TD : Lemme de Borel-Cantelli

Exercice 1. On donne à un singe une machine à écrire pour qu'il tape une suite de caractères. On peut supposer que le singe ne sait pas écrire et donc qu'il tape les caractères aléatoirement (selon une certaine loi de probabilité) et indépendamment les uns des autres. Le paradoxe est le suivant : si le singe tape indéfiniment sur la machine alors il écrira presque sûrement une pièce de Shakespeare dans son intégrabilité.

Pour montrer cela, on code la pièce de Shakespeare en binaire. Elle s'écrit alors

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\dots\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k$$

où $k \geq 1$ représente la longueur du code et $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$. Supposons aussi que la machine à écrire possède deux touches : 0 et 1. Pour $n \geq 1$, nous définissons la variable aléatoire X_n qui est égale à la valeur du n-ième caractère tapé par le singe. Que dire de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Pour tout $n \geq 1$, notons A_n l'évènement “la pièce est écrite en $X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k-1}$”, c'est-à-dire,

$$A_n = \{X_n = \varepsilon_1, X_{n+1} = \varepsilon_2, \dots, X_{n+k-2} = \varepsilon_{k-1}, X_{n+k-1} = \varepsilon_k\}$$

En étudiant $B_n = A_{nk}$, montrer le paradoxe annoncé.

Exercice 2. 1) Montrer que la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}$ revient infiniment souvent à 0.
2) On étudie la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^2$ (« marche de l'homme ivre »). En considérant les projections sur les diagonales $y = \pm x$, montrer que cette marche revient infiniment souvent à 0.

Exercice 3 (**Autour des hypothèses pour la loi des grands nombres**)**.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X. Posons $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Montrer que

$$\mathbb{E}[|X|] < +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a > 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq an) < +\infty$$

Indice : On utilisera le fait que, si Y est une variable aléatoire positive, alors $\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > t)\,dt$.

b) Montrer que si $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$ alors $(X_n/n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement vers 0.

c) Montrer que si $\mathbb{E}[|X|] = +\infty$ alors, pour tout $a > 0$, presque surement on a $|X_n| \geq an$ infiniment souvent.

d) En déduire que si $\mathbb{E}[|X|] = +\infty$ alors,

$$\limsup_n \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right| = +\infty$$