat{g} , et on pourrait montrer l'anomalie de Weyl avec ces constructions comme ce qu'ont fait les auteurs de [8].

4 Formules de Benoît et Saint-Aubin (BSA)

Dans la suite on travaille avec la métrique \hat{g} , tous les résultats se transfèrent facilement à d'autres métriques g grâce à l'anomalie de Weyl. On oublie l'indice \hat{g} sur la fonction de corrélation. Le but de ce chapitre est d'aborder le théorème suivant :

Théorème 7 (BSA). *On reprend les notations dans l'introduction. En supposant les bornes de Seiberg satisfaites, on a les équations BPZ d'ordre $(r, 1)$ au sens des distributions :*

$$\mathcal{D}_r \langle V_{-\frac{(r-1)\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = 0 \quad (4.1)$$

pour $r = 2, 0 < \gamma < 2$ ou $r = 3, 1 < \gamma < \sqrt{2}$. La formule BSA donne

$$\mathcal{D}_r = \sum_{k=1}^r \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^{*k} \\ n_1 + \dots + n_k = r}} \frac{(\frac{\gamma^2}{4})^{r-k}}{\prod_{j=1}^{k-1} (\sum_{i=1}^j n_i) (\sum_{i=j+1}^k n_i)} L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \quad (4.2)$$

Les L_{-n} sont donnés par

$$L_{-1} = \partial_z \quad (4.3)$$

$$L_{-n} = \sum_{l=1}^N \left(-\frac{1}{(z_l - z)^{n-1}} \partial_{z_l} + \frac{\Delta_l(n-1)}{(z_l - z)^n} \right) \quad n \geq 2 \quad (4.4)$$

avec $\Delta_l = \frac{\alpha_l}{2}(Q - \frac{\alpha_l}{2})$ appelé le poids conforme.

Lorsque $r = 2$, on a la fameuse équation BPZ d'ordre $(2, 1)$ ([4]) :

$$\left(\frac{4}{\gamma^2} \partial_z^2 + \sum_{l=1}^N \left(-\frac{1}{(z_l - z)} \partial_{z_l} + \frac{\Delta_l}{(z_l - z)^2} \right) \right) \langle V_{-\frac{\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = 0 \quad (4.5)$$

Dans la deuxième partie de cette section, on résout l'équation d'ordre $(3, 1)$, pour arriver à des formules intéressantes des fonctions de corrélation.

Dans toute cette section on travaille avec une régularisation $\theta_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2} \theta(\frac{|x|^2}{\epsilon^2})$ avec $\theta \in \mathcal{C}^\infty$ à support dans $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$. D'ailleurs, on néglige désormais la constante de normalisation dans $\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle$.

4.1 Calculs des dérivées

Définition 7. On appelle $\phi = X_{\hat{g}} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g}$ le champ de Liouville. On définit aussi sa régularisation $\phi_\epsilon = X_{\hat{g}, \epsilon} + \frac{Q}{2} \ln \hat{g}$.

La fonction de corrélation s'écrit

$$\langle \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{(\sum_l \alpha_l - 2Q)c} \mathbb{E} \left[\prod_l \epsilon^{\frac{\alpha_l^2}{2}} e^{\alpha_l \phi_\epsilon(z_l)} e^{-\mu \int_{\mathbb{C}} \epsilon^{\frac{\gamma^2}{2}} e^{\gamma(\phi_\epsilon(z)+c)} d^2 z} \right] dc \quad (4.6)$$

Pour alléger les notations, on introduit

Définition 8. Pour $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$G_\epsilon(\mathbf{y}; \mathbf{z}) = \langle \prod_{i=1}^n V_{\gamma, \epsilon}(y_i) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle, \quad G(\mathbf{y}; \mathbf{z}) = \langle \prod_{i=1}^n V_\gamma(y_i) \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle \quad (4.7)$$

$$F_\epsilon(\mathbf{y}; \mathbf{z}, \mathbf{z}) = \langle V_{-\frac{(r-1)\gamma}{2}, \epsilon}(z) \prod_{i=1}^n V_{\gamma, \epsilon}(y_i) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle, \quad F(\mathbf{y}; \mathbf{z}, \mathbf{z}) = \langle V_{-\frac{(r-1)\gamma}{2}}(z) \prod_{i=1}^n V_\gamma(y_i) \prod_l V_{\alpha_l}(z_l) \rangle \quad (4.8)$$

On donne une version continue de la formule d'intégration par partie Gaussienne 10, qui servira à calculer les dérivées des fonctions de corrélation.

Proposition 14 (Ipp Gaussienne). *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$, et en écrivant $X_{\hat{g}}(f) = (X_{\hat{g}}, f)$, on a l'équation*

$$\begin{aligned} \langle X_{\hat{g}}(f) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon &= \sum_l \alpha_l \mathbb{E}[X_{\hat{g}}(f) X_{\hat{g}, \epsilon}(z_l)] \langle \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon \\ &\quad - \mu \gamma \int_{\mathbb{C}} \mathbb{E}[X_{\hat{g}}(f) X_{\hat{g}, \epsilon}(y)] \langle V_{\gamma, \epsilon}(y) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon d^2 y \end{aligned} \quad (4.9)$$

On applique la formule Ipp à une distribution ρ qui satisfait $(\rho, 1) = 0$. On rappelle que pour $\epsilon > 0$ quelconque

$$\mathbb{E}[X_{\hat{g}}(f) X_{\hat{g}, \epsilon}(z)] = (f * C_\epsilon)(z) - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{C}} \ln \hat{g}(y) f(y) d^2 y$$

où $C_\epsilon = \ln \frac{1}{|z|} * \theta_\epsilon$, et $\theta_\epsilon = \frac{1}{2} \theta(\frac{|x|^2}{\epsilon^2})$ ($\theta \in \mathcal{C}^\infty$) une régularisation. On suppose que θ est à support dans $B(0, 1) \setminus B(0, \frac{1}{2})$. Alors la formule de Ipp donne

$$\begin{aligned} \langle \phi(f) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon &= \sum_l \alpha_l (f * C_\epsilon)(z_l) G_\epsilon(\mathbf{z}) - \mu \gamma \int_{\mathbb{C}} (f * C_\epsilon)(y) G_\epsilon(y; \mathbf{z}) d^2 y \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{C}} \ln \hat{g}(y) f(y) d^2 y \left((2Q - \sum_l \alpha_l) G_\epsilon(\mathbf{z}) + \mu \gamma \int_{\mathbb{C}} G_\epsilon(x; \mathbf{z}) d^2 x \right) \end{aligned}$$

Les termes qui dépendent de \hat{g} disparaissent grâce au lemme suivant :

Lemme 2 (Identité de KPZ). *Pour $\epsilon \geq 0$,*

$$\mu \gamma \int_{\mathbb{C}} G_\epsilon(x; \mathbf{z}) d^2 x = \left(\sum_l \alpha_l - 2Q \right) G_\epsilon(\mathbf{z}) \quad (4.10)$$

Preuve. Par un changement de variable $c' = \frac{\ln \mu}{\gamma} + c$, on a pour $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \langle \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} e^{(\sum_l \alpha_l - 2Q)c} \mathbb{E} \left[\prod_l e^{\alpha_l \phi_\epsilon(z_l)} e^{-\mu \int_{\mathbb{C}} e^{\gamma(\phi_\epsilon(z) + c)} d^2 z} \right] dc \\ &= \mu^{-\frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}} \int_{\mathbb{R}} e^{(\sum_l \alpha_l - 2Q)c'} \mathbb{E} \left[\prod_l e^{\alpha_l \phi_\epsilon(z_l)} e^{-\int_{\mathbb{C}} e^{\gamma(\phi_\epsilon(z) + c')} d^2 z} \right] dc' \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à μ , on obtient le lemme pour $\epsilon > 0$. Le cas $\epsilon = 0$ s'écoule en tendant $\epsilon \rightarrow 0$. \square

Ainsi on a

$$\langle \phi(f) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon = \sum_l \alpha_l (f * C_\epsilon)(z_l) G_\epsilon(\mathbf{z}) - \mu \gamma \int_{\mathbb{C}} (f * C_\epsilon)(y) G_\epsilon(y; \mathbf{z}) d^2 y \quad (4.11)$$

On en déduit la proposition suivante en prenant $f = \partial_z^n \theta_\epsilon(\cdot - z)$:

Proposition 15. *Soient $n \geq 1$, $\epsilon > 0$. Alors*

$$\langle \partial_z^n \phi_\epsilon(z) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon = \sum_l \frac{\alpha_l}{2} \partial_z^{n-1} \frac{1}{(z_l - z)_\epsilon} G_\epsilon(\mathbf{z}) - \frac{\mu \gamma}{2} \int_{\mathbb{C}} \partial_z^{n-1} \frac{1}{(y - z)_\epsilon} G_\epsilon(y; \mathbf{z}) d^2 y \quad (4.12)$$

avec

$$\frac{1}{(z)_\epsilon} := \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{z + x_1 + x_2} \theta_\epsilon(x_1) \theta_\epsilon(x_2) d^2 x_1 d^2 x_2 \quad (4.13)$$

On applique la formule à $n = 1$ et $z = z_i$, et on obtient la formule de dérivation des fonctions de corrélation

$$\partial_{z_i} G_\epsilon(\mathbf{z}) = \alpha_i \langle \partial_{z_i} \phi_\epsilon(z_i) \prod_l V_{\alpha_l, \epsilon}(z_l) \rangle_\epsilon = \sum_{j: j \neq i} \frac{\alpha_i \alpha_j}{2(z_j - z_i)_\epsilon} G_\epsilon(\mathbf{z}) - \frac{\mu \gamma \alpha_i}{2} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(y - z_i)_\epsilon} G_\epsilon(y; \mathbf{z}) d^2 y \quad (4.14)$$

Remarque. Les fonctions $\frac{1}{(z)_\epsilon}$ et G_ϵ sont de classe C^∞ dans la domaine de définition. De plus, les $\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(y - z_i)_\epsilon} G_\epsilon(y; \mathbf{z}) d^2 y$ ont une limite au sens des distributions.

Maintenant on donne deux lemmes sur les $\frac{1}{(z)_\epsilon}$. On note désormais

$$|z|_\epsilon := |z| \vee \epsilon \quad (4.15)$$

Lemme 3. On a les convergences simples pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \neq 0$: $\partial_z^n \frac{1}{(z)_\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$. De plus, on a la borne suivante pour $\epsilon \leq \epsilon_0$:

$$|\partial_z^n \frac{1}{(z)_\epsilon}| \leq C_n \frac{1}{|z|_\epsilon^{n+1}} \quad (4.16)$$

avec les constantes C_n indépendantes de z et ϵ .

On montre un autre lemme important :

Lemme 4. Soient x, y, z deux à deux différents, on a l'inégalité pour $\epsilon \leq \epsilon_0$

$$\left| \frac{1}{(x - y)_\epsilon} \left(\frac{1}{(y - z)_\epsilon} - \frac{1}{(x - z)_\epsilon} \right) \right| \leq C \frac{1}{|x - z|_\epsilon |y - z|_\epsilon} \quad (4.17)$$

avec C constante indépendante de ϵ .

Preuve. Sans perte de généralité, on suppose que $0 < |x - z| \leq |y - z|$. On remarque que $\frac{1}{(y - z)_\epsilon} - \frac{1}{(x - z)_\epsilon}$ peut s'écrire en une intégrale de chemin :

$$\frac{1}{(y - z)_\epsilon} - \frac{1}{(x - z)_\epsilon} = \int_0^1 (\partial_u \frac{1}{(u - z)_\epsilon})(c(t)) c'(t) dt \quad (4.18)$$

avec le chemin montré sur le dessin.

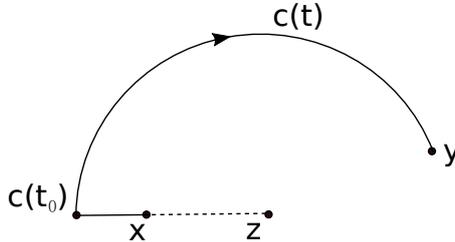


FIGURE 2 – chemin $c(t)$

Par des arguments de géométrie, on peut trouver une constante C' telle que $\int_0^1 |c'(t)| dt \leq C'|y - x|$. Par le lemme précédent,

$$|(\partial_u \frac{1}{(u - z)_\epsilon})(c(t))| \leq C_1 \frac{1}{|c(t)|_\epsilon^2}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(y-z)_\epsilon} - \frac{1}{(x-z)_\epsilon} \right| &\leq C_1 \int_0^{t_0} \frac{1}{|c(t)|_\epsilon^2} |c'(t)| dt + C_1 \frac{1}{|y-z|_\epsilon^2} \int_{t_0}^1 |c'(t)| dt \\ &\leq C_1 \int_0^{t_0} \frac{1}{|c(t)|_\epsilon^2} |c'(t)| dt + C_1 C' \frac{|y-x|}{|x-z|_\epsilon |y-z|_\epsilon} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_0} \frac{1}{|c(t)|_\epsilon^2} |c'(t)| dt \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{t_0} |c'(t)| dt \mathbf{1}_{\epsilon \geq |y-z|} + \frac{|y-z| - |x-z|}{|x-z| |y-z|} \mathbf{1}_{\epsilon \leq |x-z|} + \left(\frac{2}{\epsilon} - \frac{|x-z|}{\epsilon^2} - \frac{1}{|y-z|} \right) \mathbf{1}_{|x-z| < \epsilon < |y-z|} \\ &\leq (C' \mathbf{1}_{\epsilon \geq |y-z|} + \mathbf{1}_{\epsilon \leq |x-z|} + 2 \cdot \mathbf{1}_{|x-z| < \epsilon < |y-z|}) \frac{|y-x|}{|x-z|_\epsilon |y-z|_\epsilon} \end{aligned}$$

où pour le cas $|x-z| < \epsilon < |y-z|$, on a

$$2 \frac{|y-x|}{\epsilon \cdot |y-z|} - \left(\frac{2}{\epsilon} - \frac{|x-z|}{\epsilon^2} - \frac{1}{|y-z|} \right) \geq \frac{|x-z|}{\epsilon^2} + \frac{1}{|y-z|} - 2 \frac{|x-z|}{\epsilon \cdot |y-z|} \geq \frac{2}{\epsilon} \left(\sqrt{\frac{|x-z|}{|y-z|}} - \frac{|x-z|}{|y-z|} \right) \geq 0$$

Enfin par le lemme précédent,

$$\left| \frac{1}{(x-y)_\epsilon} \left(\frac{1}{(y-z)_\epsilon} - \frac{1}{(x-z)_\epsilon} \right) \right| \leq C_0 C_1 (C' \vee 2 + C') \frac{1}{|x-z|_\epsilon |y-z|_\epsilon}$$

□

4.2 Intégrales hyper-singulières des corrélations

Définition 9. On introduit des expressions qui nous seront utiles dans la suite : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_n(z, \mathbf{z}) := \sum_{l=1}^N \frac{\alpha_l}{2(z_l - z)^n} \quad (4.19)$$

avec $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$. Pour $p \in \mathbb{N}$, et $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, on pose

$$Q_{\mathbf{q}}(z, \mathbf{z}) := \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{i=1}^p \frac{1}{(y_i - z)^{q_i}} F(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2 \mathbf{y} \quad (4.20)$$

On définit aussi un opérateur T_k sur $Q_{\mathbf{q}}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$:

$$T_k Q_{\mathbf{q}} = Q_{q_1, \dots, q_k+1, \dots, q_p} \quad (4.21)$$

Remarque. Lorsque $p = 0$ on a $Q = F(z, \mathbf{z})$. On note que $Q_{\mathbf{p}}$ dépend de r , mais comme on fixe un r , on cache cette dépendance dans l'écriture.

