Fluctuations de la loi empirique de grandes matrices aléatoires - Thierry Cabanal-Duvillard

Tunan Zhu et Nicolas Brosse

18 mai 2016

Rappels

Si $H_N(1)$ désigne une matrice de Wigner hermitienne, nous avons montré dans le cours que

$$\hat{\mu}_1^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i^{(N)}(1)}$$

converge ps vers la loi du demi-cercle centrée

$$\sigma(dx) := \frac{1}{2\pi}(4 - |x^2|)_+^{1/2} dx$$

$$H_N(1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1)_{\mathbb{R}} & \mathcal{N}(0,1)_{\mathbb{C}} & \cdots \\ \bar{\mathcal{N}}(0,1)_{\mathbb{C}} & \mathcal{N}(0,1)_{\mathbb{R}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Rappels

Démo ? Par ex par la méthode des moments.

$$\hat{\mu}_1^{(N)}(X^k) = \int x^k d\hat{\mu}_1^{(N)} = \frac{1}{N}\mathrm{tr}(H_N^k(1))$$

On aimerait étudier :

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(H_N^k(1)) =: \mathrm{tr}_N(H_N^k(1))$$

Idée

Fait : $\mathcal{N}(0,1)$ est une loi infiniment divisible.
Equivalence entre processus de Lévy et loi infiniment divisible.
$\Rightarrow$ Mouvement brownien.

$$H_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_{1,2} + i\beta'_{1,2}) & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta_{1,2} - i\beta'_{1,2}) & \beta_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\beta_{i,j}$ mouvements browniens indépendants
On définit la loi du demi-cercle centrée de variance t par

$$\sigma_t(dx) = \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}1_{[-2\sqrt{t},2\sqrt{t}]}dx$$

Calcul stochastique

Calcul stochastique ?

$$\int_0^t A(s) \otimes B(s) \sharp dH_N(s) = \left(\sum_{k,l=1}^{N} \int_0^t a_{i,k}(s) b_{l,j}(s) dH_n^{k,l}(s) \right)_{1 \leq i,j \leq N}$$

Voir :

$$\int A dH_N(s) B_s = \int (A_s \otimes B_s) \sharp dH_N(s)$$

Formule d'intégration par parties

$$\int_0^t A(s)\otimes B(s)\sharp dH_N(s)\int_0^t C(s)\otimes D(s)\sharp dH_N(s)$$
$$= \int_0^t \left(A(s)\otimes\left[B(s)\int_0^s (C(u)\otimes D(u)\sharp dH_N(u)\right]\right)\sharp dH_N(s)$$
$$+ \int_0^t \left(\left[\int_0^s (A(u)\otimes B(u)\sharp dH_N(u) C(s)\right]\otimes D(s)\right)\sharp dH_N(s)$$
$$+ \int_0^t A(s)\mathrm{tr}_N(B(s)C(s))D(s)ds$$

cf $d(AB) = AdB + BdA + d\langle A, B\rangle$

Formule d'Itô

Extension au non-commutatif.
Dérivation classique.

$$\begin{aligned} D_0 : \mathbb{C}[X] &\rightarrow \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X] \\ X^n &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} X^i \otimes X^{n-1-i} \end{aligned}$$

Laplacien.

$$\begin{aligned} L_0 : \mathbb{C}[X] &\rightarrow \mathbb{C}[X] \otimes \mathbb{C}[X] \\ X^n &\longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} iX^{i-1} \otimes X^{n-1-i} \end{aligned}$$

Formule d'Itô

$$x^k - y^k = (x-y)\sum_{i=0}^{k-1} x^i y^{k-1-i}$$

Donc, si $f = X^k$,

$$D_0 f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

De même

$$L_0 f(x,y) = \frac{1}{x-y}(\partial f(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y}) = \int_0^1 \partial^2 f(ux+(1-u)y)udu$$

Formule d'Itô

f fonction polynomiale $\mathcal{C}_b^1([0,1],\mathcal{C}[X])$.

$$f(H_N(t),t) = f(H_n(0),0) + \int_0^t D_0 f(H_N(s),H_N(s);s)\sharp dH_N(s)$$

$$+ \int_0^t \partial_s(H_N(s),s)ds + \int_0^t (Id_N \otimes \mathrm{tr}_N) \circ (L_0 f)(H_N(s),H_N(s);s)ds$$

