

Fluctuations de la loi empirique de grandes matrices aléatoires

Thierry Cabanal-Duvillard

Tunan Zhu et Nicolas Brosse

28 mai 2016

Nous avons montré en cours la convergence de la loi empirique des valeurs propres d'une matrice du GUE vers la loi du demi-cercle. Cet article vise à étudier les fluctuations de cette convergence. Il redémontre par une méthode différente basée sur le calcul stochastique libre (matriciel) un résultat de fluctuation sur le GUE de [Joh98], et étend ce résultat au produit de deux matrices du GUE non commutatives (matrices de Wishart) qui tend vers une loi de Pastur-Marchenko.

Si $H_N(1)$ désigne une matrice de Wigner hermitienne, nous avons montré dans le cours que

$$\hat{\mu}_1^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}(1)}$$

converge ps vers la loi du demi-cercle centrée

$$\sigma(dx) := \frac{1}{2\pi} (4 - |x|^2)_+^{1/2} dx$$

Définition. On définit le mouvement brownien hermitien comme le processus matriciel $(H_N(t))_{t \in \mathbb{R}^+}$ sur le sous-espace des matrices hermitiennes de dimension N dont les entrées sont des mouvements browniens complexes vérifiant

$$\mathbb{E}[H_N^{i,j}(t) H_N^{k,l}(s)] = \frac{t \wedge s}{N} \delta_i^l \delta_k^j$$

A l'instant 1, on retrouve la matrice de Wigner complexe.

On note tr_N la trace normalisée $\frac{1}{N} \text{tr}$ et $\hat{\mu}_t^{(N)}$ la mesure spectrale de $H_N(t)$. Si $(\lambda_1^{(N)}(t), \dots, \lambda_N^{(N)}(t))$ désigne la famille des valeurs propres de $H_N(t)$, on a :

$$\hat{\mu}_t^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}(t)}$$

Théorème 1. Soient $(T_n(x, t))_{n \geq 0}$ les polynômes de degré n en x , définis par

$$\sum_{n \geq 0} \lambda^n T_n(x, t) = \frac{1 - \lambda \frac{x}{2}}{1 + t\lambda^2 - \lambda x} + \frac{\lambda^2 t}{2} - 1$$

Alors le processus

$$(N \text{tr}_N(T_1(H_N(t), t)), \dots, N \text{tr}_N(T_n(H_N(t), t)))_{t \geq 0}$$

converge vers $(\frac{1}{2}\beta_1(t), \dots, \frac{\sqrt{n}}{2}\beta_n(t^n))_{t \geq 0}$ en loi, les β_i étant des mouvements browniens indépendants.

On définit la loi du demi-cercle centrée de variance t par

$$\sigma_t(dx) = \frac{1}{2\pi t} \sqrt{4t - x^2} 1_{[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]} dx$$

Corollaire. Soit f une fonction polynôme centrée pour la loi du demi-cercle σ_1 . Alors $N\hat{\mu}_1^{(N)}(f)$ converge en loi, quand N tend vers l'infini vers une variable gaussienne centrée de variance

$$\frac{1}{4} \int \int \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right)^2 \frac{4 - xy}{(4 - x^2)(4 - y^2)} \sigma_1(dx) \sigma_1(dy)$$

Soit $\mathcal{N}$ l'opérateur de nombre sur $L^2(\frac{dx}{2\pi\sqrt{4-x^2}})$, qui multiplie par n le n^{eme} polynôme orthogonal associé à la mesure $\frac{dx}{2\pi\sqrt{4-x^2}}$. La variance peut aussi être exprimée sous la forme $\frac{1}{4} \int f(x)(\mathcal{N}f)(x) \frac{\sigma_1(dx)}{4-x^2}$.