Le problème majeur est que les $Q_{\mathbf{q}}$ ne sont pas bien définis pour tout p et \mathbf{q} . Une piste possible est de définir ces objets comme des valeurs principales, car selon les physiciens, les fonctions de corrélations sont \mathcal{C}^∞ en z, \mathbf{z} . Malheureusement on ne sait pas montrer son caractère \mathcal{C}^∞ pour l'instant. On choisit donc de donner des contraintes de plus pour rendre ces intégrales convergentes pour $r = 2, 3$. En fait on demande quelque chose de plus fort pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée.

On note pour $\delta > 0$,

$$U_{N,\delta} := \{(z'_1, \dots, z'_N) : \forall l \neq j, |z'_l - z'_j| \geq \delta\} \quad (4.22)$$

et

$$O_{N,\delta}(\mathbf{z}) = \mathbb{C} \setminus \cup_{l=1}^N B(z_l, \delta) \quad (4.23)$$

Proposition 16. *On prend*

$$(r, \gamma) \in (\{2\} \times]0, 2[) \cup (\{3\} \times]1, \sqrt{2}[) \quad (4.24)$$

Soient $p \in \{0, 1, 2\}$, $\delta > 0$ suffisamment petit, $(z, \mathbf{z}) \in U_{N+1, \delta} \cap B(0, \delta^{-1})$ et $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p q_i \leq r$. Alors on a l'intégrale suivante converge :

$$\left(\frac{\mu\gamma}{2}\right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \prod_{i=1}^p \frac{1}{|y_i - z|_\epsilon^{q_i}} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2 \mathbf{y} < \infty \quad (4.25)$$

Comme conséquence du théorème de convergence dominée, on a que sous les conditions de l'énoncé, les intégrales $Q_{\mathbf{q}}$ sont absolument convergente.

Preuve. Le cas $r = 2$ a été entièrement traité dans [19]. Les auteurs ont donné des bornes précises qui permet de conclure la convergence de l'intégrale. Pour $r = 3$, le comportement du $\sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z})$ autour de $y_i = z_l$ ou $y_i = \infty$ est tout à fait pareil que celui du cas $r = 2$, il suffit d'étudier $\sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z})$ lorsque les y_i sont dans $O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1})$ pour tout i .

$r = 3$. Pour α_l et γ fixés, on a d'après la proposition 13,

$$F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) \leq C'_\delta \prod_{i=1}^p |y_i - z|_\epsilon^{\gamma^2} \prod_{1 \leq i < j \leq p} |y_i - y_j|_\epsilon^{-\gamma^2} \mathbb{E} \left[\left(\int_{B(z, \delta)} \frac{|x - z|_\epsilon^{\gamma^2}}{\prod_{i=1}^p |x - y_i|_\epsilon^{\gamma^2}} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 x) \right)^{-s} \right]$$

avec $s = -\frac{(p-(r-1)/2)\gamma + \sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma} < 0$. On sait que

$$\begin{aligned} \sup_{\epsilon \leq \epsilon_0} \sup_{\forall i, y_i \in O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1})} \mathbb{E} \left[\left(\int_{B(z, \delta)} \frac{|x - z|_\epsilon^{\gamma^2}}{\prod_{i=1}^p |x - y_i|_\epsilon^{\gamma^2}} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 x) \right)^{-s} \right] \\ \leq cste_\delta \sup_{\epsilon \leq \epsilon_0} \mathbb{E} \left[\left(\int_{B(z, \delta)} |x - z|_\epsilon^{\gamma^2} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 x) \right)^{-s} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Or $-\gamma < Q$ et par le lemme 1,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_{B(z, \delta)} |x - z|_\epsilon^{\gamma^2} M_{\gamma, \epsilon}(d^2 x) \right)^{-s} \right] \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\left(\int_{B(z, \delta)} |x - z|_\epsilon^{\gamma^2} M_\gamma(d^2 x) \right)^{-s} \right] < \infty$$

D'où vient la borne pour $y_i \in O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1})$

$$F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) \leq C_\delta \prod_{i=1}^p |y_i - z|_\epsilon^{\gamma^2} \prod_{1 \leq i < j \leq p} |y_i - y_j|_\epsilon^{-\gamma^2}$$

Il reste à vérifier la proposition pour $\mathbf{q} = 0, (1), (2), (3), (1, 1), (1, 2)$ à l'aide de cette inégalité. Par exemple pour $\mathbf{q} = (3)$,

$$\begin{aligned} \frac{\mu\gamma}{2} \int_{O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1})} \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \frac{1}{|y_1 - z|_\epsilon^3} F_\epsilon(y_1; z, \mathbf{z}) d^2 y_1 \\ \leq \frac{\mu\gamma}{2} C_\delta \int_{O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1})} \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \frac{1}{|y_1 - z|_\epsilon^{3-\gamma^2}} d^2 y_1 \stackrel{\gamma > 1}{<} \infty \end{aligned}$$

ou par exemple pour $\mathbf{q} = (1, 2)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu\gamma}{2}\right)^2 \int_{(O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1}))^2} \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \frac{1}{|y_1 - z|_\epsilon |y_2 - z|_\epsilon^2} F_\epsilon(y_1, y_2; z, \mathbf{z}) d^2 y_1 d^2 y_2 \\ \leq \left(\frac{\mu\gamma}{2}\right)^2 C_\delta \int_{(O_{N, \delta}(\mathbf{z}) \cap B(0, \delta^{-1}))^2} \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \frac{|y_1 - z|_\epsilon^{\gamma^2 - 1}}{|y_2 - z|_\epsilon^{2-\gamma^2} |y_1 - y_2|_\epsilon^{\gamma^2}} d^2 y_1 d^2 y_2 \end{aligned}$$

On calcule

$$\begin{aligned}
& \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} \frac{|y_1 - z| \epsilon^{\gamma^2 - 1}}{|y_2 - z| \epsilon^{2 - \gamma^2} |y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}} \\
&= \sup_{0 < \epsilon \leq \epsilon_0} (\mathbf{1}_{|y_1 - z| > \epsilon} + \mathbf{1}_{|y_1 - z| \leq \epsilon, |y_1 - z| \leq |y_2 - z|} + \mathbf{1}_{|y_2 - z| < |y_1 - z| \leq \epsilon}) \frac{|y_1 - z| \epsilon^{\gamma^2 - 1}}{|y_2 - z| \epsilon^{2 - \gamma^2} |y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}} \\
&\leq \frac{|y_1 - z| \epsilon^{\gamma^2 - 1}}{|y_2 - z| \epsilon^{2 - \gamma^2} |y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}} + \frac{\mathbf{1}_{|y_1 - z| \leq |y_2 - z|}}{|y_2 - z| \epsilon^{3 - 2\gamma^2} |y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}} + \frac{\epsilon_0^{2\gamma^2 - 3}}{|y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}} \vee \frac{1}{|y_1 - z| \epsilon^{3 - 2\gamma^2} |y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}}
\end{aligned}$$

On rappelle que $1 < \gamma < \sqrt{2}$. Il est facile à voir que les deux derniers termes sont intégrables. Pour le premier terme, on calcule son intégrale en faisant le changement de variable $y_1 - z = t(y_2 - z)$:

$$\int_{B(z, \delta)^2} \frac{|y_1 - z| \epsilon^{\gamma^2 - 1}}{|y_2 - z| \epsilon^{2 - \gamma^2} |y_1 - y_2| \epsilon^{\gamma^2}} d^2 y_1 d^2 y_2 = \int_{B(z, \delta)} \int_{|t| \leq 1} \frac{|t| \epsilon^{\gamma^2 - 1}}{|y_2 - z| \epsilon^{3 - \gamma^2} |t - 1| \epsilon^{\gamma^2}} d^2 t d^2 y_2 < \infty$$

□

On verra que pour montrer les équations BPZ d'ordre $(3, 1)$, il n'y aura pas besoin du cas $\mathbf{q} = (1, 1, 1)$.

4.3 Règles de récurrence

Maintenant on veut exprimer les $L_{-n} Q_{\mathbf{q}}$ en fonction des P et $Q \dots$. On commence par $L_{-n} Q$. Dans toute cette partie, on prend $(r, \gamma) \in (\{2\} \times]0, 2[\cup (\{3\} \times]1, \sqrt{2}[)$, $(z, \mathbf{z}) \in U_{N+1, \delta} \cap B(0, \delta^{-1})$ avec $\delta > 0$ suffisamment petit.

Lemme 5. *On a la relation suivante pour $n \leq r$, au sens faible :*

$$\begin{aligned}
L_{-n} Q &= \left(- \sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{n-i} + \left(\frac{(n-r)\gamma}{2} + \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) P_n \right) Q \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i Q_{n-i} + \left(\frac{(r-1)\gamma}{2} - \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) Q_n - \sum_{i=1}^{n-1} Q_{i, n-i}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Preuve. On calcule $L_{-n, \epsilon} F_{\epsilon}(z, \mathbf{z})$ et puis on tend ϵ vers 0. $L_{-n, \epsilon}$ est donné par

$$L_{-1, \epsilon} = \partial_z \tag{4.28}$$

$$L_{-n, \epsilon} = \sum_{l=1}^N \left(- \frac{1}{(z_l - z)_{\epsilon}^{n-1}} \partial_{z_l} + \frac{\Delta_l (n-1)}{(z_l - z)_{\epsilon}^n} \right) \quad n \geq 2 \tag{4.29}$$

Par la formule de dérivation,

$$\partial_{z_j} F_{\epsilon}(z, \mathbf{z}) = \alpha_j \left(\sum_{l \neq j} \frac{\alpha_l}{2(z_l - z_j)_{\epsilon}} - \frac{(r-1)\gamma}{4(z - z_j)_{\epsilon}} \right) F_{\epsilon}(z, \mathbf{z}) - \frac{\mu \gamma \alpha_j}{2} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(y - z_j)_{\epsilon}} F_{\epsilon}(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \tag{4.30}$$

Par conséquent, pour le cas $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
& L_{-n, \epsilon} F_{\epsilon}(z, \mathbf{z}) \\
&= \left(- \sum_j \sum_{l \neq j} \frac{\alpha_j \alpha_l}{2(z_l - z_j)_{\epsilon} (z_j - z)_{\epsilon}^{n-1}} - \frac{(r-1)\gamma}{2} \sum_j \frac{\alpha_j}{2(z_j - z)_{\epsilon}^{n-1} (z_j - z)_{\epsilon}} + \sum_j \frac{(n-1) \Delta_{\alpha_j}}{(z_j - z)_{\epsilon}^n} \right) F_{\epsilon}(z, \mathbf{z}) \\
&\quad + \sum_j \frac{\mu \gamma \alpha_j}{2(z_j - z)_{\epsilon}^{n-1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(y - z_j)_{\epsilon}} F_{\epsilon}(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \\
&=: A_{\epsilon} F_{\epsilon}(z, \mathbf{z}) + B_{\epsilon}
\end{aligned}$$

Pour calculer $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_\epsilon$, on utilise l'identité :

$$\frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - z)^{n-1}} - \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - z)^{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(x_1 - z)^i} \frac{1}{(x_2 - z)^{n-i}} \quad (4.31)$$

Par symétrie,

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_{l \neq j} \frac{\alpha_j \alpha_l}{2(z_l - z_j)(z_j - z)^{n-1}} &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_{l \neq j} \frac{\alpha_j \alpha_l}{2(z_l - z_j)(z_j - z)^{n-1}} - \frac{\alpha_j \alpha_l}{2(z_l - z_j)(z_l - z)^{n-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{n-i} - \sum_j \frac{(n-1)\alpha_j^2}{4(z_j - z)^n} \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} A_\epsilon = - \sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{n-i} + \left(\frac{(n-r)\gamma}{2} + \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) P_n$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} B_\epsilon &- \int_{\mathbb{C}} \sum_j \frac{\mu\gamma\alpha_j}{2(y - z_j)_\epsilon (y - z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \\ &= \int_{\mathbb{C}} \sum_j \frac{\mu\gamma\alpha_j}{2} \frac{1}{(y - z_j)_\epsilon} \left(\frac{1}{(z_j - z)_\epsilon^{n-1}} - \frac{1}{(y - z)_\epsilon^{n-1}} \right) F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_j \frac{\mu\gamma\alpha_j}{2(z_j - z)_\epsilon^i} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(y - z_j)_\epsilon} \left(\frac{1}{(z_j - z)_\epsilon} - \frac{1}{(y - z)_\epsilon} \right) \frac{1}{(y - z)_\epsilon^{n-2-i}} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \end{aligned}$$

Par le lemme 4,

$$\left| \frac{1}{(y - z_j)_\epsilon} \left(\frac{1}{(z_j - z)_\epsilon} - \frac{1}{(y - z)_\epsilon} \right) \right| \leq C \frac{1}{|z_j - z|_\epsilon |y - z|_\epsilon}$$