Une formule utile

$$\langle \mathrm{tr}_N(AdH_N(t)), \mathrm{tr}_N(BdH_N(t))\rangle = \frac{1}{N^2}\mathrm{tr}_N(AB)dt$$

Crochet des semi-martingales $\mathrm{tr}_N f(H_N(t), t)$ et $\mathrm{tr}_N g(H_N(t), t)$:

$$\langle \mathrm{tr}_N f(H_N, .), \mathrm{tr}_N g(H_N, .)\rangle_t = \frac{1}{N^2}\int_0^t \mathrm{tr}_N(\partial_x f(H_N(s), s)\partial_x g(H_N(s), s))ds$$

et maintenant ?

$$
\begin{aligned}
N\mathrm{tr}_N T_n(H_N(t),t) = N\mathrm{tr}_N T_n(H_n(0),0) + \\
\int_0^t N\mathrm{tr}_N D_0 T_n(H_N(s),H_N(s);s)\sharp dH_N(s) \\
+ \int_0^t N\mathrm{tr}_N \partial_s T_n(H_N(s),s)ds + \\
\int_0^t (N\mathrm{tr}_N \otimes \mathrm{tr}_N)\circ(L_0 T_n)(H_N(s),H_N(s);s)ds
\end{aligned}
$$

Polynômes de Tchebycheff

Taper Polynôme de Tchebychev sur google. Pour aller vite, pour le second ordre :

$$v(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n S_n(x,t) = \frac{1}{1+\lambda^2 t - \lambda x}$$

On en déduit les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S_n(x,t) &= t^{n/2} S_n(\frac{x}{\sqrt{t}},1) \\ S_n(2\cos\theta,1) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

Ce sont les **polynômes orthogonaux** associés aux mesures σ_t. On en déduit les égalités :

$$\begin{aligned} \partial_t v(x,t,\lambda) &= -\lambda^2 v^2(x,t,\lambda) \\ L_0 v(x,y,t;\lambda) &= \lambda^2 v^2(x,t,\lambda) v(y,t;\lambda) \\ \sigma_t(v(.,t;\lambda)) &= 1 \end{aligned}$$

Polynômes de Tchebycheff

D'où :

$$\partial_t S_n(x,t) + \sigma_t(L_0 S_n)(x,.;t) = 0$$

De même, polynômes du premier ordre.
Orthogonaux pour la loi de l'arcsinus

$$\frac{dx}{2\pi\sqrt{4t-x^2}} 1_{[-2\sqrt{t},2\sqrt{t}]} = \frac{t\sigma_t(dx)}{4t-x^2}$$

centrés pour mesure semi-circulaire. (sauf $n = 0, 2$).
On les note T_n.

Proposition

$$\sigma_t(L_0 T_n(x,.,t) + L_0 T_n(.,x,t)) + \partial_t T_n(x,t) = \sigma_t \otimes \sigma_t(L_0 T_n(.,.,t))$$

Théorème

Theorème

Soient $(T_n(x,t))_{n\geq 0}$ *les polynômes de degré n en x, définis par*

$$\sum_{n\geq 0} \lambda^n T_n(x,t) = \frac{1-\lambda\frac{x}{2}}{1+t\lambda^2-\lambda x} + \frac{\lambda^2 t}{2} - 1$$

Alors le processus

$$(Ntr_N(T_1(H_N(t),t)),...,Ntr_N(T_n(H_N(t),t)))_{t\geq 0}$$

converge vers $(\frac{1}{2}\beta_1(t),...,\frac{\sqrt{n}}{2}\beta_n(t^n))_{t\geq 0}$ *en loi, les* β_i *étant des mouvements browniens indépendants.*

Formules magiques

1.Formule d'Ito explicite

$$f(H_N(t),t) = f(H_n(0),0) + \int_0^t D_0 f(H_N(s),H_N(s);s)\sharp dH_N(s)$$
$$+ \int_0^t \partial_s f(H_N(s),s)ds + \int_0^t (Id_N \otimes \mathrm{tr}_N)\circ(L_0 f)(H_N(s),H_N(s);s)ds$$

2.Formule explicite pour le crochet

$$\langle \mathrm{tr}_N f(H_N,.), \mathrm{tr}_N g(H_N,.)\rangle_t =$$
$$\frac{1}{N^2}\int_0^t \mathrm{tr}_N(\partial_x f(H_N(s),s)\partial_x g(H_N(s),s))ds$$