Le calcul stochastique sur les matrices se définit de façon naturelle à partir du calcul stochastique classique, en considérant chacune des entrées (i, j) des matrices. L'intégrale de $P(s) \otimes Q(s)$ contre H_N est définie par

$$\int_0^t P(s) \otimes Q(s) \sharp dH_N(s) = \left(\sum_{k,l=1}^N \int_0^t p_{i,k}(s) q_{l,j}(s) dH_n^{k,l}(s) \right)_{1 \leq i,j \leq N} \quad (1)$$

On montre alors la formule d'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned} & \int_0^t A(s) \otimes B(s) \sharp dH_N(s) \int_0^t C(s) \otimes D(s) \sharp dH_N(s) \\ &= \int_0^t \left(A(s) \otimes \left[B(s) \int_0^s (C(u) \otimes D(u) \sharp dH_N(u)) \right] \right) \sharp dH_N(s) \\ &+ \int_0^t \left(\left[\int_0^s (A(u) \otimes B(u) \sharp dH_N(u)) C(s) \right] \otimes D(s) \right) \sharp dH_N(s) \\ &+ \int_0^t A(s) \text{tr}_N(B(s)C(s)) D(s) ds \end{aligned}$$

Il suffit de décomposer en chaque terme (i, j) en utilisant (1) et d'appliquer le calcul stochastique classique. De même on obtient facilement,

$$\langle \text{tr}_N(AdH_N(t)), \text{tr}_N(BdH_N(t)) \rangle = \frac{1}{N^2} \text{tr}_N(AB) dt \quad (2)$$

Puisqu'il s'agit d'étendre la formule d'Itô au cadre matriciel, on définit des analogues non linéaires de la dérivation et du laplacien.

$$\begin{aligned} D_0 : \mathbb{C}[X] &\rightarrow \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X] \\ X^n &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} X^i \otimes X^{n-1-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_0 : \mathbb{C}[X] &\rightarrow \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X] \\
X^n &\mapsto \sum_{i=0}^{n-1} iX^{i-1} \otimes X^{n-1-i}
\end{aligned}$$

Formule d'Itô pour H_N pour toute fonction polynomiale f aux coefficients bornés, continûment dérivable et de dérivée bornée en temps,

$$\begin{aligned}
f(H_N(t), t) &= f(H_N(0), 0) + \int_0^t D_0 f(H_N(s), H_N(s); s) \sharp dH_N(s) \\
&+ \int_0^t \partial_s(H_N(s), s) ds + \int_0^t (Id_N \otimes \text{tr}_N) \circ (L_0 f)(H_N(s), H_N(s); s) ds
\end{aligned}$$

La preuve s'obtient à partir de la formule d'intégration par parties par récurrence. De même, on obtient à partir de (2) la formule suivante qui sera utilisée dans la suite. Pour tous f, g polynomiales, le crochet des semi-martingales $\text{tr}_N f(H_N(t), t)$ et $\text{tr}_N g(H_N(t), t)$ est égal à

$$\langle \text{tr}_N f(H_N, \cdot), \text{tr}_N g(H_N, \cdot) \rangle_t = \frac{1}{N^2} \int_0^t \text{tr}_N (\partial_x f(H_N(s), s) \partial_x g(H_N(s), s)) ds \quad (3)$$

Les polynômes de Tchebycheff

Les polynômes de Tchebycheff du deuxième ordre peuvent être définis via leur série génératrice :

$$v(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_n(x, t) = \frac{1}{1 + \lambda^2 t - \lambda x}$$

On en déduit les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
S_n(x, t) &= t^{n/2} S_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) \\
S_n(2 \cos \theta, 1) &= \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}
\end{aligned}$$

Ce sont les polynômes orthogonaux associés aux mesures σ_t . On en déduit les égalités :

$$\begin{aligned}
\partial_t v(x, t, \lambda) &= -\lambda^2 v^2(x, t, \lambda) \\
L_0 v(x, y, t; \lambda) &= \lambda^2 v^2(x, t, \lambda) v(y, t; \lambda) \\
\sigma_t(v(\cdot, t; \lambda)) &= 1
\end{aligned}$$

d'où l'on tire l'égalité importante suivante :

$$\partial_t S_n(x, t) + \sigma_t(L_0 S_n)(x, \cdot; t) = 0$$

Les polynômes de Tchebycheff du premier ordre sont proches de ceux du second ordre et définis par la série génératrice suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n C_n(x, t) = \frac{1 - \lambda \frac{x}{2}}{1 + \lambda^2 t - \lambda x}$$

On obtient facilement :

$$\begin{aligned} C_n(x, t) &= t^{n/2} C_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) \\ C_n(2 \cos \theta, 1) &= \cos(n\theta) \\ \partial_x C_n(x, t) &= n S_{n-1}(x, t) \end{aligned}$$

