Exposé : Théorème de Kaufman

cours de mesures géométriques à ENS, 2016

ZHU Tunan

Theorème 1 (Kaufman)**.** Soit $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d \geq 2$, alors p.s. $\forall A \subseteq [0, \infty)$, $\dim B(A) = 2 \dim A$

Le théorème vu au cours dit que si on fixe un fermé A, on a p.s. le doublement de dimension. Or le travail pour échanger $\forall$ et p.s. est souvent difficile, voire impossible dans certains cas. Par exemple, pour $U \sim \text{Unif}(0,1)$, on a $\forall x \in [0,1]$, p.s. U $\neq$ x, mais bien entendu pas p.s. $\forall x \in [0,1]$, $U \neq x$.

Dans la suite, on va d'abord introduire certains résultats du mouvement brownien, ensuite on montrera le théorème pour dimension $d \geq 3$, et de façon simailaire pour $d = 2$. On établira aussi une version du théorème de Kaufman pour dimension $d = 1$. Enfin, on donnera une application.

Propriété (Markov fort)**.** $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien avec filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ de dimension $d \geq 1$. Soit T un temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$. On pose $\forall t \geq 0$, $B_T(t) = \mathbf{1}_{T<\infty}(B(T+t) - B(T))$. Alors sous $\mathbb{P}(\cdot \mid T < \infty)$, $(B(t))_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$.

Theorème 2. $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d \geq 1$ partant de $x \in A := \{y \in \mathbb{R}^d : r \leq |y| \leq R\}$, avec $0 < r < R < \infty$. On note pour $s > 0$, $T_s = \inf\{t \geq 0,\ |B(t)| = s\}$. Alors

$$\mathbb{P}_x(T_r > T_R) = \begin{cases} \frac{|x|-r}{R-r} & d = 1 \\ \frac{\log|x| - \log r}{\log R - \log r} & d = 2 \\ \frac{|x|^{2-d} - r^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}} & d \geq 3 \end{cases}$$

On tend R vers ∞ et on obtient le corollaire suivant :

Corollaire. Soient $r > 0$ et $x \notin B(0, r)$. Alors

$$\mathbb{P}_x(T_r = \infty) = \begin{cases} 0 & d \leq 2 \\ 1 - \frac{r^{d-2}}{|x|^{d-2}} & d \geq 3 \end{cases}$$

Preuve. On pose pour x différent de 0 :

$$u(x) = \begin{cases} |x| & d = 1 \\ \log|x| & d = 2 \\ |x|^{2-d} & d \geq 3 \end{cases}$$

Pour un A défini dans le théorème, u est une fonction harmonique sur $\mathring{A}$ et continue sur A. Avec une connaissance sur les intégrales stochastiques (formule d'Ito notamment), c'est un raisonnement classique que $(u(B(t \wedge T)))_{t\geq 0}$, où $T = T_r \wedge T_R$, est une martingale locale bornée, donc une vraie martingale uniformément intégrable. Voir [2] pour ceux qui sont curieux. Par le théorème d'arrêt, on a

$$u(x) = \mathbb{E}_x[u(B(T))] \tag{$*$}$$

Pour obtenir $(*)$, on a choisi dans l'exposé une approche par le problème de Dirichlet pour contourner l'intégrale stochastique, voir [1] theorem 3.12.

Avec $(*)$, en posant $p = \mathbb{P}_x(T_r > T_R)$, on a $u(x) = (1-p)\,u(r) + p\,u(R)$ et on résoud p. □

On reviens au théorème 1 et on traite d'abord le cas $d \geq 3$.

Lemme 1. $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d \geq 3$. On prend $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ un cube centré en x de diamètre r. On définit

$$\begin{aligned} \tau_1^Q &= \inf\{t \geq 0 :\ B(t) \in Q\} \\ \tau_{k+1}^Q &= \inf\{t \geq \tau_k^Q + r^2 :\ B(t) \in Q\} \qquad \forall k \geq 1 \end{aligned}$$

Alors $\exists \theta = \theta(d) \in (0,1) :\ \forall z \in \mathbb{R}^d,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_z(\tau_{n+1}^Q < \infty) \leq \theta^n$.