Définition

(M_N) une suite de matrices aléatoires, μ une loi réelle. On dit que M_N converge dans $L^{\infty -}(\equiv \cap_{q\in\mathbb{N}} L^q)$ vers μ si

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}_N(M_N^k) \xrightarrow[N\to\infty]{L^{\infty -}} \mu(x^k)$$

Définition

(M_N) une suite de matrices aléatoires, μ une loi réelle. On dit que M_N converge dans $L^{\infty-}(\equiv \cap_{q\in\mathbb{N}} L^q)$ vers μ si

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}_N(M_N^k) \xrightarrow[N\to\infty]{L^{\infty-}} \mu(x^k)$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve

$k \geq 1$, notons $M_N^{(k)}$ la partie martingale de $\mathrm{tr}_N(H_N^k)$
La formule 2 (Crochet) $\Rightarrow$

$$\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m = \left(\frac{k^2}{N^2} \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{2k-2}(s))\, ds \right)^m$$

$$\overset{Jensen}{\leq} \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(s))\, \frac{ds}{t}$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0,T]$.

Preuve

$k \geq 1$, notons $M_N^{(k)}$ la partie martingale de $\mathrm{tr}_N(H_N^k)$
La formule 2 (Crochet) $\Rightarrow$

$$\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m = \left(\frac{k^2}{N^2} \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{2k-2}(s))\, ds \right)^m$$

$$\overset{Jensen}{\leq} \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(s))\, \frac{ds}{t}$$

$$\mathbb{E}[\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m] \leq \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t s^{m(k-1)} \mathbb{E}[\mathrm{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(1))]\, \frac{ds}{t}$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve

$k \geq 1$, notons $M_N^{(k)}$ la partie martingale de $\mathrm{tr}_N(H_N^k)$
La formule 2 (Crochet) $\Rightarrow$

$$\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m = \left(\frac{k^2}{N^2} \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{2k-2}(s))\, ds \right)^m$$

$$\overset{Jensen}{\leq} \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(s)) \frac{ds}{t}$$

$$\mathbb{E}[\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m] \leq \left(\frac{k^2 t}{N^2} \right)^m \int_0^t s^{m(k-1)} \mathbb{E}[\mathrm{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(1))] \frac{ds}{t}$$

Or

$$\mathbb{E}[\mathrm{tr}_N(H_N^{m(2k-2)}(1))] \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \sigma(x^{m(2k-2)})$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Donc $\mathbb{E}[\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m] \to 0$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Donc $\mathbb{E}[\langle M_N^{(k)} \rangle_t^m] \to 0$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Les inégalités de B.D.G.

M martingale locale nulle en 0. $p > 0$ réel. Il existe deux constantes c_p, $C_p > 0$ tels que pour tout temps d'arrêt T_a,

$$c_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_{T_a}^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[(M_{T_a}^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M \rangle_{T_a}^{\frac{p}{2}}]$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

Donc $\mathbb{E}[\langle M_N^{(k)}\rangle_t^m] \to 0$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Les inégalités de B.D.G.

M martingale locale nulle en 0. $p > 0$ réel. Il existe deux constantes c_p, $C_p > 0$ tels que pour tout temps d'arrêt T_a,

$$c_p\mathbb{E}[\langle M\rangle_{T_a}^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[(M_{T_a}^*)^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle M\rangle_{T_a}^{\frac{p}{2}}]$$

D'où

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(M_N^{(k)}(t))^{\frac{m}{2}}] \to 0$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq T}(M_N^{(k)}(t))^{\frac{m}{2}}] \to 0$$

La formule 1 (Ito) $\Rightarrow$

$$\mathrm{tr}_N(H_N^k(t)) = M_N^{(k)}(t) + \frac{k}{2}\sum_{i=1}^{k-1}\int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{i-1}(s))\,\mathrm{tr}_N(H_N^{k-i-1}(s))\,ds$$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq T} (M_N^{(k)}(t))^{\frac{m}{2}}] \to 0$$

La formule 1 (Ito) $\Rightarrow$

$$\mathrm{tr}_N(H_N^k(t)) = M_N^{(k)}(t) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{i-1}(s))\,\mathrm{tr}_N(H_N^{k-i-1}(s))\,ds$$

Par récurrence sur k, $\mathrm{tr}_N(H_N^k(t))$ converge dans $L^{\infty-}$ vers $\sigma_t(x^k)$ uniformément pour $t \in [0, T]$. $\square$

Lemme

$H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t uniformément pour $t \in [0, T]$.