On a aussi la convergence simple pour y, z, z_j deux à deux différents :

$$\frac{1}{(y - z_j)_\epsilon} \left(\frac{1}{(z_j - z)_\epsilon} - \frac{1}{(y - z)_\epsilon} \right) \frac{1}{(y - z)_\epsilon^{n-2-i}} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(z_j - z)(y - z)^{n-1-i}} F(y; z, \mathbf{z})$$

Ainsi on peut déduire par la convergence dominée que

$$B_\epsilon - \int_{\mathbb{C}} \sum_j \frac{\mu\gamma\alpha_j}{2(y - z_j)_\epsilon (y - z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i Q_{n-i} \quad (4.32)$$

Une intégration par partie multidimensionnelle (ou formule de Stokes) donne

$$\begin{aligned} &\frac{2(n-1)}{\gamma} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu\gamma}{2(y - z)_\epsilon^{n-2}} \partial_y \frac{1}{(y - z)_\epsilon} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \\ &= - \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu\gamma}{(y - z)_\epsilon^{n-1}} \left(\left(\sum_j \frac{\alpha_j}{2(z_j - y)_\epsilon} - \frac{(r-1)\gamma}{4(z - y)_\epsilon} \right) F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) - \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu\gamma}{2(x - y)_\epsilon} F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2 x \right) d^2 y \\ &= \int_{\mathbb{C}} \sum_j \frac{\mu\gamma\alpha_j}{2(y - z_j)_\epsilon (y - z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y - \frac{(r-1)\gamma}{2} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(y - z)_\epsilon^n} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2 y \\ &\quad + \int_{\mathbb{C}^2} \frac{(\mu\gamma)^2}{2(x - y)_\epsilon (y - z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2 x d^2 y \end{aligned}$$

On remplace dans 4.32 l'expression qu'on vient de déduire :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} \sum_j \frac{\mu\gamma\alpha_j}{2(y-z_j)_\epsilon(y-z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2y \\ &= \frac{2(n-1)}{\gamma} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu\gamma}{2(y-z)_\epsilon^{n-2}} \partial_y \frac{1}{(y-z)_\epsilon} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2y + \frac{(r-1)\gamma}{2} \int_{\mathbb{C}} \frac{\mu\gamma}{2(y-z)_\epsilon^n} F_\epsilon(y; z, \mathbf{z}) d^2y \\ & \quad - \int_{\mathbb{C}^2} \frac{(\mu\gamma)^2}{2(x-y)_\epsilon(y-z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2x d^2y \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de la somme convergent vers $-\frac{2(n-1)}{\gamma}Q_n$ et $\frac{(r-1)\gamma}{2}Q_n$ respectivement, il reste à étudier le dernier terme. Par symétrie,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}^2} \frac{(\mu\gamma)^2}{2(x-y)_\epsilon(y-z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2x d^2y \\ &= \frac{(\mu\gamma)^2}{4} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{1}{(x-y)_\epsilon} \left(\frac{1}{(y-z)_\epsilon^{n-1}} - \frac{1}{(x-z)_\epsilon^{n-1}} \right) F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2x d^2y \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \int_{\mathbb{C}^2} \frac{1}{(x-y)_\epsilon} \left(\frac{1}{(y-z)_\epsilon} - \frac{1}{(x-z)_\epsilon} \right) \frac{1}{(y-z)_\epsilon^i (x-z)_\epsilon^{n-2-i}} F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2x d^2y \end{aligned}$$

Par le lemme 4,

$$\left| \frac{1}{(x-y)_\epsilon} \left(\frac{1}{(y-z)_\epsilon} - \frac{1}{(x-z)_\epsilon} \right) \right| \leq C \frac{1}{|x-z|_\epsilon |y-z|_\epsilon} \quad (4.33)$$

Comme conséquence, $\int_{\mathbb{C}^2} \frac{(\mu\gamma)^2}{2(x-y)_\epsilon(y-z)_\epsilon^{n-1}} F_\epsilon(x, y; z, \mathbf{z}) d^2x d^2y \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} Q_{i, n-i}$. Ainsi,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} B_\epsilon = 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i Q_{n-i} + \left(\frac{(r-1)\gamma}{2} - \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) Q_n - \sum_{i=1}^{n-1} Q_{i, n-i}$$

En tendant ϵ vers 0 dans $L_{-n, \epsilon} F_\epsilon(z, \mathbf{z}) = A_\epsilon F_\epsilon(z, \mathbf{z}) + B_\epsilon$, on obtient le lemme. Enfin on remarque que cette expression est valide pour $n = 1$ également, ce qui finit la preuve. \square

Grâce à ce lemme, on peut déduire l'expression de $L_{-n} Q_{\mathbf{q}}$ avec $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_p)$:

Proposition 17. *Au sens des dérivées faibles, pour $p \in \{0, 1\}$ et $n + \sum_i q_i \leq r$:*

$$\begin{aligned} L_{-n} Q_{\mathbf{q}} = & \left[- \sum_{i=1}^{n-1} P_i P_{n-i} + \left(\frac{(n-r)\gamma}{2} + \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) P_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i T_{p+1}^{n-i} + \left(\frac{(r-1)\gamma}{2} - \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) T_{p+1}^n \right. \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} T_{p+2}^{n-i} T_{p+1}^i + \sum_{j=1}^p \left(-\gamma \sum_{i=1}^{n-1} P_i T_j^{n-i} + \left(\frac{(n-r)\gamma^2}{4} + n - 1 + q_j \right) T_j^n \right. \\ & \left. \left. + \gamma \sum_{i=1}^{n-1} T_{p+1}^{n-i} T_j^i - \frac{\gamma^2}{4} \sum_{j'=1}^p \sum_{i=1}^{n-1} T_{j'}^{n-i} T_j^i \right) \right] Q_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Lorsque $p = 0$, on a le lemme précédent.

Preuve. On note $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$. Pour $n \geq 2$,

$$L_{-n, \epsilon} \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(y_j - z)_\epsilon^{q_j}} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2\mathbf{y} \stackrel{(j)}{=} \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(y_j - z)_\epsilon^{q_j}} L_{-n, \epsilon} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2\mathbf{y}$$

Pour (j), il suffit de justifier que ∂_{z_i} commute avec l'intégrale. En fait,

$$\begin{aligned} \partial_{z_i} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) = & \left(-\frac{(r-1)\gamma\alpha_i}{4(z-z_i)_\epsilon} + \sum_{j=1}^p \frac{\gamma\alpha_i}{2(y_j-z_i)_\epsilon} + \sum_{l \neq i} \frac{\alpha_l\alpha_i}{2(z_l-z_i)_\epsilon} \right) F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) \\ & - \frac{\mu\gamma\alpha_i}{2} \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(x-z)_\epsilon} F_\epsilon(x, \mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2x \end{aligned}$$

on peut montrer que $\sup_{z_i \in K} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(y_j-z)_\epsilon^{q_j}} \partial_{z_i} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z})$ est intégrable, où K est un compact tel que z_i est dans l'intérieur de K , ce qui justifie la commutation grâce au théorème de dérivation sous l'intégrale.

On note

$$L_{-n,\epsilon}^{(p)} = \sum_{l=1}^N \left(-\frac{\partial_{z_l}}{(z_l-z)_\epsilon^{n-1}} + \frac{(n-1)\Delta_{\alpha_l}}{(z_l-z)_\epsilon^n} \right) + \sum_{i=1}^p \left(-\frac{\partial_{y_i}}{(y_i-z)_\epsilon^{n-1}} + \frac{(n-1)\Delta_\gamma}{(y_i-z)_\epsilon^n} \right)$$

Alors, en remarquant que $\Delta_\gamma = 1$,

$$\begin{aligned} & L_{-n,\epsilon} \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(y_j-z)_\epsilon^{q_j}} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2\mathbf{y} \\ &= \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(y_j-z)_\epsilon^{q_j}} L_{-n,\epsilon}^{(p)} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2\mathbf{y} \\ &+ \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{j=1}^p \frac{1}{(y_j-z)_\epsilon^{q_j}} \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial_{y_i}}{(y_i-z)_\epsilon^{n-1}} - \frac{n-1}{(y_i-z)_\epsilon^n} \right) F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2\mathbf{y} \\ &=: \tilde{A}_\epsilon + \tilde{B}_\epsilon \end{aligned}$$

On fait une intégration par partie pour calculer \tilde{B}_ϵ :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\epsilon &= \sum_{i=1}^p \left(\frac{\mu\gamma}{2} \right)^p \int_{\mathbb{C}^p} \prod_{j \neq i}^p \frac{1}{(y_j-z)_\epsilon^{q_j}} \left(-\frac{q_i+n-1}{(y_i-z)_\epsilon^{q_i+n-2}} \partial_{y_i} \frac{1}{(y_i-z)_\epsilon} - \frac{n-1}{(y_i-z)_\epsilon^{q_i+n}} \right) F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) d^2\mathbf{y} \\ &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^p q_j T_j^n Q_{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Dans \tilde{A}_ϵ , $L_{-n,\epsilon}^{(p)} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z})$ est fourni par le lemme 5 :

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} L_{-n,\epsilon}^{(p)} F_\epsilon(\mathbf{y}; z, \mathbf{z}) &= \left(-\sum_{i=1}^{n-1} P_i^{(p)} P_{n-i}^{(p)} + \left(\frac{(n-r)\gamma}{2} + \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) P_n^{(p)} \right) Q^{(p)} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{n-1} P_i^{(p)} Q_{n-i}^{(p)} + \left(\frac{(r-1)\gamma}{2} - \frac{2(n-1)}{\gamma} \right) Q_n^{(p)} - \sum_{i=1}^{n-1} Q_{i,n-i}^{(p)} \end{aligned}$$

avec

$$P_k^{(p)}(z, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^N \frac{\alpha_l}{2(z_l-z)^k} + \sum_{j=1}^p \frac{\gamma}{2(y_j-z)^k} = P_k + \sum_{j=1}^p \frac{\gamma}{2(y_j-z)^k}$$

$$Q^{(p)}(z, \mathbf{z}, \mathbf{y}) = \langle V_{-\frac{(r-1)\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \prod_{j=1}^p V_\gamma(y_j) \rangle$$

Si on entre dans les détails, on pourra montrer la convergence dominée s'applique, et un calcul algébrique simple permet de conclure la preuve. Pour le cas $n = 1$ on vérifie sans peine que la formule reste valide. \square

Proposition 18. *Au sens faible, pour $p \in \{0, 1\}$ et $n + \sum_i q_i \leq r$,*

$$L_{-n} \prod_i P_{n_i} Q_{\mathbf{q}} = \left(\sum_i n_i P_{n_i+n} \prod_{i' \neq i} P_{n_{i'}} + \prod_i P_{n_i} L_{-n} \right) Q_{\mathbf{q}} \quad (4.35)$$

Cette proposition et la proposition 17 montrent que $\mathcal{D}_r Q$ s'exprime en une combinaison linéaire des $\prod_i P_{n_i} Q_{\mathbf{q}}$ (on note aussi $P_{\mathbf{n}} Q_{\mathbf{q}}$, avec $\mathbf{n} = (n_i)_i$). La preuve pour les équations de BPZ dans la section suivante consiste à annuler les coefficients devant chacun de ces termes.

4.4 Preuve des équations BPZ d'ordre (2,1) et (3,1)

On se sert notamment des propositions 17 et 18 pour montrer que les fonctions de corrélation satisfont les équations BPZ d'ordre (2,1) et (3,1). Muni des résultats de la partie précédente, les preuves sont directes.

Avant de faire les calculs, on donne la relation de commutation pour les opérateurs L_{-n} ($n \geq 1$) :

Proposition 19. *Pour $n, m \geq 1$*

$$[L_{-n}, L_{-m}] = (m - n) L_{-(n+m)} \quad (4.36)$$

Preuve. On utilise les définitions 4.3 et 4.4. □

Maintenant on vérifie les équations de BPZ, pour $r = 2$ et $r = 3$ respectivement.

◇ Cas $r = 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2 &= \frac{\gamma^2}{4} L_{-2} + L_{-1}^2 & (4.37) \\ L_{-1} Q &= -\frac{\gamma}{2} P_1 Q + \frac{\gamma}{2} Q_1 \\ L_{-1}^2 Q &= \left(-\frac{\gamma}{2} P_2 + \frac{\gamma^2}{4} P_1^2\right) Q - \frac{\gamma^2}{2} P_1 Q_1 + \frac{\gamma^2}{4} Q_{1,1} + \left(-\frac{\gamma^3}{8} + \frac{\gamma}{2}\right) Q_2 \\ L_{-2} Q &= \left(-P_1^2 + \frac{2}{\gamma} P_2\right) Q + 2P_1 Q_1 + \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{2}{\gamma}\right) Q_2 - Q_{1,1} \end{aligned}$$

On a ainsi $\mathcal{D}_2 Q = 0$, en vérifiant que tous les coefficients devant chaque $P_{\mathbf{n}} Q_{\mathbf{q}}$ sont nuls. □

◇ Cas $r = 3$ et $1 < \gamma < \sqrt{2}$:

$$\mathcal{D}_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma^4}{4} L_{-3} + \frac{\gamma^2}{2} L_{-1} L_{-2} + \frac{\gamma^2}{2} L_{-2} L_{-1} + L_{-1}^3 \right) \quad (4.38)$$

Par 4.36, on a

$$L_{-2} L_{-1} = L_{-1} L_{-2} - L_{-3}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3 &= \frac{1}{4} \left(\left(\frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^2}{2} \right) L_{-3} + \gamma^2 L_{-1} L_{-2} + L_{-1}^3 \right) & (4.39) \\ L_{-1} Q &= -\gamma P_1 Q + \gamma Q_1 \\ L_{-1}^2 Q &= \left(-\gamma P_2 + \gamma^2 P_1^2\right) Q - 2\gamma^2 P_1 Q_1 + \gamma^2 Q_{1,1} + \left(-\frac{\gamma^3}{2} + \gamma\right) Q_2 \\ L_{-2} Q &= \left(-P_1^2 + \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma}\right) P_2\right) Q + 2P_1 Q_1 + \left(\gamma - \frac{2}{\gamma}\right) Q_2 - Q_{1,1} \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\gamma^2 L_{-2} + L_{-1}^2\right) Q = \left(\gamma - \frac{\gamma^3}{2}\right) P_2 Q + \left(\frac{\gamma^3}{2} - \gamma\right) Q_2$$

$$\begin{aligned}
L_{-1}(\gamma^2 L_{-2} + L_{-1}^2)Q &= -\left(\frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^2}{2}\right)\left(\left(\frac{4}{\gamma}P_3 - 2P_1P_2\right)Q + 2P_2Q_1 + 2P_1Q_2 - 2Q_{2,1} + \left(\gamma - \frac{4}{\gamma}\right)Q_3\right) \\
&= -\left(\frac{\gamma^4}{4} - \frac{\gamma^2}{2}\right)L_{-3}Q
\end{aligned}$$

On conclut que $\mathcal{D}_3Q = 0$. □

On peut procéder à un calcul algébrique formel pour vérifier les équations BPZ d'ordre $(r, 1)$, avec r supérieur à 4, en supposant que la proposition 17 reste valide. Un algorithme de matlab est donné dans l'annexe pour ce but, et la validité des équations ont été testées pour r allant de 1 à 8. Le temps de calcul croît très rapidement et les cas r supérieur à 9 n'ont pas été testés pour cette raison. Il existe éventuellement une méthode combinatoire pour prouver de façon formelle les équations BPZ d'ordre $(r, 1)$ pour tout r .