Les polynômes C_n sont orthogonaux pour la loi de l'arcsinus

$$\frac{dx}{2\pi\sqrt{4t-x^2}} 1_{[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]} = \frac{t\sigma_t(dx)}{4t-x^2}$$

Par ailleurs, ils sont centrés pour la mesure semi-circulaire, sauf pour $n = 0, 2$. C'est pourquoi, on modifie légèrement leur série génératrice pour définir les polynômes T_n qui eux sont centrés pour σ_t . La série génératrice des T_n donnée dans le théorème 1 est :

$$u(x, t; \lambda) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n T_n(x, t) = \frac{1 - \lambda \frac{x}{2}}{1 + t\lambda^2 - \lambda x} + \frac{\lambda^2 t}{2} - 1 = \frac{1 - \lambda^2 t}{2} (v(x, t; \lambda) - v(0, 0; \lambda))$$

A partir de ces définitions et de ces quelques propriétés des polynômes de Tchebycheff, on obtient le lemme suivant qui nous servira pour démontrer le théorème principal :

Lemme 1. *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a l'égalité :*

$$\sigma_t(L_0 T_n(x, \cdot, t) + L_0 T_n(\cdot, x, t)) + \partial_t T_n(x, t) = \sigma_t \otimes \sigma_t(L_0 T_n(\cdot, \cdot, t))$$

Le théorème de Wigner dit que $(\mathbb{E}[\text{tr}_N(H_N^p(t))])_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers les moments de σ_t . La convergence p.s. a été démontrée peu après. Ici, on a besoin d'une convergence pour tous les moments, d'où vient la définition suivante.

Définition. Soit (M_N) une suite de matrices aléatoires, μ une loi réelle. On dit que M_N converge dans L^∞ ($\equiv \cap_{q \in \mathbb{N}} L^q$) vers μ si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \text{tr}_N(M_N^k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^\infty} \mu(x^k)$$

Lemme 2. $H_N(t)$ converge dans L^∞ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve. Il suffit de considérer $k \geq 1$. On note $M_N^{(k)}$ la partie martingale de $\text{tr}_N(H_N^k)$, elle est nulle en 0. Soit $m \in \mathbb{N}$, par (3)

$$\begin{aligned} \langle M_N^{(k)} \rangle_t^m &= \left(\frac{k^2}{N^2} \int_0^t \text{tr}_N(H_N^{2k-2}(s)) ds \right)^m \\ &\leq \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t \text{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(s)) \frac{ds}{t} \end{aligned}$$

où on a utilisé deux fois Jensen dans l'inégalité précédente. Alors,

$$\mathbb{E}[\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m] \leq \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t s^{m(k-1)} \mathbb{E}[\text{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(1))] \frac{ds}{t}$$

Or $\mathbb{E}[\text{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(1))] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sigma(x^{m(2k-2)})$, elle est donc bornée. Par conséquent, $\langle M_N^{(k)} \rangle_t$ converge dans L^m vers 0 uniformément en $t \in [0, T]$, pour tout m . On déduit à l'aide des inégalités de B.D.G. que $\sup_{0 \leq t \leq T} M_N^{(k)}(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers 0. Grâce à la formule d'Ito,

$$\text{tr}_N(H_N^k(t)) = M_N^{(k)}(t) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \text{tr}_N(H_N^{i-1}(s)) \text{tr}_N(H_N^{k-i-1}(s)) ds$$

Cas $k = 1$: $\text{tr}_N(H_N(t)) = M_N^{(1)}(t) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^{\infty-}} 0 = \sigma_t(x)$ uniformément. Pour passer de $\leq k - 1$ à k , on remarque que

$$\sigma_s(x^n) = \begin{cases} s^{\frac{n}{2}} C_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

avec $(C_p)_{p \in \mathbb{N}}$ les nombres de Catalan. Alors la partie à variations finies converge dans $L^{\infty-}$ vers $\sigma_t(x^k)$ uniformément. On conclut par récurrence que $\text{tr}_N(H_N^k(t))$ converge dans $L^{\infty-}$ vers $\sigma_t(x^k)$ uniformément pour $t \in [0, T]$. $\square$

Remarque. Du calcul précédent, il ressort que $N \sup_{0 \leq t \leq T} M_N^{(k)}(t)$ est bornée dans $L^{\infty-}$.