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \le t \le T} (M_N^{(k)}(t))^{\frac{m}{2}}] \to 0$$

La formule 1 (Ito) $\Rightarrow$

$$\mathrm{tr}_N(H_N^k(t)) = M_N^{(k)}(t) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \mathrm{tr}_N(H_N^{i-1}(s))\, \mathrm{tr}_N(H_N^{k-i-1}(s))\, ds$$

Par récurrence sur k, $\mathrm{tr}_N(H_N^k(t))$ converge dans $L^{\infty-}$ vers $\sigma_t(x^k)$ uniformément pour $t \in [0, T]$. $\square$

Remarque

$N \sup_{0 \le t \le T} M_N^{(k)}(t)$ est bornée dans $L^{\infty-}$

Désormais,

$$\begin{aligned} X_N^{(n)}(t) &= N \operatorname{tr}_N(T_n(H_N(t), t)) \\ &= M_N^{(n)}(t) + A_N^{(n)}(t) \end{aligned}$$

$M_N^{(n)}(t)$: la partie martingale.
$A_N^{(n)}(t)$: la partie à variations finies.
On a $\sup_{0\leq t\leq T} M_N^{(n)}(t)$ bornée dans $L^{\infty -}$ par la remarque.

Désormais,

$$\begin{aligned} X_N^{(n)}(t) &= N \operatorname{tr}_N(T_n(H_N(t), t)) \\ &= M_N^{(n)}(t) + A_N^{(n)}(t) \end{aligned}$$

$M_N^{(n)}(t)$: la partie martingale.
$A_N^{(n)}(t)$: la partie à variations finies.
On a $\sup_{0\leq t\leq T} M_N^{(n)}(t)$ bornée dans $L^{\infty-}$ par la remarque.

But :

$$(X_N^{(1)}(t), ..., X_N^{(n)}(t))_{0\leq t\leq T} \overset{(d)}{\to} (\frac{1}{2}\beta_1(t), ..., \frac{\sqrt{n}}{2}\beta_n(t^n))_{0\leq t\leq T}$$

Lemme

$A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Lemme

$A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve (heuristique)

La formule 1 (Ito) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_N^{(n)}(t) &= \int_0^t N \operatorname{tr}_N(\partial_s T_n(H_N(s), s))\, ds \\ &\quad + \int_0^t N \operatorname{tr}_N \otimes \operatorname{tr}_N \left(L_0 T_n(s)(H_N(s), H_N(s)\right) ds \\ &= N \int_0^t (\hat{\mu}_s^{(N)}(\partial_s T_n) + \hat{\mu}_s^{(N)} \otimes \hat{\mu}_s^{(N)}(L_0 T_n))\, ds \end{aligned}$$

Lemme

$A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

Preuve (heuristique)

La formule 1 (Ito) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A_N^{(n)}(t) &= \int_0^t N \operatorname{tr}_N(\partial_s T_n(H_N(s), s))\, ds \\ &\quad + \int_0^t N \operatorname{tr}_N \otimes \operatorname{tr}_N \left(L_0 T_n(s)(H_N(s), H_N(s)\right)\, ds \\ &= N \int_0^t (\hat{\mu}_s^{(N)}(\partial_s T_n) + \hat{\mu}_s^{(N)} \otimes \hat{\mu}_s^{(N)}(L_0 T_n))\, ds \end{aligned}$$

Or

$$\hat{\mu}_s^{(N)} = \sigma_s + \hat{\epsilon}_s^{(N)}$$

avec $\hat{\epsilon}_s^{(N)}$ une mesure pontuelle centrée de l'ordre $O(\frac{1}{N})$.