Remarque. L'équation d'ordre $(1, 1)$ dit simplement que $\partial_z Q(\mathbf{z}) = 0$ où $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$.

4.5 Etude des corrélations à 4 points

Dans cette section on travaille avec $r = 3$. Par la formule de KPZ 5 appliquée à la transformation $\psi : z \mapsto \frac{(z_2 - z_1)z_3 z - (z_2 - z_3)z_1}{(z_2 - z_1)z - (z_2 - z_3)}$, les fonctions de corrélation à 3 points s'écrivent :

$$\left\langle \prod_{l=1}^3 V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle = C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) |z_1 - z_2|^{2\Delta_{12}} |z_1 - z_3|^{2\Delta_{13}} |z_2 - z_3|^{2\Delta_{23}} \quad (4.40)$$

avec $\Delta_{12} = \Delta_{\alpha_3} - \Delta_{\alpha_1} - \Delta_{\alpha_2}$ etc., et

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta_{\alpha_3}} \langle V_{\alpha_1}(0)V_{\alpha_2}(1)V_{\alpha_3}(z_3) \rangle \quad (4.41)$$

Par l'équation 3.3, on a

$$\left\langle \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \right\rangle = B(\boldsymbol{\alpha}) \prod_{i < j} \frac{1}{|z_i - z_j|^{\alpha_i \alpha_j}} \gamma^{-1} \Gamma(s, \mu) \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{C}} \prod_{k=1}^N \frac{1}{|x - z_k|^{\gamma \alpha_k}} \hat{g}(x)^{-\frac{\gamma}{4} \sum_{i=1}^N \alpha_i} M_{\gamma}(d^2x) \right)^{-s} \right] \quad (4.42)$$

avec $s = \frac{\sum_l \alpha_l - 2Q}{\gamma}$ et

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = 4e^{-\frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{2} (\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2Q)^2} \quad (4.43)$$

On a choisi d'oublier la constante $Z_{\hat{g}}$, ce qui donne les résultats à constante multiplicative (indépendante de tous les paramètres) près. On peut en déduire une expression de $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = B(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \gamma^{-1} \Gamma(s, \mu) \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{|x|^{\gamma \alpha_1} |x - 1|^{\gamma \alpha_2}} \hat{g}(x)^{-\frac{\gamma}{4} \sum_{i=1}^3 \alpha_i} M_{\gamma}(d^2x) \right)^{-s} \right] \quad (4.44)$$

Les constantes $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont appelées les constantes de structure à trois points. Elles jouent un rôle fondamental dans 'the conformal bootstrap approach' (voir [25]). L'étude des solutions des équations BPZ d'ordre $(2, 1)$ permet de donner des relations entre ces constantes et de les résoudre éventuellement. Une formule pour les $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est appelée la formule de DOZZ (sous le nom Dorn-Otto-Zamolodchikov-Zamolodchikov [9], [33]). Les solutions des équations BPZ d'ordre $(2, 1)$ ont été traitées dans [19], et la formule de DOZZ a été très récemment prouvé dans [20]. On cite la formule :

Théorème 8 (DOZZ). *On introduit la fonction spéciale Υ définie sur $0 < \text{Re}(z) < Q$ par la formule*

$$\ln \Upsilon(z) = \int_0^{\infty} \left(\left(\frac{Q}{2} - z\right)^2 e^{-t} - \frac{(\sinh(\frac{Q}{2} - z)\frac{t}{2})^2}{\sinh(\frac{t\gamma}{4}) \sinh(\frac{t}{\gamma})} \right) \frac{dt}{t} \quad (4.45)$$

La fonction Υ peut être prolongée analytiquement sur \mathbb{C} . On note $\bar{\alpha} = \sum_i \alpha_i$ et

$$l(x) = \Gamma(x)/\Gamma(1-x) \quad (4.46)$$

La formule de DOZZ s'écrit

$$C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\pi \mu l\left(\frac{\gamma^2}{4}\right) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2-\gamma^2/2} \right)^{\frac{2Q-\bar{\alpha}}{\gamma}} \frac{\Upsilon'(0)\Upsilon(\alpha_1)\Upsilon(\alpha_2)\Upsilon(\alpha_3)}{\Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2}-Q)\Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2}-\alpha_1)\Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2}-\alpha_2)\Upsilon(\frac{\bar{\alpha}}{2}-\alpha_3)} \quad (4.47)$$

Il est important à noter que cette expression de $C(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est caractérisée par la proposition suivante ([31]) :

Proposition 20. *La constante de structure C analytique en $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, et vérifie les relations*

$$\frac{C(\alpha_1 + \frac{\gamma}{2}, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1 - \frac{\gamma}{2}, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{1}{\pi \mu} \frac{l(-\frac{\gamma^2}{4})l(\frac{\gamma\alpha_1}{2})l(\frac{\gamma\alpha_1}{2} - \frac{\gamma^2}{4})l(\frac{\gamma}{4}(\bar{\alpha} - 2\alpha_1 - \frac{\gamma}{2}))}{l(\frac{\gamma}{4}(\bar{\alpha} - \frac{\gamma}{2} - 2Q))l(\frac{\gamma}{4}(\bar{\alpha} - 2\alpha_2 - \frac{\gamma}{2}))l(\frac{\gamma}{4}(\bar{\alpha} - 2\alpha_3 - \frac{\gamma}{2}))} \quad (4.48)$$

$$\frac{C(\alpha_1 + \frac{2}{\gamma}, \alpha_2, \alpha_3)}{C(\alpha_1 - \frac{2}{\gamma}, \alpha_2, \alpha_3)} = -\frac{1}{\pi \tilde{\mu}} \frac{l(-\frac{4}{\gamma^2})l(\frac{\alpha_1}{2\gamma})l(\frac{\alpha_1}{2\gamma} - \frac{4}{\gamma^2})l(\frac{1}{\gamma}(\bar{\alpha} - 2\alpha_1 - \frac{2}{\gamma}))}{l(\frac{1}{\gamma}(\bar{\alpha} - \frac{2}{\gamma} - 2Q))l(\frac{1}{\gamma}(\bar{\alpha} - 2\alpha_2 - \frac{2}{\gamma}))l(\frac{1}{\gamma}(\bar{\alpha} - 2\alpha_3 - \frac{2}{\gamma}))} \quad (4.49)$$

$$\text{où } \tilde{\mu} = \frac{(\mu \pi l(\frac{\gamma^2}{2}))^{\frac{4}{\gamma^2}}}{\pi l(\frac{4}{\gamma^2})}.$$

On s'intéressera aux solutions des équations BPZ d'ordre (3, 1). Pour cela, on prend les fonctions de corrélation à 4 points, qui vérifie la relation suivante par la formule de KPZ 5 appliquée à la même transformation ψ que précédemment :

$$\begin{aligned} \langle V_{-\gamma}(z) \prod_{l=1}^3 V_{\alpha_l}(z_l) \rangle &= |z_3 - z|^{-4\Delta_{-\gamma}} |z_1 - z_2|^{2(\Delta_{12} - \Delta_{-\gamma})} |z_1 - z_3|^{2(\Delta_{13} + \Delta_{-\gamma})} \\ &\quad |z_2 - z_3|^{2(\Delta_{23} + \Delta_{-\gamma})} G\left(\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}\right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

avec

$$G(z) = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta_{\alpha_3}} \langle V_{-\gamma}(z) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(z_3) \rangle \quad (4.51)$$

Par 4.42, on a son expression :

$$\begin{aligned} G(z) &= B(-\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) |z|^{\gamma\alpha_1} |z-1|^{\gamma\alpha_2} \gamma^{-1} \Gamma(s-1, \mu) \\ &\quad \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{C}} \frac{|x-z|^{\gamma^2}}{|x|^{\gamma\alpha_1} |x-1|^{\gamma\alpha_2}} \hat{g}(x)^{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma}{4} \sum_{i=1}^3 \alpha_i} M_{\gamma}(d^2x)^{-s}\right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

L'équation BPZ d'ordre (3, 1) s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2}{\gamma^2} \frac{\partial^3}{\partial z^3} + \sum_l \frac{2}{z - z_l} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z_l} + \sum_l \frac{2\Delta_l}{(z - z_l)^2} \frac{\partial}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \sum_l \frac{\Delta}{(z - z_l)^2} \frac{\partial}{\partial z_l} + \sum_l \frac{2\Delta\Delta_l}{(z - z_l)^3} \right\} \langle V_{-\gamma}(z) \prod_{l=1}^N V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

Pour simplifier l'expression, on a noté $\Delta = \Delta_{-\gamma} = -1 - \frac{\gamma^2}{2}$ et $\Delta_l = \Delta_{\alpha_l}$.

On injecte l'expression 4.50 dans l'équation et on évalue en $(z_1, z_2, z_3) = (0, 1, \infty)$. Pour illustrer les idées, on montre le calcul pour le terme

$$\sum_{l=1}^3 \frac{\Delta}{(z - z_l)^2} \frac{\partial}{\partial z_l} \langle V_{-\gamma}(z) \prod_{l=1}^3 V_{\alpha_l}(z_l) \rangle$$

Pour cela, on introduit les notations

$$F(z, \mathbf{z}) := \langle V_{-\gamma}(z) \prod_{l=1}^3 V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = A(z, \mathbf{z}) G \left(\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \right) \quad (4.54)$$

où

$$A(z, \mathbf{z}) = |z_3 - z|^{-4\Delta} |z_1 - z_2|^{2(\Delta_{12} - \Delta)} |z_1 - z_3|^{2(\Delta_{13} + \Delta)} |z_2 - z_3|^{2(\Delta_{23} + \Delta)} \quad (4.55)$$

et on calcule par exemple

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_1} F &= A(z, \mathbf{z}) \left(\frac{\Delta_{12} - \Delta}{z_1 - z_2} + \frac{\Delta_{13} + \Delta}{z_1 - z_3} \right) G \left(\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \right) + \\ &A(z, \mathbf{z}) G' \left(\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \right) \left(-\frac{z_2 - z_3}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} + \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)^2} \right) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta_3} \frac{\partial}{\partial z_1} F(z, 0, 1, z_3) = -(\Delta_{12} - \Delta)G(z) + (z - 1)\partial_z G(z)$$

De même, on a

$$\lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta_3} \frac{\partial}{\partial z_2} F(z, 0, 1, z_3) = (\Delta_{12} - \Delta)G(z) - z\partial_z G(z)$$

$$\lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta_3} \frac{\partial}{\partial z_3} F(z, 0, 1, z_3) = 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} &\lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta_3} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta}{(z - z_l)^2} \frac{\partial}{\partial z_l} F(z, 0, 1, z_3) \\ &= \Delta(\Delta_{12} - \Delta) \left(\frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{z^2} \right) G(z) - \Delta \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{1}{z(z - 1)} \right) \partial_z G(z) \end{aligned}$$

On mène le même type de calcul pour les termes dans l'équation 4.53, et on obtient une équation différentielle ordinaire de G :

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{2}{\gamma^2} \partial_z^3 - 2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z - 1} \right) \partial_z^2 + \left(\frac{2\Delta_1 - \Delta}{z^2} + \frac{2\Delta_2 - \Delta}{(z - 1)^2} + \frac{2\Delta_{12} - 3\Delta - 2}{z(z - 1)} \right) \partial_z \right. \\ &\left. + \Delta(\Delta_{12} - \Delta) \left(\frac{1}{(z - 1)^2} - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{2\Delta\Delta_1}{z^3} + \frac{2\Delta\Delta_2}{(z - 1)^3} \right\} G(z) = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

On remplace G par

$$G(z) = |z|^{\gamma\alpha_1} |z - 1|^{\gamma\alpha_2} \mathcal{T}(z) \quad (4.57)$$

\mathcal{T} a pour l'expression :

$$\mathcal{T}(z) = B(-\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \gamma^{-1} \Gamma(s - 1, \mu) \mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{C}} \frac{|x - z|^{\gamma^2}}{|x|^{\gamma\alpha_1} |x - 1|^{\gamma\alpha_2}} \hat{g}(x) \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma}{4} \sum_{i=1}^3 \alpha_i M_\gamma(d^2 x) \right)^{-s} \right] \quad (4.58)$$

On obtient que \mathcal{T} est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{2}{\gamma^2} z^2 (z-1)^2 \partial_z^3 + \left(\left(\frac{3\alpha_1}{\gamma} - 2 \right) z (z-1)^2 + \left(\frac{3\alpha_2}{\gamma} - 2 \right) z^2 (z-1) \right) \partial_z^2 \right. \\
& + \left(\left(\frac{3}{2} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - \frac{\alpha_3^2}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \left(4\gamma + \frac{3}{\gamma} \right) + \alpha_3 \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma} \right) + \frac{5\gamma^2}{2} + 3 \right) z^2 \right. \\
& \quad - \left(\frac{5\alpha_1^2}{2} + 3\alpha_1\alpha_2 + \frac{\alpha_2^2}{2} - \frac{\alpha_3^2}{2} - \alpha_1 \left(\frac{11\gamma}{2} + \frac{4}{\gamma} \right) - \alpha_2 \left(\frac{5\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma} \right) + \alpha_3 \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma} \right) + \frac{5\gamma^2}{2} + 3 \right) z \\
& \quad \left. \left. + \alpha_1^2 - \alpha_1 \left(\frac{3\gamma}{2} + \frac{1}{\gamma} \right) + \frac{\gamma^2}{2} + 1 \right) \partial_z \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \gamma) (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 2\gamma - \frac{4}{\gamma}) \left(((\alpha_1 + \alpha_2)\gamma - \gamma^2 - 2)z + \frac{\gamma^2}{2} - \alpha_1\gamma + 1 \right) \right\} \mathcal{T}(z) = 0
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Si on prend la dérivée $\partial_{\bar{z}\bar{z}}$, on a \mathcal{T} solution réelle d'une EDP avec un opérateur de la forme $\frac{2}{\gamma^2} z^2 (z-1)^2 \Delta^3 + \dots$ suivi par des opérateurs de degré strictement inférieur à Δ^2 . C'est un opérateur différentiel elliptique et avec les coefficients \mathcal{C}^∞ . Alors l'opérateur est hypoelliptique analytique (voir par exemple [30]). Ainsi, \mathcal{T} est analytique réel dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Pour vérifier que deux solutions coïncident, il suffit de montrer qu'elles coïncident sur un ouvert dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ On peut écrire \mathcal{T} sous la forme d'une série au voisinage de $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \tilde{a}_{m,n} \left(x - \frac{1}{2}\right)^m y^n \tag{4.60}$$

avec les $\tilde{a}_{m,n}$ réels. En écrivant $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, on a

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} \left(z - \frac{1}{2}\right)^m \left(\bar{z} - \frac{1}{2}\right)^n \tag{4.61}$$

avec $a_{m,n} \in \mathbb{C}$ satisfaisant $a_{n,m} = \overline{a_{m,n}}$.

