TD 1 : Probabilités élémentaires

www.math.ens.fr/tunan.zhu

1 Rappel sur les intégrales multiples

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \int_0^1 (x_1 x_2 + x_2^2) dx_1 dx_2$

b) $\int_0^1 \int_0^1 (x_1 + x_2)^3 dx_1 dx_2$

c) $\int_0^1 \int_1^2 x_2^2 \ln x_1 dx_1 dx_2$

d) $\int_{[0,1]^n} \mathbf{1}_{\{x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n\}} dx_1 \ldots dx_n$

2 Espace de probabilité

Exercice 2. Quels univers peut-on utiliser pour décrire les expériences suivantes :

a) Une série infinie de lancers de pièces indépendants.

b) Le nombre de lancers de dés qu'il faut pour que la somme des points obtenus dépasse 100.

c) La durée de vie d'une ampoule.

Exercice 3. On procède à deux lancers consécutifs d'un dé parfait.

a) Construire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour cette expérience.

b) On considère ensuite les deux événements : $A = \{$la somme des deux résultats est impaire$\}$, $B = \{$le point 1 est amené au moins une fois$\}$. Interpréter l'événement $A \cap B$.

c) Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 4 (Formule d'inclusion/exclusion)**.** Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements.

a) Montrer la formule d'inclusion-exclusion :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\big(A_i\big) - \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{P}\big(A_i \cap A_j\big) + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} \mathbb{P}\big(A_i \cap A_j \cap A_k\big) + \ldots + (-1)^{n-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)$$

b) Application : calculer la probabilité qu'une permutation aléatoire d'un ensemble à n éléments n'ait pas de point fixe [1]. Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$?

3 Evènements indépendants

Exercice 5. On lance deux dés et on désigne par $A = \{\text{le 1er amène un nombre impair}\}$, $B = \{\text{le 2e amène un nombre impair}\}$, $C = \{\text{les deux amènent un nombre de même parité}\}$. Montrer que A, B, C sont indépendants deux à deux sans être indépendants mutuellement (ce qui est défini dans le cours).

Exercice 6. Soit $A, B \in \mathcal{F}$. Montrer que

a) si A est indépendant de lui-même, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

b) si $\mathbb{P}(A) = 0$ alors A est indépendant de tout événement $B \in \mathcal{F}$.

c) si $A \cap B = \varnothing$ alors A et B ne sont pas indépendants, sauf si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.

d) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints et si A est indépendant de A_n pour tout n, alors A est indépendant de $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Exercice 7. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille des événements dans $\mathcal{F}$.

a) Montrer que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ et la limite $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)$ est bien définie.

b) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, montrer que $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 8. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des événements indépendants, montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right)$.

Exercice 9. On considère une suite infinie de lancers de pièces non-biaisées indépendents. Montrer que la probabilité que PILE n'apparaisse jamais est nulle. Qu'en est-il si chaque pièce a une probabilité $p \in [0, 1]$ de tomber sur PILE ?

1. Ce problème est souvent formulé comme suit : n personnes laissent leur chapeau à l'entrée d'une soirée, puis, suite à une panne de courant, en reprennant un au hasard en partant. Quelle est la probabilité qu'aucune d'entre elles ne reparte avec son chapeau ?

4 Conditionnement

Exercice 10. Un dé est lancé un nombre aléatoire N de fois. Pour tout $k \geq 1$, on suppose que $\mathbb{P}(N = k) = 2^{-k}$. On appelle S la somme des points obtenus. Quelle est la probabilité que

a) $N = 2$ sachant que $S = 4$?

b) $S = 4$ sachant que N est pair ?

Exercice 11. On lance une pièce biaisée un grand nombre de fois. A chaque lancer, le résultat est PILE avec probabilité $p \in]0, 1[$, et FACE avec probabilité $1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la probabilité qu'un nombre pair de PILE est obtenu parmi les n premiers lancers. Déterminer une relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n. En déduire la valeur de P_n.

Exercice 12 (Urnes de Pólya)**.** Une urne contient b_0 boules blanches et n_0 boules noires. Une boule est choisie au hasard uniformément dans l'urne. On note sa couleur et on la remet dans l'urne en ajoutant un nombre $d \geq 1$ de boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la procédure aussi souvent que nécessaire.

a) Calculer la probabilité que la seconde boule tirée soit noire.

b) Calculer la probabilité que la première boule soit noire, sachant que la seconde est noire.

c) Trouver la probabilité pour que la première boule soit noire sachant que les $n - 1$ suivantes sont noires. En déduire la limite de cette probabilité lorsque $n \to \infty$

d) Montrer que la probabilité que la $n^{\text{ème}}$ boule soit noire vaut $\frac{n_0}{n_0+b_0}$ (*i.e.* cette probabilité est égale à la probabilité que la 1ère boule tirée soit noire).
(Il sera plus simple de traiter cette question quand nous aurons vu le chapitre 2.)

5 Quelques paradoxes

Exercice 13 (Le paradoxe des anniversaires)**.** Montrer que dans une classe de 23 élèves, la probabilité que deux élèves soient né le même jour est plus grande que 1/2. (Nous supposerons qu'aucun élève n'est né le 29 février et que la répartition des naissances dans une année est uniforme). Qu'en est-il pour une classe de 40 élèves ?

Exercice 14 (Le paradoxe de Monty Hall)**.** Un joueur est placé devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur demande au joueur de désigner une porte. Puis il ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le joueur, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début). Le joueur a alors deux possiblités : soit il ouvre la porte qu'il a choisie initialement, soit il ouvre la troisième porte. Que doit-il faire ?