Désormais, on note $X_N^{(n)}(t) = N \text{tr}_N(T_n(H_N(t), t))$. On décompose $X_N^{(n)}(t)$ en $M_N^{(n)}(t) + A_N^{(n)}(t)$ où $M_N^{(n)}(t)$ est la partie martingale et $A_N^{(n)}(t)$ la partie à variations finies. On a $\sup_{0 \leq t \leq T} M_N^{(n)}(t)$ bornée dans $L^{\infty-}$ par la remarque précédente.

On commence par contrôler la partie à variations finies.

Lemme 3. $A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve. D'après le lemme 1, $A_N^{(n)}(t)$ vaut

$$\begin{aligned} N \int_0^t & \left(\text{tr}_N \otimes \text{tr}_N (L_0 T_n(s)(H_N(s), H_N(s))) - \sigma_s \otimes \text{tr}_N (L_0 T_n(s)(\cdot, H_N(s))) \right. \\ & \left. - \text{tr}_N \otimes \sigma_s (L_0 T_n(s)(H_N(s), \cdot)) + \sigma_s \otimes \sigma_s (L_0 T_n(s)(\cdot, \cdot)) \right) ds \end{aligned}$$

On décompose le polynôme

$$L_0 T_n(s)(x, y) - \sigma_s(L_0 T_n(s)(\cdot, y)) - \sigma_s(L_0 T_n(s)(x, \cdot)) + \sigma_s \otimes \sigma_s(L_0 T_n(s)(\cdot, \cdot))$$

dans la base $(T_i(x, s)T_j(y, s))_{i,j \geq 0}$:

$$\sum_{i,j=1}^{n-2} \alpha_{i,j}^{(n)}(s) T_i(x, s) T_j(x, s)$$

avec $\alpha_{i,j}^{(n)}$ des fonctions continues, indépendantes de N . Alors,

$$X_N^{(n)}(t) = M_N^{(n)}(t) + \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^{n-2} \int_0^t \alpha_{i,j}^{(n)}(s) X_N^{(i)}(s) X_N^{(j)}(s) ds$$

Comme $\sup_{0 \leq t \leq T} M_N^{(n)}(t)$ bornée dans $L^{\infty-}$, on déduit par récurrence sur n que $\sup_{0 \leq t \leq T} X_N^{(n)}(t)$ est bornée dans $L^{\infty-}$. Enfin on conclut grâce au facteur $\frac{1}{N}$ que $\sup_{0 \leq t \leq T} A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$. $\square$

Ensuite on traite la partie martingale.

Lemme 4. $\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_t \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{L^{\infty-}} \delta_{n,m} \frac{nt^n}{4}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve. Pour λ, μ dans un voisinage compact approprié de zéro, on calcule à l'aide des séries formelles

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_n \lambda^n M_N^{(n)}, \sum_n \mu^n M_N^{(n)} \right\rangle_t &= N^2 \langle \text{tr}_N (u(H_N, \cdot; \lambda)), \text{tr}_N (u(H_N, \cdot; \mu)) \rangle_t \\ &= \int_0^t \text{tr}_N (\partial_x u(H_N(s), s; \lambda), \partial_x u(H_N(s), s; \mu)) \, ds \\ &\xrightarrow{L^{\infty-}} \int_0^t \sigma_s (\partial_x u(\cdot, s; \lambda), \partial_x u(\cdot, s; \mu)) \, ds \\ &= \frac{\lambda \mu t}{4(1 - \lambda \mu t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{4} (\lambda \mu)^n \end{aligned}$$

pour la convergence on a utilisé le lemme 2, et elle est uniforme pour t et pour μ, λ . Le reste c'est de vérifier la convergence des $\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_t$ et d'identifier terme par terme. $\square$

On admet le théorème de Knight asymptotique, qui ressemble au théorème de Dubins-Schwarz pour dimension 1. Voir [RY13] chap XIII théorème (2.3) pour les détails.