L'équation 4.59 donne une relation de récurrence entre les coefficients $a_{m,n}$. Plus précisément, elle donne $a_{3,n}$ en fonction des $a_{i,n}$, $i = 0, 1, 2$, et pour $m \geq 0$ elle donne $a_{m+4,n}$ en fonction des $a_{m+i,n}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Par conséquent, les solutions au voisinage de $\frac{1}{2}$ sont caractérisées par les coefficients $(a_{m,n})_{0 \leq m \leq 2, 0 \leq n \leq m}$, qui est un espace vectoriel de dimension 9 (les $a_{m,m}$ sont réels donc de dimension 1, les restes sont de dimension 2). L'espace des solutions réelles dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ est donc de dimension inférieure à 9.

Remarque. Le cas de l'équation BPZ d'ordre (2, 1) peut être traité par le même raisonnement qu'au dessus pour montre que l'espace des solutions pour BPZ est de dimension inférieure à 4, ce qui est cohérent avec la conclusion dans [19].

4.6 Résolution des équations BPZ d'ordre (3,1) pour les corrélations à 4 points

Maintenant on cherche les solutions de l'équation 4.59. Les solutions de ce type d'équations sont données par les intégrales de Feigin-Fuchs ou intégrales de Coulomb et sont discutées dans [10, 11]. Pour avoir les même notations que celles de [10, 11], on pose

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\gamma}{4} (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 1, & b &= \frac{\gamma}{4} (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) - 1 \\
c &= -\frac{\gamma}{4} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\gamma^2}{2} + 1, & g &= -\frac{\gamma^2}{2}
\end{aligned} \tag{4.62}$$

L'équation 4.59 peut se récrire sous la forme suivante

$$z^2(z-1)^2\partial_z^3\mathcal{T}(z) + (K_1z + K_2(z-1))z(z-1)\partial_z^2\mathcal{T}(z) + (M_1z^2 + M_2(z-1)^2 + M_3z(z-1))\partial_z\mathcal{T}(z) + (N_1z + N_2(z-1))\mathcal{T}(z) = 0 \quad (4.63)$$

avec

$$\begin{aligned} K_1 &= -(3b + 3c + g), & K_2 &= -(3a + 3c + g) \\ M_1 &= (b + c)(2b + 2c + g + 1), & M_2 &= (a + c)(2a + 2c + g + 1) \\ M_3 &= (b + c)(2a + 2c + g + 1) + (a + c)(2b + 2c + g + 1) \\ &\quad + (c - 1)(a + b + c) + (3c + g)(a + b + c + g + 1) \\ N_1 &= -c(2b + 2c + g + 1)(2a + 2b + 2c + g + 2) \\ N_2 &= -c(2a + 2c + g + 1)(2a + 2b + 2c + g + 2) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Proposition 21. *On suppose que $-\gamma, \alpha_i (i = 1, 2, 3)$ vérifient les bornes de Seiberg 3.4 avec $0 < \gamma < 2$, on impose aussi :*

$$a, b, c > -1 \quad \frac{g}{2} > -\min\left(\frac{1}{2}, a + 1, b + 1, c + 1\right) \quad a + b + c + \frac{g}{2} < -1$$

Toutes ces hypothèse seront appelées (H). On remarque que (H) est équivalent à

$$\begin{aligned} \forall i, \alpha_i < \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma} \quad \sum_i \alpha_i < 2\gamma + \frac{4}{\gamma} \quad 0 < \gamma < \sqrt{2} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 > \gamma \end{aligned}$$

De plus, sous (H), on a nécessairement $c > 0$. L'espace des solutions réelles dans $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$ de l'équation 4.63 est un espace vectoriel de dimension inférieure à 9. Si on suppose de plus $\alpha_1 \neq \frac{2}{\gamma}$, alors toutes les solutions peuvent s'écrire en une combinaison linéaire des

$$(|I_i|^2(z))_{i=1,2,3}, (Re(I_i(z)\overline{I_j(z)}))_{1 \leq i < j \leq 3}, (Im(I_i(z)\overline{I_j(z)}))_{1 \leq i < j \leq 3} \quad (4.65)$$

avec I_1, I_2, I_3 trois fonctions holomorphes sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$ définies par

$$I_1(a, b, c; g; z) = \int_1^\infty dt_1 \int_1^\infty dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c (t_1 - t_2)^g \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned} I_2(a, b, c; g; z) &= \int_1^\infty dt_1 \int_0^z dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c (t_1 - t_2)^g \\ &= z^{1+a+c} \int_1^\infty dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (zt_2 - 1)^b (t_2 - 1)^c (t_1 - zt_2)^g \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} I_3(a, b, c; g; z) &= \int_0^z dt_1 \int_0^z dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c (t_1 - t_2)^g \\ &= z^{2+2a+2c+g} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (zt_1 - 1)^b (t_1 - 1)^c t_2^a (zt_2 - 1)^b (t_2 - 1)^c (t_1 - t_2)^g \end{aligned} \quad (4.68)$$

On interprète ces intégrales par les intégrales de chemin illustrées dans la figure 3. De plus z^A est considéré comme $e^{A \ln z}$, holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0[$, les phases sont prises dans $] -\pi, \pi[$.

Remarque. Ces intégrales sont absolument convergentes sous (H) et elles vérifient les conditions du théorème de Fubini.

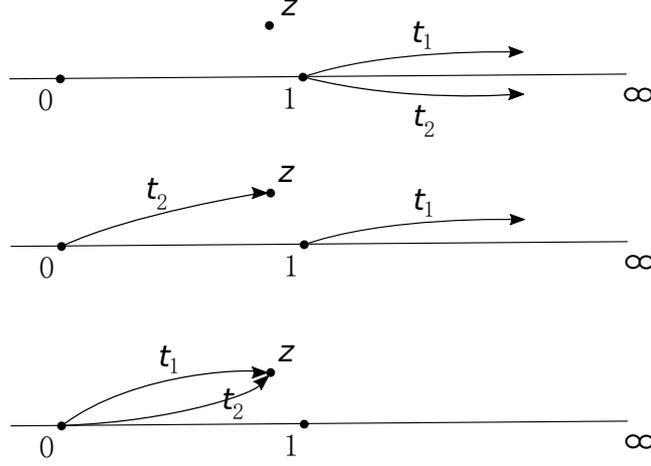


FIGURE 3 – chemin des intégrales I_1, I_2, I_3

Preuve. On a déjà montré l'espace des solutions réelles est de dimension inférieure à 9. Il reste à vérifier que I_1, I_2, I_3 résolvent l'équation 4.63 et qu'elles sont linéairement indépendantes. On étudie l'intégrale suivante :

$$I(a, b, c|d, e, f; g; z) := \int_{\mathcal{C}_1} dt_1 \int_{\mathcal{C}_2} dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^d (t_2 - 1)^e (t_2 - z)^f (t_1 - t_2)^g \quad (4.69)$$

où $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ peuvent être les chemins $1 \rightarrow \infty$ ou $0 \rightarrow z$. On remarque que les bords des $\mathcal{C}_i (i = 1, 2)$ ne contribuent pas lorsque on fait une intégration par partie. Les relations suivantes sont faciles à obtenir :

$$I(a, b, c + 1|d, e, c; g - 1; z) - I(a, b, c|d, e, c + 1; g - 1; z) = I(a, b, c|d, e, c; g; z) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} I(a, b, c + 1|d, e, c - 1; g - 1; z) - I(a, b, c - 1|d, e, c + 1; g - 1; z) \\ = I(a, b, c|d, e, c - 1; g; z) + I(a, b, c - 1|d, e, c; g; z) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} zI(a, b, c|d, e, f; g; z) &= I(a + 1, b, c|d, e, f; g; z) - I(a, b, c + 1|d, e, f; g; z) \\ &= I(a, b, c|d + 1, e, f; g; z) - I(a, b, c|d, e, f + 1; g; z) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (z - 1)I(a, b, c|d, e, f; g; z) &= I(a, b + 1, c|d, e, f; g; z) - I(a, b, c + 1|d, e, f; g; z) \\ &= I(a, b, c|d, e + 1, f; g; z) - I(a, b, c|d, e, f + 1; g; z) \end{aligned} \quad (4)$$

et par intégration par partie, on a les deux relations qui restent :

$$\begin{aligned} aI(a - 1, b, c|d, e, f; g; z) + bI(a, b - 1, c|d, e, f; g; z) \\ + cI(a, b, c - 1|d, e, f; g; z) + gI(a, b, c|d, e, f; g - 1; z) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} dI(a, b, c|d - 1, e, f; g; z) + eI(a, b, c|d, e - 1, f; g; z) \\ + fI(a, b, c|d, e, f - 1; g; z) - gI(a, b, c|d, e, f; g - 1; z) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

A l'aide des relations (1)-(6), on montre que $I(z) = I(a, b, c|a, b, c; g; z)$ est solution de l'équation 4.63. Pour alléger l'expression, on note

$$\tilde{I}(a, b, c|d, e, f; g; z) = I(a, b, c|d, e, f; g; z) + I(d, e, f|a, b, c; g; z)$$

On calcule les dérivées de I :

$$\begin{aligned} I'(z) &= -c\tilde{I}(a, b, c-1|a, b, c; g; z) \\ I''(z) &= c(c-1)\tilde{I}(a, b, c-2|a, b, c; g; z) + c^2\tilde{I}(a, b, c-1|a, b, c-1; g; z) \\ I'''(z) &= -c(c-1)(c-2)\tilde{I}(a, b, c-3|a, b, c; g; z) - 3c^2(c-1)\tilde{I}(a, b, c-2|a, b, c-1; g; z) \end{aligned}$$

Par (5) et (6),

$$\begin{aligned} (c-2)I(a, b, c-3|a, b, c; g; z) &= -aI(a-1, b, c-2|a, b, c; g; z) - bI(a, b-1, c-2|a, b, c; g; z) \\ &\quad - gI(a, b, c-2|a, b, c; g-1; z) \\ (c-2)I(a, b, c|a, b, c-3; g; z) &= -aI(a, b, c|a, b, c-2; g; z) - bI(a, b, c|a, b-1, c-2; g; z) \\ &\quad + gI(a, b, c|a, b, c-2; g-1; z) \end{aligned}$$

En sommant ces deux dernières équations, on obtient

$$\begin{aligned} -c(c-1)(c-2)\tilde{I}(a, b, c-3|a, b, c; g; z) &\stackrel{(2)}{=} c(c-1)\left(a\tilde{I}(a-1, b, c-2|a, b, c; g; z) \right. \\ &\quad \left. + b\tilde{I}(a, b-1, c-2|a, b, c; g; z) - g\tilde{I}(a, b, c-1|a, b, c-2; g; z)\right) \end{aligned}$$

Le même type de calcul (noté $(*)$) apparaissent plusieurs fois dans la preuve et on ne détaille plus dans la suite. Par le calcul précédent,

$$\begin{aligned} I'''(z) &= c(c-1)\left(a\tilde{I}(a-1, b, c-2|a, b, c; g; z) + b\tilde{I}(a, b-1, c-2|a, b, c; g; z) \right. \\ &\quad \left. - (3c+g)\tilde{I}(a, b, c-1|a, b, c-2; g; z)\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} c(c-1)\left(a\tilde{I}(a-1, b, c-2|a, b, c; g; z) + b\tilde{I}(a, b-1, c-2|a, b, c; g; z)\right) \\ &\quad + c(3c+g)\left(a\tilde{I}(a-1, b, c-1|a, b, c-1; g; z) + b\tilde{I}(a, b-1, c-1|a, b, c-1; g; z)\right) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &z^2(z-1)^2I'''(z) + (K_1z + K_2(z-1))z(z-1)I''(z) \\ &\stackrel{(3)(4)}{=} -z(z-1)^2\left(c(c-1)(g+2a+3c)\tilde{I}(a, b, c-2|a, b, c; g; z) \right. \\ &\quad + c(cg-ag+3c^2)\tilde{I}(a, b, c-1|a, b, c-1; g; z) + c(c-1)a\tilde{I}(a-1, b, c-1|a, b, c; g; z) \\ &\quad \left. + c(3c+g)a\tilde{I}(a-1, b, c|a, b, c-1; g; z)\right) - z^2(z-1)\left(c(c-1)(g+2b+3c)\tilde{I}(a, b, c-2|a, b, c; g; z) \right. \\ &\quad + c(cg-bg+3c^2)\tilde{I}(a, b, c-1|a, b, c-1; g; z) + c(c-1)b\tilde{I}(a, b-1, c-1|a, b, c; g; z) \\ &\quad \left. + c(3c+g)b\tilde{I}(a, b-1, c|a, b, c-1; g; z)\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} z(z-1)^2\left(ca(2a+2c+g+1)\tilde{I}(a-1, b, c-1|a, b, c; g; z) \right. \\ &\quad \left. + cb(2a+6c+2g)\tilde{I}(a, b-1, c-1|a, b, c; g; z)\right) \\ &\quad + z^2(z-1)\left(cb(2b+2c+g+1)\tilde{I}(a, b-1, c-1|a, b, c; g; z) \right. \\ &\quad \left. + cb(2b+6c+2g)\tilde{I}(a-1, b, c-1|a, b, c; g; z)\right) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} &z^2(z-1)^2I'''(z) + (K_1z + K_2(z-1))z(z-1)I''(z) + (M_1z^2 + M_2(z-1)^2 + M_3z(z-1))I'(z) \\ &\stackrel{(3)(4)(*)}{=} (z-1)^2cb(2a+2c+g+1)\tilde{I}(a, b-1, c|a, b, c; g; z) + z^2ca(2b+2c+g+1)\tilde{I}(a-1, b, c|a, b, c; g; z) \\ &\quad + z(z-1)c\left(a(2a+2c+g+1)\tilde{I}(a-1, b, c|a, b, c; g; z) + b(2b+2c+g+1)\tilde{I}(a, b-1, c|a, b, c; g; z)\right) \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant à nouveau (3)(4) et (*) on montre que

$$z^2(z-1)^2 I'''(z) + (K_1 z + K_2(z-1))z(z-1)I''(z) + (M_1 z^2 + M_2(z-1)^2 + M_3 z(z-1))I'(z) + (N_1 z + N_2(z-1))I(z) = 0$$

