TD 2 : Variables Aléatoires

1 Quelques calculs

Exercice 1 (Loi Géométrique)**.** Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre p (rappelons qu'elle vérifie $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ pour tout $k \geq 1$). Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 (Loi de Poisson)**.**

a) Soit $\lambda > 0$. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. Qu'en est-il pour un nombre n arbitraire de variables aléatoires de Poisson ?

Exercice 3 (Loi Normale)**.** Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$. Montrer que $X_1 + X_2$ suit une loi Normale $\mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Qu'en est-il pour un nombre n arbitraire de variables aléatoires de loi Normale ?

Exercice 4 (Loi Gamma)**.** La loi $\gamma_{a,b}$ $(a, b > 0)$ est la loi d'une variable aléatoire ayant pour densité

$$\gamma_{a,b} : x \longmapsto \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax} \mathbb{1}_{x>0},$$

la fonction Γ étant définie pour $b \in]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(b) = \int_0^{+\infty} t^{b-1} e^{-t} dt.$$

a) Vérifier que cette définition a un sens. À quelle autre loi correspond $\gamma_{a,1}$?

b) Calculer l'espérance et la variance d'une telle loi.

2 Autour de l'indépendance de variables aléatoires

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes et indépendentes telles que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ et $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[|XY|] < \infty$ et

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\ \mathbb{E}[Y].$$

Exercice 6. Soient $X_1, X_2, \dots, X_5$ des variables aléatoires indépendantes. Montrer que $X_1^2 + X_3X_4$ et $X_2 - X_5$ sont indépendantes.

Exercice 7. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $Z_1 = X + Y$ et $Z_2 = |X - Y|$. Montrer que Z_1 et Z_2 sont décorrelées. Sont-elles indépendantes ?

3 Fonction de répartition et simulation de variables aléatoires

Exercice 8. Un joueur lance une pièce non biaisée. Si le résultat est PILE, il lance un dé et gagne trois fois le nombre de points N obtenus ainsi. Si le résultat est FACE, un nombre Z est choisi uniformément dans $[-10, 10]$ (c'est-à-dire la loi de ce nombre est $\mathcal{U}([-10, 10])$), et le gain du joueur est égal à Z. On note G ce gain. Tracer la fonction de répartition de G.

Exercice 9 (Propriétés des fonctions de répartition)**.** Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartiton F_X.

1) Montrer que $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ pour tous réels a et b tels que $a < b$, et que

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

2) Montrer que la fonction F_X est croissante, continue à droite, admet des limites à gauche et que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \to x-} F_X(y).$$

3) Supposons que X admette une densité f_X. Montrer que si f_X est continue en un point x_0, alors $f_X(x_0) = F'_X(x_0)$. Montrer que (inversement), si F_X est dérivable de dérivé continue par morceaux, alors X admet une densité f_X vérifiant $f_X = F'_X$.

4) Supposons que X est sans atomes et que F_X est strictement croissante.

- **a**) Quelle est la loi de $F_X(X)$?
- **b**) Si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$, quelle est la loi de $F_X^{-1}(U)$ [1] ?

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes avec

$$X \sim \mathcal{E}(1/2) \qquad \text{et} \qquad Y \sim \mathcal{U}([0, 2\pi]).$$

- **a**) Quelle est la densité du couple (X, Y).
- **b**) Calculer la densité de $(U, V) = (\sqrt{X} \cos Y, \sqrt{X} \sin Y)$. Que peut-on observer ?

Exercice 11. De nombreux logiciels proposent une fonction RAND qui simule la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

- **a**) Comment peut-on simuler une loi uniforme sur $\{0, 1, \dots, n\}$?
- **b**) On suppose que deux applications de la fonction RAND fournissent la réalisation de deux variables aléatoires de lois indépendantes. D'après les résultats des deux derniers exercices, comment peut-on simuler une loi normale ?

1. Ce résultat subsiste dans le cas général : F^{-1} n'étant pas forcément défini, on le remplace par le pseudo-inverse de F défini par $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F(x) > u\}$.

4 Quelques exercices d'application

Exercice 12 (Formule d'inclusion/exclusion)**.** Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements et $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. A l'aide de l'identité $1_A = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i})$, montrer la formule d'inclusion-exclusion :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Exercice 13. Un restaurateur possède 50 tables. La probabilité pour qu'un groupe de clients ayant réservé une table ne vienne pas est de 20%. Un jour, le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité qu'il se retrouve dans une situation embarrassante ?

Exercice 14. On lance une pièce un million de fois, quel est le nombre d'apparitions espéré pour les configurations de 6 FACE suivi de 6 PILE ?

Exercice 15. On lance une pièce une infinité de fois, quel est le nombre de lancers espéré pour avoir une première configuration de 3 FACE consécutifs ?

5 Miscellaneous

Exercice 16. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$$

Exercice 17. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ indépendante des X_n. On pose :

$$P = \sum_{i=1}^{N} X_i \text{ et } F = N - P = \sum_{i=1}^{N} (1 - X_i)$$

avec $P = N = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

a) Déterminer la loi du couple (P, N).

b) En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

Exercice 18. On définit sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, ..., U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, ..., p\}$.

a) Trouver la loi de $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} U_k$

b) Montrer que

$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \underset{p \to \infty}{\to} \frac{n}{n+1}$$

Exercice 19. Sur un espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ on se donne $(X_1, ..., X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi donnée par la densité :

$$\mathbf{1}_{[0,1]^n}(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n$$

a) Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < ... < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in S_n$, n variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$ sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ telles que :

$$Y_1(\omega) \leq ... \leq Y_n(\omega) \text{ et } \{Y_1(\omega), ..., Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), ..., X_n(\omega)\}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

b) Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, ..., Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, ...Y_{n-1}/Y_n)$.

Exercice 20. Sur un espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$ on se donne (X, Y) une variable aléatoire de loi donnée par la densité :

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$

Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.