Théorème 2 (Knight asymptotique). *Soient $(M_N^{(i)})_{i=1}^k$ une suite de k -uplets de martingales locales continues nulles en zéro telles que $\langle M_N^{(i)} \rangle_{\infty} = \infty$ pour tous N, i . On pose*

$$\tau_N^{(i)}(t) = \inf\{s, \langle M_N^{(i)} \rangle_s > t\} \quad \text{et} \quad \beta_N^{(i)} = M_N^{(i)}(\tau_N^{(i)})$$

Si pour tous $t, m \neq n$, on a en probabilité,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_{\tau_N^{(m)}(t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_{\tau_N^{(n)}(t)} = 0$$

alors $(\beta_N^{(i)})_{i=1}^k$ converge en loi vers un mouvement brownien de dimension k .

Preuve (théorème 1). Par le lemme 3, il suffit de traiter la partie martingale. On conserve les notations du théorème de Knight. On a

$$\mathbb{E}[1 \wedge \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_{\tau_N^{(n)}(t)}] \leq \mathbb{P}(\tau_N^{(n)}(t) > T_t) + \mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq T_t} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_s]$$

Comme $\langle M_N^{(n)} \rangle_{\tau_N^{(n)}(t)}$ converge dans $L^{\infty-}$ vers la fonction $t \mapsto \frac{nt^n}{4}$, on peut choisir T_t de sorte que $\mathbb{P}(\langle M_N^{(n)} \rangle_{T_t} < t)$ tend vers 0, donc le premier terme tend vers 0. T_t étant fixé, le deuxième terme tend aussi vers 0 par le lemme 4.

On a donc $\langle M_N^{(n)}, M_N^{(n)} \rangle_{\tau_N^{(n)}(t)}$ converge vers 0 en probabilité, le théorème de Knight dit que $(\beta_N^{(i)})_{i=1}^k$ converge en loi vers $(\beta^{(i)})_{i=1}^k$ mouvement brownien de dimension k .

On pose $h_N^{(n)}(t) = \sqrt{\frac{\partial \langle M_N^{(n)} \rangle_t}{\partial t}}$, et la preuve du lemme 4 montre que $h_N^{(n)}(t)$ converge vers la fonction $h^{(n)}(t) = \frac{n}{2} t^{\frac{n-1}{2}}$ uniformément pour $t \in [0, T]$ (en fait on a intégré la convergence pour la dérivée). Or,

$$\begin{aligned} M_N^{(n)}(t) &= \int_0^t h_N^{(n)}(s) d\beta_N^{(n)}(s) \\ &= \int_0^t (h_N^{(n)}(s) - h^{(n)}(s)) d\beta_N^{(n)}(s) + \int_0^t h^{(n)}(s) d\beta_N^{(n)}(s) \end{aligned}$$

Comme $\int_0^t (h_N^{(n)}(s) - h^{(n)}(s))^2 ds$ converge dans $L^{\infty-}$ vers 0 uniformément, on conclut par les inégalités de B.D.G. que $(M_N^{(n)}(t), \dots, M_N^{(n)}(t))_{0 \leq t \leq T}$ converge en loi vers

$$\left(\int_0^{\cdot} h^{(1)}(s) d\beta^{(1)}(s), \dots, \int_0^{\cdot} h^{(n)}(s) d\beta^{(n)}(s) \right)_{0 \leq t \leq T}$$

qui est égal en loi à $(\frac{1}{2}\beta^{(1)}(t), \dots, \frac{\sqrt{n}}{2}\beta^{(n)}(t))_{0 \leq t \leq T}$. □

Preuve (Corollaire du théorème 1). Comme f est centrée, on a

$$f(x) = \sum_{p=1}^n \alpha_p T_p(x, 1)$$

Par le théorème appliqué à $t = 1$, $N\hat{\mu}_N(f)$ converge vers une variable gaussienne de variance $\sum_{p=1}^n \frac{p}{4} \alpha_p^2$, qui est égal à $\frac{1}{4} \int f(x)(\mathcal{N}f)(x) \frac{\sigma(dx)}{4-x^2}$. La vérification est basée sur l'orthogonalité des $C_p(x, 1)$ (Tchebycheff du premier ordre) pour la loi $\frac{\sigma(dx)}{4-x^2}$. □

Références

- [Joh98] Kurt Johansson. On fluctuations of eigenvalues of random hermitian matrices. *Duke Math. J.*, 91(1) :151–204, 01 1998.
- [RY13] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.