Vu les comportements près de $z = 0$, comme $\alpha_1 < \frac{\gamma}{2} + \frac{2}{\gamma}$ et $\alpha_1 \neq \frac{2}{\gamma}$, les exposants de z des I_i sont différents et elles sont trois solutions indépendantes. Ainsi,

$$(|I_i|^2(z))_{i=1,2,3}, (Re(I_i(z)\overline{I_j(z)}))_{1 \leq i < j \leq 3}, (Im(I_i(z)\overline{I_j(z)}))_{1 \leq i < j \leq 3}$$

forment une famille de solutions analytiques réelles sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$, indépendantes par une étude de l'asymptotique au voisinage de $(z, \bar{z}) = 0$. \square

Par le même raisonnement, on prouve le résultat suivant :

Proposition 22.

$$\mathcal{I}(a, b, c; g; z) := \int_{\mathbb{C}} d^2 t_1 \int_{\mathbb{C}} d^2 t_2 |t_1|^{2a} |t_1 - 1|^{2b} |t_1 - z|^{2c} |t_2|^{2a} |t_2 - 1|^{2b} |t_2 - z|^{2c} |t_1 - t_2|^{2g} \quad (4.70)$$

résout l'équation 4.63 pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, en supposant (H).

Preuve. En effet, toutes les relations de $I(a, b, c|d, e, f; g; z)$ restent valides pour $\mathcal{I}(a, b, c|d, e, f; g; z)$, définie par

$$\mathcal{I}(a, b, c|d, e, f; g; z) := \int_{\mathbb{C}} d^2 t_1 \int_{\mathbb{C}} d^2 t_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^d (t_2 - 1)^e (t_2 - z)^f (t_1 - t_2)^g \quad (4.71)$$

$$\bar{t}_1^{a_0} (\bar{t}_1 - 1)^{b_0} (\bar{t}_1 - \bar{z})^{c_0} \bar{t}_2^{d_0} (\bar{t}_2 - 1)^{e_0} (\bar{t}_2 - \bar{z})^{f_0} (\bar{t}_1 - \bar{t}_2)^{g_0}$$

avec les constantes $a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0, g_0$ fixées préalablement. \square

4.7 Problème de monodromie

On travaille avec l'hypothèse (H) déclarée dans la proposition 21, en ajoutant la condition supplémentaire :

$$\alpha_1 \notin (\gamma - \frac{2}{\gamma}\mathbb{N}) \cup (\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\mathbb{N}) \cup (\frac{2}{\gamma} - \frac{2}{\gamma}\mathbb{N})$$

On note cette nouvelle hypothèse (H'). Sous (H'), on a

$$1 + a + c, 2 + 2a + 2c + g, 1 + a + c + g \notin \mathbb{Z}$$

Le générateur du groupe de monodromie correspondant à la singularité en 0 des $I_i (i = 1, 2, 3)$ est noté g_0 , qui est une matrice 3×3 ici. Il correspond à un prolongement analytique en z suivant le contour illustré dans la figure 4.

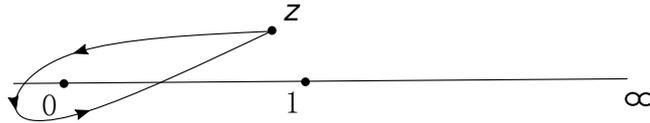


FIGURE 4 – contour de prolongement

On a

$$g_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi(1+a+c)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2\pi(2+2a+2c+g)} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

et I_l devient $(g_0)_{l,l}I_l$ après le prolongement. Par les discussions dans la sous-section précédente, \mathcal{T} peut s'écrire en une combinaison linéaire des $(I_l(z)\overline{I_j(z)})_{1 \leq l, j \leq 3}$, qui génère la base des solutions dans la proposition 21. Plus précisément, pour $z \in \mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$,

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{l,j=1}^3 X_{l,j} I_l(z) \overline{I_j(z)} \quad (4.73)$$

avec $(X_{l,l})_{l=1,2,3} \in \mathbb{R}^3$ et $(X_{l,j})_{l \neq j} \in \mathbb{C}^6$ tels que $X_{l,j} = \overline{X_{j,l}}$. D'autre part, on a vu que \mathcal{T} est analytique réelle dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, donc il est invariant par ce prolongement en z . Ainsi on a

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{l,j=1}^3 X_{l,j} I_l(z) \overline{I_j(z)} = \sum_{l,j=1}^3 X_{l,j} (g_0)_{l,l} \overline{(g_0)_{j,j}} I_l(z) \overline{I_j(z)}$$

en simplifiant l'équation

$$\sum_{l \neq j} X_{l,j} I_l(z) \overline{I_j(z)} = \sum_{l \neq j} X_{l,j} (g_0)_{l,l} \overline{(g_0)_{j,j}} I_l(z) \overline{I_j(z)}$$

On étudie le comportement proche de $(z, \bar{z}) = 0$ de l'expression à gauche et à droite, et on peut montrer progressivement que les $X_{l,j} = 0$ pour $l \neq j$, sous (H') . Par exemple, lorsque $\alpha_1 < \frac{2}{\gamma}$ (on suppose toujours (H')), on a $0 < 1 + a + c < 2 + 2a + 2c + g$, l'équivalent de gauche est

$$cste_{1,2} X_{1,2} \bar{z}^{1+a+c} + \overline{cste_{1,2} X_{1,2}} z^{1+a+c}$$

L'équivalent de droite est

$$e^{-i2\pi(1+a+c)} cste_{1,2} X_{1,2} \bar{z}^{1+a+c} + e^{i2\pi(1+a+c)} \overline{cste_{1,2} X_{1,2}} z^{1+a+c}$$

On obtient $X_{1,2} = 0$ comme $1 + a + c \notin \mathbb{Z}$. On élimine les termes de $X_{1,2}$ et $X_{2,1}$ dans 4.7, et on peut continuer le même raisonnement. Les autres valeurs de α_1 peuvent être traitées de façon similaire. Ainsi on écrit pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, \infty[)$ (par prolongement analytique)

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{j=1}^3 X_j |I_j(z)|^2 \quad (4.74)$$

avec $X_j \in \mathbb{R}$.

On peut repartir de la proposition 21 en introduisant les intégrales J_1, J_2, J_3 qui ont le même intégrant $t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c (t_1 - t_2)^g$ que les I_1, I_2, I_3 , avec les chemins d'intégration illustrés dans la figure 5. On peut écrire

$$J_1(a, b, c; g; z) = \int_0^{-\infty} dt_1 \int_0^{-\infty} dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c (t_1 - t_2)^g \quad (4.75)$$

$$J_2(a, b, c; g; z) = (z - 1)^{1+a+c} \int_0^{-\infty} dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (zt_2 - 1)^b (t_2 - 1)^c (t_1 - zt_2)^g \quad (4.76)$$

$$J_3(a, b, c; g; z) = (z - 1)^{2+2a+2c+g} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (zt_1 - 1)^b (t_1 - 1)^c t_2^a (zt_2 - 1)^b (t_2 - 1)^c (t_1 - t_2)^g \quad (4.77)$$

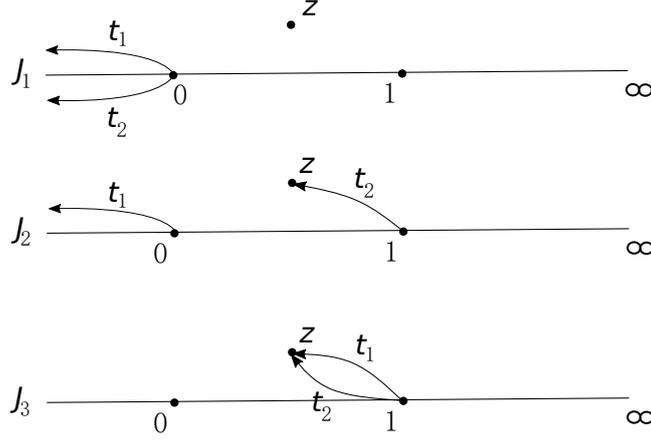


FIGURE 5 – chemin des intégrales J_1, J_2, J_3

La preuve reste valide pour montrer que J_1, J_2, J_3 forment une base des solutions holomorphes dans $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$. On peut donc exprimer I_i en des J_j (la preuve consiste à jouer avec les chemins d'intégration et elle se trouve dans [10]) :

$$I_i(z) = \sum_{j=1}^3 a_{i,j} J_j(z) \quad (4.78)$$

avec

$$a = \begin{pmatrix} \frac{s(a)s(a+g/2)}{s(b+c)s(b+c+g/2)} & \frac{s(a)s(c)}{s(b+c)s(b+c+g)} & \frac{s(c)s(c+g/2)}{s(b+c+g/2)s(b+c+g)} \\ -\frac{s(a+b+c+g/2)s(a+g/2)}{s(b+c)s(b+c+g/2)} 2c(g/2) & \frac{s(a+b+c+g/2)s(c)}{s(b+c)s(b+c+g/2)} - \frac{s(b+g/2)s(a)}{s(b+c+g/2)s(b+c+g)} & \frac{s(b+g/2)s(c+g/2)}{s(b+c+g/2)s(b+c+g)} 2c(g/2) \\ \frac{s(a+b+c+g/2)s(a+b+c+g)}{s(b+c)s(b+c+g/2)} & \frac{s(a+b+c+g)s(b)}{s(b+c)s(b+c+g)} & \frac{s(b)s(b+g/2)}{s(b+c+g/2)s(b+c+g)} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Ici on note $s(x) = \sin(\pi x)$, $c(x) = \cos(\pi x)$. On a

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 a_{i,j} a_{i,k} X_i J_j(z) \overline{J_k(z)} \quad (4.80)$$

Par l'étude du problème de monodromie autour de $z = 1$, on déduit que pour $j \neq k$,

$$\sum_{i=1}^3 a_{i,j} a_{i,k} X_i = 0 \quad (4.81)$$

et on résout

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{X_3} &= \frac{a_{3,3} \tilde{a}_{3,1}}{a_{1,3} \tilde{a}_{3,3}} = \frac{s(a+b+c+g)s(a+b+c+g/2)s(b)s(b+g/2)s(a+c+g)}{s(a)s(a+g/2)s(c)s(c+g/2)s(a+c)} \\ \frac{X_2}{X_3} &= \frac{a_{3,3} \tilde{a}_{3,2}}{a_{2,3} \tilde{a}_{3,3}} = \frac{s(a+b+c+g)s(a+c+g/2)s(b)}{s(c+g/2)s(a+g/2)s(a+c)2c(g/2)} \end{aligned} \quad (4.82)$$

avec $(\tilde{a}_{i,j})_{i,j} = a^{-1}$.

En résumé, on connaît $\mathcal{T}(z) = \sum_{j=1}^3 X_j |I_j(z)|^2$ à constante multiplicative près pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, \infty[)$, sous la condition (H') . L'égalité reste valable sous l'hypothèse plus faible (H) , car les deux côtés de l'égalité sont analytique en α_i .

Remarque. Dans cette sous section, on a en fait montré que toute solution réelle de l'équation 4.63 (définie sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$) s'écrit en combinaison linéaire des $|I_j(z)|^2$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, \infty[)$. De plus les rapports entre les coefficients sont données par 4.82. Ceci montre que l'espace des solutions réelles est de dimension 1.

4.8 Forme intégrale des fonctions de corrélation

On donne deux intégrales importantes pour la suite. La première est l'intégrale de Selberg, introduite dans [28] comme une généralisation des intégrales de Beta. Une preuve simple de cette formule se trouve dans [1]. Voir aussi [16] pour les diverses applications de cette intégrale.

Proposition 23 (Selberg). *Sous l'hypothèse*

$$\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b) > -1, \frac{\operatorname{Re}(g)}{2} > -\min\left(\frac{1}{n}, \frac{\operatorname{Re}(a)}{n-1} + 1, \frac{\operatorname{Re}(b)}{n-1} + 1\right)$$

l'intégrale suivante converge

$$\begin{aligned} S_n(a, b, g) &:= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^n t_i^a (1-t_i)^b \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^g dt_1 \cdots dt_n \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1+a+jg/2)\Gamma(1+b+jg/2)\Gamma(1+(j+1)g/2)}{\Gamma(2+a+b+(n+j-1)g/2)\Gamma(1+g/2)} \end{aligned} \quad (4.83)$$

La deuxième est l'intégrale de Selberg complexe, voir [2] ou [15] pour une preuve.