Lemme

$A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

$$A_N^{(n)}(t) = N \int_0^t \left(\hat{\mu}_s^{(N)} \otimes \hat{\mu}_s^{(N)}(L_0 T_n) + \hat{\mu}_s^{(N)}(\partial_s T_n)\right) ds$$

$$= N \int_0^t \Big(\sigma_s \otimes \sigma_s(L_0 T_n) + \sigma_s(\partial_s T_n)$$

$$\hat{\epsilon}_s^{(N)} \otimes \sigma_s(L_0 T_n) + \sigma_s \otimes \hat{\epsilon}_s^{(N)}(L_0 T_n) + \hat{\epsilon}_s^{(N)}(\partial_s T_n) + o(\frac{1}{N})\Big) ds$$

Lemme

$A_N^{(n)}(t)$ tend vers 0 dans $L^{\infty-}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

$$A_N^{(n)}(t) = N \int_0^t (\hat{\mu}_s^{(N)} \otimes \hat{\mu}_s^{(N)}(L_0 T_n) + \hat{\mu}_s^{(N)}(\partial_s T_n))\, ds$$

$$= N \int_0^t \Big(\sigma_s \otimes \sigma_s(L_0 T_n) + \sigma_s(\partial_s T_n)$$

$$\hat{\epsilon}_s^{(N)} \otimes \sigma_s(L_0 T_n) + \sigma_s \otimes \hat{\epsilon}_s^{(N)}(L_0 T_n) + \hat{\epsilon}_s^{(N)}(\partial_s T_n) + o(\frac{1}{N})\Big)\, ds$$

Or

$$\begin{cases} \sigma_s \otimes \sigma_s(L_0 T_n) + \sigma_s(\partial_s T_n) = 0 \\ Id \otimes \sigma_s(L_0 T_n) + \sigma_s \otimes Id(L_0 T_n) + \partial_s T_n = cste \end{cases}$$

Donc $A_N^{(n)}(t) = o(1)$. $\square$

Lemme

$\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_t \xrightarrow[N \to \infty]{L^{\infty -}} \delta_{n,m} \frac{nt^n}{4}$ *uniformément pour* $t \in [0, T]$.

Lemme

$\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_t \xrightarrow[N\to\infty]{L^{\infty-}} \delta_{n,m} \frac{nt^n}{4}$ *uniformément pour* $t \in [0, T]$.

Preuve

Pour λ, μ dans un voisinage compact approprié de zéro,

$$\begin{aligned} &\langle \sum_n \lambda^n M_N^{(n)}, \sum_n \mu^n M_N^{(n)} \rangle_t \\ &= \langle \sum_n \lambda^n N \operatorname{tr}_N(T_n(H_N(t), t)), \sum_n \mu^n N \operatorname{tr}_N(T_n(H_N(t), t)) \rangle_t \\ &= N^2 \langle \operatorname{tr}_N \left(u(H_N, \cdot\,; \lambda)\right), \operatorname{tr}_N \left(u(H_N, \cdot\,; \mu)\right) \rangle_t \end{aligned}$$

Lemme

$\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)}\rangle_t \xrightarrow[N\to\infty]{L^{\infty-}} \delta_{n,m}\frac{nt^n}{4}$ *uniformément pour* $t \in [0, T]$.

$$\langle \sum_n \lambda^n M_N^{(n)}, \sum_n \mu^n M_N^{(n)}\rangle_t$$
$$= N^2 \langle \mathrm{tr}_N\left(u(H_N, \cdot\,; \lambda)\right), \mathrm{tr}_N\left(u(H_N, \cdot\,; \mu)\right)\rangle_t$$

Par la formule 2 (Crochet)

$$= \int_0^t \mathrm{tr}_N\left(\partial_x u(H_N(s), s; \lambda), \partial_x u(H_N(s), s; \mu)\right)\, ds$$

Lemme

$\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_t \xrightarrow[N\to\infty]{L^{\infty-}} \delta_{n,m} \frac{nt^n}{4}$ uniformément pour $t \in [0, T]$.

$$\langle \sum_n \lambda^n M_N^{(n)}, \sum_n \mu^n M_N^{(n)} \rangle_t$$

$$= \int_0^t \mathrm{tr}_N \left(\partial_x u(H_N(s), s; \lambda), \partial_x u(H_N(s), s; \mu) \right) ds$$

Lemme

$\langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)} \rangle_t \xrightarrow[N\to\infty]{L^{\infty-}} \delta_{n,m} \frac{nt^n}{4}$ *uniformément pour* $t \in [0, T]$.

$$\langle \sum_n \lambda^n M_N^{(n)}, \sum_n \mu^n M_N^{(n)} \rangle_t$$
$$= \int_0^t \mathrm{tr}_N \left(\partial_x u(H_N(s), s; \lambda), \partial_x u(H_N(s), s; \mu) \right) \, ds$$