Proposition 24. *Sous l'hypothèse*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b) > -1, \frac{\operatorname{Re}(g)}{2} > -\min\left(\frac{1}{n}, \frac{\operatorname{Re}(a)}{n-1} + 1, \frac{\operatorname{Re}(b)}{n-1} + 1\right) \\ \operatorname{Re}(a+b+\frac{(n-1)g}{2}) < -1, \operatorname{Re}(a+b+(n-1)g) < -1 \end{cases}$$

l'intégrale suivante converge

$$\begin{aligned} A_n(a, b, g) &:= \int_{\mathbb{C}} \cdots \int_{\mathbb{C}} \prod_{i=1}^n |t_i|^{2a} |1-t_i|^{2b} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |t_i - t_j|^{2g} d^2 t_1 \cdots d^2 t_n \\ &= S_n^2(a, b, g) \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{s(a+jg/2)s(b+jg/2)s((j+1)g/2)}{s(a+b+(n+j-1)g/2)s(g/2)} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Au lieu d'exprimer \mathcal{T} en des I_i , on utilise les fonctions normalisées :

Proposition 25. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ trois fonctions holomorphes en z sur $\mathbb{C} \setminus (]-\infty, 0] \cup [1, \infty[)$ définies par

$$\mathcal{F}_i(a, b, c; g; z) = \frac{1}{N_i} I_i(a, b, c; g; z) = z^{\rho_i} (1 + O_{z \rightarrow 0}(z)) \quad (4.85)$$

avec

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = 1 + a + c, \rho_3 = 2 + 2a + 2c + g$$

et les constantes de normalisations s'expriment

$$\begin{aligned} N_1 &= c(g/2)e^{i\pi g/2} \frac{\Gamma(g)\Gamma(-1-a-b-c-g)\Gamma(-1-a-b-c-g/2)\Gamma(1+b)\Gamma(1+b+g/2)}{\Gamma(g/2)\Gamma(-a-c)\Gamma(-a-c-g/2)} \\ N_2 &= \frac{\Gamma(-1-a-b-c-g)\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)\Gamma(1+c)}{\Gamma(-a-c-g)\Gamma(2+a+c)} \\ N_3 &= c(g/2)e^{i\pi g/2} \frac{\Gamma(g)\Gamma(1+a)\Gamma(1+a+g/2)\Gamma(1+c)\Gamma(1+c+g/2)}{\Gamma(g/2)\Gamma(2+a+c+g/2)\Gamma(2+a+c+g)} \end{aligned} \quad (4.86)$$

Remarque. Les \mathcal{F}_i correspondent aux conformal blocks dans la littérature physique.

Preuve. On montre le calcul de N_3 , les calculs pour N_1, N_2 sont similaires. Par définition, sous (\star) ,

$$\begin{aligned} N_3 &= \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (1-t_1)^c t_2^a (1-t_2)^c (t_1-t_2)^g = \frac{1+e^{i\pi g}}{2} S_2(a, c, g) \\ &= c(g/2) e^{i\pi g/2} \frac{\Gamma(g)\Gamma(1+a)\Gamma(1+a+g/2)\Gamma(1+c)\Gamma(1+c+g/2)}{\Gamma(g/2)\Gamma(2+a+c+g/2)\Gamma(2+a+c+g)} \end{aligned}$$

Or l'intégrale de Selberg impose des contraintes sur g , ainsi sur γ . Mais on travaille avec un $\gamma \in]0, 2[$ fixe et on ne veut pas des contraintes de plus. Pour cela, on utilise un prolongement analytique en a, b, c et g pour montrer l'identité suivant sous l'hypothèse (H) :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 t_1^a (1-t_1)^c t_2^a (1-t_2)^c (t_1-t_2)^g \\ &= 2c(g/2) e^{i\pi g/2} \frac{\Gamma(g)\Gamma(1+a)\Gamma(1+a+g/2)\Gamma(1+c)\Gamma(1+c+g/2)}{\Gamma(g/2)\Gamma(2+a+c+g/2)\Gamma(2+a+c+g)} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Ce qui finit la preuve. □

Par 4.44 et 4.58, $\mathcal{T}(0) = C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3)$. En tendant $z \rightarrow 0$, on obtient facilement :

Théorème 9. *Sous la condition (H) ,*

$$\mathcal{T}(z) = \sum_{j=1}^3 \tilde{X}_j |\mathcal{F}_j(z)|^2 \quad (4.88)$$

pour $z \in \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup [1, \infty[)$. Les \tilde{X}_j sont donnés par

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 / C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3) &= 1 \\ \tilde{X}_2 / C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{|N_2|^2}{|N_1|^2} \frac{s(a+c+g/2)s(a)s(c)}{2c(g/2)s(a+b+c+g/2)s(a+c+g)s(b+g/2)} \\ \tilde{X}_3 / C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3) &= \frac{|N_3|^2}{|N_1|^2} \frac{s(a)s(a+g/2)s(c)s(c+g/2)s(a+c)}{s(a+b+c+g)s(a+b+c+g/2)s(a+c+g)s(b)s(b+g/2)} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Remarque. Cette équation correspond à l'expansion du produit des opérateurs (OPE) dans l'approche de conformal bootstrap.

Par la remarque importante à la fin de la sous section précédente, on déduit la relation entre \mathcal{T} et \mathcal{I} :

Théorème 10. *On suppose (H) et*

$$1 < \gamma < \sqrt{2}$$

On a pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$,

$$\mathcal{T}(z) = \frac{C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3)}{A_2(a+c, b, g)} \mathcal{I}(a, b, c; g; z) \quad (4.90)$$

où on rappelle la définition 22 de \mathcal{I} et les expressions 4.62 pour a, b, c et g :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(a, b, c; g; z) &= \int_{\mathbb{C}} d^2 t_1 \int_{\mathbb{C}} d^2 t_2 |t_1|^{2a} |t_1 - 1|^{2b} |t_1 - z|^{2c} |t_2|^{2a} |t_2 - 1|^{2b} |t_2 - z|^{2c} |t_1 - t_2|^{2g} \\ a &= \frac{\gamma}{4}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 1, & b &= \frac{\gamma}{4}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) - 1 \\ c &= -\frac{\gamma}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\gamma^2}{2} + 1, & g &= -\frac{\gamma^2}{2} \end{aligned}$$

En conséquence, on peut exprimer les fonctions de corrélation à 4 points avec un champ dégénéré de poids $-\gamma$:

$$\langle V_{-\gamma}(z) \prod_{l=1}^3 V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = |z_3 - z|^{-4\Delta-\gamma} |z_1 - z_2|^{2(\Delta_{12}-\Delta-\gamma)} |z_1 - z_3|^{2(\Delta_{13}+\Delta-\gamma)} |z_2 - z_3|^{2(\Delta_{23}+\Delta-\gamma)} \quad (4.91)$$

$$|\tilde{z}|^{\gamma\alpha_1} |\tilde{z} - 1|^{\gamma\alpha_2} \frac{C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3)}{A_2(a + c, b, g)} \mathcal{I}(a, b, c; g; \tilde{z})$$

$$\text{avec } \tilde{z} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}.$$

Remarque. Pour généraliser à tous les γ et α_i , il faut prolonger analytiquement \mathcal{I} et de montrer que cela reste solution réelle de l'équation 4.63. Pour α_i , cela est faisable, mais pour γ , on ne sait pas montrer directement que \mathcal{T} est analytique en γ .

En corollaire, on obtient une formule sur les GMC :

Corollaire 1.

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{C}} \frac{|x-z|^{\gamma^2}}{|x|^{\gamma\alpha_1}|x-1|^{\gamma\alpha_2}} \hat{g}(x)^{\frac{\gamma^2}{4}-\frac{\gamma}{4}\sum_{i=1}^3\alpha_i} M_{\gamma}(d^2x)\right)^{-s_3}\right] = \frac{C(\alpha_1 - \gamma, \alpha_2, \alpha_3)\mathcal{I}(a, b, c; g; z)}{B(-\gamma, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\gamma^{-1}\Gamma(s-1, \mu) A_2(a + c, b, g)} \quad (4.92)$$

avec $s_r = -\frac{r-1}{2} + \frac{\sum_i \alpha_i - 2Q}{\gamma}$ et on rappelle l'équation 4.43

$$B(\boldsymbol{\alpha}) = 4e^{-\frac{\ln 2 - \frac{1}{2}}{2}(\sum_{i=1}^N \alpha_i - 2Q)^2}$$

Jusqu'à ici on a vu la résolution pour l'équation BPZ d'ordre (3, 1), la même procédure (plus facile) s'applique à l'ordre (2, 1). On note

$$\mathbf{a} = \frac{\gamma}{4}(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\gamma^2}{8} - 1, \quad \mathbf{b} = \frac{\gamma}{4}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\gamma^2}{8} - 1, \quad \mathbf{c} = -\frac{\gamma}{4}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{3\gamma^2}{8} + 1 \quad (4.93)$$

Pour l'ordre 2, les lecteurs trouvent l'OPE dans [19] qui est l'équivalent du théorème 9 :

Théorème 11.

$$\mathcal{T}_{-\frac{\gamma}{2}}(z) = X_- |\mathcal{F}_-(z)|^2 + X_+ |\mathcal{F}_+(z)|^2 \quad (4.94)$$

avec

$$\mathcal{F}_-(z) = \frac{1}{N_-} \int_1^{\infty} dv v^{\mathbf{a}} (v-1)^{\mathbf{b}} (v-z)^{\mathbf{c}} = \frac{1}{N_-} {}_2F_1(-\mathbf{c}, -1 - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}, -\mathbf{a} - \mathbf{c}; z) \quad (4.95)$$

$$\mathcal{F}_+(z) = \frac{z^{1+\mathbf{a}+\mathbf{c}}}{N_+} \int_0^1 dv v^{\mathbf{a}} (1-v)^{\mathbf{c}} (1-vz)^{\mathbf{b}} = \frac{1}{N_+} {}_2F_1(-\mathbf{b}, 1 + \mathbf{a}, 2 + \mathbf{a} + \mathbf{c}; z)$$

${}_2F_1$ sont des fonctions hypergéométriques, et

$$N_- = \frac{\Gamma(-1 - \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c})\Gamma(1 + \mathbf{b})}{\Gamma(-\mathbf{a} - \mathbf{c})}, \quad N_+ = \frac{\Gamma(1 + \mathbf{a})\Gamma(1 + \mathbf{c})}{\Gamma(2 + \mathbf{a} + \mathbf{c})} \quad (4.96)$$

Les coefficients X_-, X_+ sont donnés par

$$X_- = C(\alpha_1 - \frac{\gamma}{2}, \alpha_2, \alpha_3), \quad X_+ = \frac{N_+^2}{N_-^2} \frac{s(\mathbf{a})s(\mathbf{c})}{s(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})s(\mathbf{b})} C(\alpha_1 - \frac{\gamma}{2}, \alpha_2, \alpha_3) \quad (4.97)$$

Ici pour l'ordre 2, $G_{-\frac{\gamma}{2}}(z) = \lim_{z_3 \rightarrow \infty} |z_3|^{4\Delta\alpha_3} \langle V_{-\frac{\gamma}{2}}(z) V_{\alpha_1}(0) V_{\alpha_2}(1) V_{\alpha_3}(z_3) \rangle$ et

$$G_{-\frac{\gamma}{2}}(z) = |z|^{\frac{\gamma\alpha_1}{2}} |z-1|^{\frac{\gamma\alpha_2}{2}} \mathcal{T}_{-\frac{\gamma}{2}}(z) \quad (4.98)$$

On a aussi l'équivalent du théorème 10, ce que les auteurs de [19] n'ont pas traité :

Théorème 12. *En supposant l'intégrale convergente,*

$$\begin{aligned} \langle V_{-\frac{\gamma}{2}}(z) \prod_{l=1}^3 V_{\alpha_l}(z_l) \rangle = & |z_3 - z|^{-4\Delta - \frac{\gamma}{2}} |z_1 - z_2|^{2(\Delta_{12} - \Delta - \frac{\gamma}{2})} |z_1 - z_3|^{2(\Delta_{13} + \Delta - \frac{\gamma}{2})} |z_2 - z_3|^{2(\Delta_{23} + \Delta - \frac{\gamma}{2})} \\ & |\tilde{z}|^{\frac{\gamma\alpha_1}{2}} |\tilde{z} - 1|^{\frac{\gamma\alpha_2}{2}} \frac{C(\alpha_1 - \frac{\gamma}{2}, \alpha_2, \alpha_3)}{A_1(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}, g)} \int_{\mathbb{C}} d^2t |t|^{2\mathbf{a}} |t - 1|^{2\mathbf{b}} |t - z|^{2\mathbf{c}} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Ainsi comme corollaire,

$$\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{C}} \frac{|x - z|^{\frac{\gamma^2}{2}}}{|x|^{\frac{\gamma\alpha_1}{2}} |x - 1|^{\frac{\gamma\alpha_2}{2}}} \hat{g}(x)^{\frac{\gamma^2}{8} - \frac{\gamma}{4} \sum_{i=1}^3 \alpha_i} M_{\gamma}(d^2x)^{-s_2}\right] = \frac{C(\alpha_1 - \gamma/2, \alpha_2, \alpha_3) \int_{\mathbb{C}} d^2t |t|^{2\mathbf{a}} |t - 1|^{2\mathbf{b}} |t - z|^{2\mathbf{c}}}{B(-\gamma/2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \gamma^{-1} \Gamma(s - 1, \mu) A_1(\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}, g)} \quad (4.100)$$

Notons qu'il existe des version duales des théorèmes dans cette sous-section, qui vient des équations BPZ duales. On pourra les démontrer en suivant les même procédures que celles de la section 4.

Concernant ce mémoire, il reste plusieurs problèmes ouverts à chercher : BPZ d'ordre $(3, 1)$ pour tout $\gamma \in]0, 2[$, BPZ d'ordre $(r, 1)$ avec r quelconque, l'OPE pour un champ dégénéré et $N \geq 3$ quelconque, l'OPE général, équations du mouvement pour LCFT ([32]), analyticité des fonctions de corrélations en \mathbf{z} et en γ , cas critique $\gamma = 2$, etc. Les lecteurs curieux peuvent lire [22] pour découvrir la théorie de Liouville en une revue.