Comme $H_N(t)$ converge dans $L^{\infty-}$ vers σ_t,

$$\xrightarrow{L^{\infty-}} \int_0^t \sigma_s \left(\partial_x u(\cdot, s; \lambda), \partial_x u(\cdot, s; \mu) \right) \, ds$$
$$= \frac{\lambda\mu t}{4(1-\lambda\mu t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nt^n}{4} (\lambda\mu)^n \qquad \square$$

Theorème (Knight asymptotique)

$(M_N^{(i)})_{i=1}^k$ une suite de k-uplets de martingales locales continues nulles en zéro telles que $\langle M_N^{(i)}\rangle_\infty = \infty$ pour tous N, i. On pose

$$\tau_N^{(i)}(t) = \inf\{s,\ \langle M_N^{(i)}\rangle_s > t\} \quad \textit{et} \quad \beta_N^{(i)} = M_N^{(i)}(\tau_N^{(i)})$$

Si pour tous t, $m \neq n$, on a en probabilité,

$$\lim_{N\to\infty} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)}\rangle_{\tau_N^{(m)}(t)} = \lim_{N\to\infty} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)}\rangle_{\tau_N^{(n)}(t)} = 0$$

alors $(\beta_N^{(i)})_{i=1}^k$ converge en loi vers un mouvement brownien de dimension k.

Theorème (Knight asymptotique)

$(M_N^{(i)})_{i=1}^k$ une suite de k-uplets de martingales locales continues nulles en zéro telles que $\langle M_N^{(i)}\rangle_\infty = \infty$ pour tous N, i. On pose

$$\tau_N^{(i)}(t) = \inf\{s,\ \langle M_N^{(i)}\rangle_s > t\} \quad \textit{et} \quad \beta_N^{(i)} = M_N^{(i)}(\tau_N^{(i)})$$

Si pour tous t, $m \neq n$, on a en probabilité,

$$\lim_{N\to\infty} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)}\rangle_{\tau_N^{(m)}(t)} = \lim_{N\to\infty} \langle M_N^{(m)}, M_N^{(n)}\rangle_{\tau_N^{(n)}(t)} = 0$$

alors $(\beta_N^{(i)})_{i=1}^k$ converge en loi vers un mouvement brownien de dimension k.

Le théorème permet de démontrer

$$(M_N^{(1)}(t), ..., M_N^{(n)}(t))_{0\le t\le T} \overset{(d)}{\to} (\frac{1}{2}\beta_1(t), ..., \frac{\sqrt{n}}{2}\beta_n(t^n))_{0\le t\le T} \quad \square$$

Theorème (démontré)

$$(Ntr_N(T_1(H_N(t),t)),...,Ntr_N(T_n(H_N(t),t)))_{t\in[0,T]}$$
$$\overset{(d)}{\to}(\frac{1}{2}\beta_1(t),...,\frac{\sqrt{n}}{2}\beta_n(t^n))_{t\in[0,T]}$$

ou autrement écrit,

$$(N\hat{\mu}_t^{(N)}(T_1),...,N\hat{\mu}_t^{(N)}(T_n))\overset{(d)}{\to}(\frac{1}{2}\beta_1(t),...,\frac{\sqrt{n}}{2}\beta_n(t^n))_{t\in[0,T]}$$

Corollaire

Soit f une fonction polynôme centrée pour σ. Alors $N\hat{\mu}_1^{(N)}(f)$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance

$$\frac{1}{4}\int f(x)(\mathcal{N}f)(x)\frac{\sigma(dx)}{4-x^2}$$

avec $\mathcal{N}$ l'opérateur de nombre sur $L^2(\frac{\sigma(dx)}{4-x^2})$.

Corollaire

Soit f une fonction polynôme centrée pour σ. Alors $N\hat{\mu}_1^{(N)}(f)$ converge en loi vers une variable gaussienne centrée de variance

$$\frac{1}{4}\int f(x)(\mathcal{N}f)(x)\frac{\sigma(dx)}{4-x^2}$$

avec $\mathcal{N}$ l'opérateur de nombre sur $L^2(\frac{\sigma(dx)}{4-x^2})$.

Preuve

Comme f est centrée,

$$f(x) = \sum_{p=1}^{n} \alpha_p T_p(x,1)$$

Le théorème appliqué à $t=1 \Rightarrow N\hat{\mu}_1^{(N)}(f)$ converge vers une variable gaussienne de variance $\sum_{p=1}^{n} \frac{p}{4}\alpha_p^2$. $\square$