A Algorithmes matlab pour vérifier la validité des équations BPZ d'ordre (r,1) (testés pour r allant de 1 à 8)

BSA_general.m

```

1 % Verification de l'equation BPZ cas general pour l'ordre r de 1 a rMax.
2 rMax = 8;
3
4 for rValue = 1:rMax
5     % r est l'ordre de l'equation
6     r = rValue;
7     dict = BSA_dict(r);
8     x = sym('x',[1 r]);
9     syms g;
10
11     % A enregistre toutes les partitions unique a permutation pres dans une
12     % matrice. Chaque ligne est une partition de r.
13     A = intpartitions(r);
14     keys = dict.keys();
15     lengthKey = length(keys);
16
17     % On utilise un dictionnaire Q pour enregistrer les polynomes devant
18     % les Q_q, ou l'indice q est represente par une partition (une liste
19     % des nombres entiers) Le but est de montrer qu'au final les polynomes
20     % devant chaque Q_q est nul.
21     Q = containers.Map(keys,zeros(1,lengthKey),'UniformValues',false);
22
23     % Le boucle est la somme sur les partitions et leurs permutations dans
24     % la definition de l'operateur differentiel D^(r)
25     for a = 1:length(A)
26         partition = cell2mat(A(a));
27         k = length(partition);
28         Perm = uniqueperms(partition);
29         for j = 1:size(Perm,1)
30             perm = Perm(j,:);
31             if k == 1
32                 coefficient = (g^2/4)^(r-1);
33             else
34                 cumulP = cumsum(perm);
35                 cumulP2 = r-cumulP;
36                 coefficient = (g^2/4)^(r-k)/(prod(cumulP(1:k-1))*prod(cumulP2(1:k-1)));
37             end
38             % Iterer pour calculer L_{-n_k}...L_{-n_1}
39             expr = containers.Map(keys,zeros(1,lengthKey),'UniformValues',false);
40             expr('0') = 1;
41             for i = 1:k
42                 expr = operatorL_general(expr,perm(k+1-i),r,dict);
43             end
44
45             for i = 1:lengthKey
46                 index = char(keys(i));
47                 Q(index) = simplify(Q(index)+coefficient*expr(index));
48             end
49         end
50     end
51
52     % Imprimer le resultat.
53     Qvalue = Q.values();
54     boolVerification = 1;

```

```

55     for i =1:lengthKey
56         if not(isequal(Qvalue(i),{0}))
57             disp('Erreur');
58             break;
59         end
60     end
61     if boolVerification ==1
62         disp(sprintf('Equation BPZ d'ordre %d est VRAI!',r))
63     end
64 end

```

BSA_dict.m

```

1  % Creer un dictionnaire qui donne une numerotation des partitions. Par
2  % exemple '0': [] et '1' : [1], '2':[1;1] etc
3
4  function dict = BSA_dict(r)
5      dict = containers.Map();
6      dict('0') = [];
7      index = 0;
8      for s = 1:r
9          A = intpartitions(s);
10         for a = 1:length(A)
11             index = index+1;
12             partition = cell2mat(A(a));
13             dict(num2str(index)) = partition;
14         end
15     end
16 end

```

findDict.m

```

1  % Trouver un element dans un dictionnaire.
2  % way = T : trouver ceux qui sont egaux a l'element
3  % way = F : trouver ceux qui ne sont pas egaux a l'element
4
5  function indices = findDict(dict,element,way)
6
7      elementSort = sort(element);
8      keys = dict.keys();
9      values = dict.values();
10     indices = [];
11     if way == 'T'
12         for i = 1:length(keys)
13             if isequal(values(i),{elementSort})
14                 indices = [indices, keys(i)];
15                 break
16             end
17         end
18         indices = char(indices);
19     end
20     if way == 'F'
21         for i = 1:length(keys)
22             if not(isequal(values(i),{elementSort}))
23                 indices = [indices, keys(i)];
24             end
25         end
26     end
27 end

```

operatorL_general.m

```

1 %operatorL represente  $L_{-n}$ . Q est une liste des polynomes.
2
3 function newQ = operatorL_general(Q,n,r,dict)
4     x = sym('x',[1 r]);
5     syms g;
6     keys = dict.keys();
7     % Initialisation de newQ
8     newQ = containers.Map(keys,zeros(1,length(keys)),'UniformValues',false);
9     indices = findDict(Q,0,'F');
10
11 % La suite encode la relation de recurrence de  $L_{-n}Q_q$ 
12 for l = 1:length(indices)
13     index = char(indices(l));
14     P = Q(index);
15     newP = 0;
16     for i = 1:(r-n)
17         newP = newP+i*x(i+n)*diff(P,x(i));
18     end
19     P1=-x(1:n-1)*fliplr(x(1:n-1)).'+((n-r)*g/2+2*(n-1)/g)*x(n);
20     newP = newP+P*P1;
21     newQ(index) = newQ(index)+newP;
22
23     partition = dict(index);
24     p = length(partition);
25     for i = 1:(n-1)
26         s = findDict(dict,[partition;n-i],'T');
27         newQ(s) = newQ(s)+2*x(i)*P;
28
29         s = findDict(dict,[partition;i;n-i],'T');
30         newQ(s) = newQ(s)-P;
31
32         for j = 1:p
33             s = findDict(dict,partition+[zeros(j-1,1);n-i;zeros(p-j,1)],'T');
34             newQ(s) = newQ(s)-g*x(i)*P;
35
36             s = findDict(dict,[partition+[zeros(j-1,1);i;zeros(p-j,1)];n-i],'T');
37             newQ(s) = newQ(s)+g*P;
38
39             for k = 1:p
40                 s = findDict(dict,partition+[zeros(j-1,1);i;zeros(p-j,1)]+[zeros(k-1,1);n-i;zeros(p-k,1)],'T');
41                 newQ(s) = newQ(s)-g^2/4*P;
42             end
43         end
44     end
45
46     s = findDict(dict,[partition;n],'T');
47     newQ(s) = newQ(s)+((r-1)*g/2-2*(n-1)/g)*P;
48
49     for j = 1:p
50         s = findDict(dict,partition+[zeros(j-1,1);n;zeros(p-j,1)],'T');
51         newQ(s) = newQ(s)+((n-r)*g^2/4+n-1+partition(j))*P;
52     end
53 end
54
55 end

```

Les fonctions `intpartitions` et `uniqueperms` sont téléchargés sur le site de mathworks.

`intpartitions.m`

```
1 function cellPart = intpartitions(varargin)
2 %INTPARTITION performs integer partition, i.e. the partition of of a set
3 %containing homogenous elements. The function generates a cell array
4 %containing a list of vectors representing all possible ways
5 %of partitioning a set containing intIn number of identical elements
6 %without order awareness. The numerical representation in the
7 %output describes the partitions as: {[3 1]} = [1 1 1 | 1].
8
9 % Example 1: intpartition(4) gives {[1 1 1 1],[1 1 2],[1 3],[2 2],4}
10 % Example 2: intpartition(10,2) gives {[3,7],[4,6],[5,5],10}
11 %
12 n=varargin{1};
13 if nargin >= 2
14     s=varargin{2};
15 else
16     s=inf;
17 end
18
19 n = round(n);
20 if ~isscalar(n)
21     error('Invalid input. Input must be a scalar integer')
22 end
23
24 cellPart={};
25 a = zeros(n,1);
26 k = 1;
27 y = n - 1;
28 while k ~= 0
29     x = a(k) + 1;
30     k = k-1;
31     while 2*x <= y
32         a(k+1) = x;
33         y = y - x;
34         k = k + 1;
35     end
36     l = k + 1;
37     while x <= y
38         a(k+1) = x;
39         a(l+1) = y;
40         if k+2<=s
41             cellPart(end+1) = {a(1:k + 2)};
42         end
43         x = x + 1;
44         y = y - 1;
45     end
46     a(k+1) = x + y;
47     y = x + y - 1;
48     if k+1<=s
49         cellPart(end+1) = {a(1:k + 1)};
50     end
51 end
52 end
```

`uniqueperms.m`

```

1 function pu = uniqueperms(vec)
2 % list of all unique permutations of a vector with (possibly) replicate elements
3 %
4 % Example:
5 % pu = uniqueperms([1 1 1 2 2])
6 % pu =
7 % 1 1 1 2 2
8 % 1 1 2 2 1
9 % 1 1 2 1 2
10 % 1 2 1 2 1
11 % 1 2 1 1 2
12 % 1 2 2 1 1
13 % 2 1 1 2 1
14 % 2 1 1 1 2
15 % 2 1 2 1 1
16 % 2 2 1 1 1
17
18 % How many elements in vec?
19 vec = vec(:); % make it always a column vector
20 n = length(vec);
21
22 % how many unique elements in vec?
23 uvec = unique(vec);
24 nu = length(uvec);
25
26 % any special cases?
27 if isempty(vec)
28     pu = [];
29 elseif nu == 1
30     % there was only one unique element, possibly replicated.
31     pu = vec';
32 elseif n == nu
33     % all the elements are unique. Just call perms
34     pu = perms(vec);
35 else
36     % 2 or more elements, at least one rep
37     pu = cell(nu,1);
38     for i = 1:nu
39         v = vec;
40         ind = find(v==uvec(i),1,'first');
41         v(ind) = [];
42         temp = uniqueperms(v);
43         pu{i} = [repmat(uvec(i),size(temp,1),1),temp];
44     end
45     pu = cell2mat(pu);
46 end

```

Références

- [1] Greg W Anderson. A short proof of selbergs generalized beta formula. In *Forum Mathematicum*, volume 3, pages 415–418, 1991.
- [2] K Aomoto. On the complex selberg integral. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 38(4) :385–399, 1987.
- [3] Emmanuel Bacry and Jean François Muzy. Log-infinitely divisible multifractal processes. *Communications in Mathematical Physics*, 236(3) :449–475, 2003.
- [4] Alexander A Belavin, Alexander M Polyakov, and Alexander B Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Physics B*, 241(2) :333–380, 1984.
- [5] Louis Benoit and Yvan Saint-Aubin. Degenerate conformal field theories and explicit expressions for some null vectors. *Physics Letters B*, 215(3) :517 – 522, 1988.
- [6] Nathanaël Berestycki. Introduction to the gaussian free field and liouville quantum gravity. *Lecture notes, available on authors webpage*, 2015.
- [7] Nathanaël Berestycki et al. An elementary approach to gaussian multiplicative chaos. *Electronic Communications in Probability*, 22, 2017.
- [8] François David, Antti Kupiainen, Rémi Rhodes, and Vincent Vargas. Liouville quantum gravity on the riemann sphere. *Communications in Mathematical Physics*, 342(3) :869–907, 2016.
- [9] Harald Dorn and H. J. Otto. Two and three point functions in Liouville theory. *Nucl. Phys.*, B429 :375–388, 1994.
- [10] Vl S Dotsenko and Vladimir A Fateev. Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2d statistical models. *Nuclear Physics B*, 240(3) :312–348, 1984.
- [11] Vl.S. Dotsenko and V.A. Fateev. Four-point correlation functions and the operator algebra in 2d conformal invariant theories with central charge c_1 . *Nuclear Physics B*, 251 :691 – 734, 1985.
- [12] Julien Dubédat. Sle and the free field : partition functions and couplings. *Journal of the American Mathematical Society*, 22(4) :995–1054, 2009.
- [13] Bertrand Duplantier, Rémi Rhodes, Scott Sheffield, and Vincent Vargas. Log-correlated gaussian fields : an overview. In *Geometry, Analysis and Probability*, pages 191–216. Springer, 2017.
- [14] Vladimir A Fateev, Alexey V Litvinov, André Neveu, and Enrico Onofri. A differential equation for a four-point correlation function in liouville field theory and elliptic four-point conformal blocks. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 42(30) :304011, 2009.
- [15] Vladimir Aleksandrovich Fateev and Alexey Viktorovich Litvinov. Multipoint correlation functions in liouville field theory and minimal liouville gravity. *Theoretical and Mathematical Physics*, 154(3) :454–472, 2008.
- [16] Peter Forrester and SVEN Warnaar. The importance of the selberg integral. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45(4) :489–534, 2008.
- [17] Krzysztof Gawedzki. Lectures on conformal field theory. Technical report, SCAN-9703129, 1997.
- [18] J-P Kahane. Le chaos multiplicatif. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 301(6) :329–332, 1985.
- [19] A. Kupiainen, R. Rhodes, and V. Vargas. Local Conformal Structure of Liouville Quantum Gravity. *ArXiv e-prints*, December 2015.
- [20] A. Kupiainen, R. Rhodes, and V. Vargas. Integrability of Liouville theory : proof of the DOZZ Formula. *ArXiv e-prints*, July 2017.
- [21] Antti Kupiainen. Constructive liouville conformal field theory. *arXiv preprint arXiv :1611.05243*, 2016.

- [22] Yu Nakayama. Liouville field theory : a decade after the revolution. *International Journal of Modern Physics A*, 19(17n18) :2771–2930, 2004.
- [23] A.M. Polyakov. Quantum geometry of bosonic strings. *Physics Letters B*, 103(3) :207 – 210, 1981.
- [24] Rémi Rhodes, Vincent Vargas, et al. Gaussian multiplicative chaos and applications : a review. *Probability Surveys*, 11, 2014.
- [25] Sylvain Ribault. Conformal field theory on the plane. *arXiv preprint arXiv :1406.4290*, 2014.
- [26] Raoul Robert and Vincent Vargas. Gaussian multiplicative chaos revisited. *The Annals of Probability*, 38(2) :605–631, 2010.
- [27] Nathan Seiberg. Notes on quantum Liouville theory and quantum gravity. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 102 :319–349, 1990.
- [28] A. Selberg. Bemerkninger om et multipelt integral. *Norsk. Mat. Tidsskr.*, 24 :71–78, 1944.
- [29] Alexander Shamov. On gaussian multiplicative chaos. *Journal of Functional Analysis*, 270(9) :3224 – 3261, 2016.
- [30] Norio Shimakura. *Partial differential operators of elliptic type*. Amer Mathematical Society, 1992.
- [31] Jörg Teschner. On the liouville three-point function. *Physics Letters B*, 363(1) :65–70, 1995.
- [32] Al Zamolodchikov. Higher equations of motion in liouville field theory. *International Journal of Modern Physics A*, 19(supp02) :510–523, 2004.
- [33] Alexander B. Zamolodchikov and Alexei B. Zamolodchikov. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory. *Nucl. Phys.*, B477 :577–605, 1996.