Preuve. Il suffit de trouver θ tel que

$$\forall z \in \mathbb{R}^d,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}_z(\tau_{k+1}^Q = \infty \mid \tau_k^Q < \infty) \geq 1 - \theta$$

On peut supposer que $x = 0$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_z(\tau_{k+1}^Q = \infty \mid \tau_k^Q < \infty) &\geq \mathbb{P}_z(\tau_{k+1}^Q = \infty,\ |B(\tau_k^Q + r^2)| > r \mid \tau_k^Q < \infty) \\ &\overset{(1)}{=} \mathbb{E}_z[\mathbb{P}_{B(\tau_k^Q)}(\tau_2^Q = \infty,\ |\tilde{B}(r^2)| > r)] \\ &\geq \inf_{y \in \partial Q} \mathbb{P}_y(\tau_2^Q = \infty,\ |\tilde{B}(r^2)| > r) \\ &\geq \inf_{y \in \partial Q} \mathbb{P}_y(\tau_2^Q = \infty \mid |\tilde{B}(r^2)| > r) \inf_{y \in \partial Q} \mathbb{P}_y(|\tilde{B}(r^2)| > r) \end{aligned}$$

Pour (1) on a utilisé Markov fort, et $\tilde{B} := B_{\tau_k^Q}$ est un mouvement brownien partant de $B(\tau_k^Q)$, indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_k^Q}$. Ensuite, en remarquant que Q est inclus dans la boule $B(0, \frac{r}{2})$, on a

$$\inf_{y \in \partial Q} \mathbb{P}_y(|\tilde{B}(r^2)| > r) \geq \mathbb{P}(|rN_d| > \frac{3}{2} r) = \mathbb{P}(|N_d| > \frac{3}{2}) > 0$$

où N_d est une variable aléatoire gaussienne centrée de dimension d de matrice de covariance I_d. Ensuite, par Markov fort, on a

$$\inf_{y \in \partial Q} \mathbb{P}_y(\tau_2^Q = \infty \mid |\tilde{B}(r^2)| > r) \geq \mathbb{P}_{y_0}(T_{\frac{r}{2}} = \infty) = 1 - (\frac{1}{2})^{d-2} > 0$$

où y_0 est un point quelconque sur $\partial B(0, r)$, et on a utilisé le corollaire. □

Lemme 2. On note C_m l'ensemble des cubes dyadiques de coté 2^{-m} $(m \in \mathbb{N}^*)$ dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Alors, p.s. $\exists C = C(\omega) \in \mathbb{N} : \ \forall m \geq 1, \ \forall Q \in C_m, \ \tau^Q_{mC+1} = \infty$.

Preuve. Soit $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^d \theta^c < 1$.

$$\sum_{m\geq 1} \sum_{Q \in C_m} \mathbb{P}_z(\tau^Q_{cm+1} < \infty) \overset{\text{lemme1}}{\leq} \sum_{m\geq 1} \#|C_m| \theta^{cm} = \sum_{m \geq 1} (2^d \theta^c)^m < \infty$$

Par Borel-Cantelli, on a

$$\forall \omega \in \Omega \backslash N, \ \exists M = M(\omega) \in \mathbb{N}^* : \ \forall m \geq M, \ \forall Q \in C_m, \ \tau^Q_{cm+1} = \infty$$

où N est un ensemble négligeable. Or par lemme 1, $\mathbb{P}_z(\exists k : \ \tau^Q_{km+1} = \infty) = 1$, et ainsi $\mathbb{P}_z(\forall m \geq 1, \ \forall Q \in C_m, \ \exists k : \ \tau^Q_{km+1} = \infty) = 1$, ce qui nous donne un ensemble négligeable N'. On prend un $\omega \in \Omega \backslash (N \cup N')$, et on définit C comme le max de c et des k (il y en a un nombre fini), et on a $\forall m \geq 1, \ \forall Q \in C_m, \ \tau^Q_{mC+1} = \infty$ □

Preuve (théorème de Kaufman $d \geq 3$)**.** On fixe $\alpha < \frac{1}{2}$. p.s. $(B(t))_{t \geq 0}$ est $\alpha-$Höldérien sur tout l'intervalle $[0, N]$ avec N entier naturel. Alors $\dim(B(A \cap [0,N])) \leq \frac{1}{\alpha} \dim(A \cap [0, N])$. On tend $N \to \infty$ et $\alpha \to \frac{1}{2}$ (avec une suite) et on a l'inégalité inférieure.

Pour l'inégalité supérieure, il suffit de démontrer :

$$\text{p.s. } \forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \ \forall \mathrm{S} \subseteq [-\mathrm{N}, \mathrm{N}]^{\mathrm{d}}, \ \dim \mathrm{S} \geq 2 \dim \mathrm{B}^{-1}(\mathrm{S})$$

et on l'applique à $B(A) \cap [-N, N]$. Or, on remarque que pour un $a > 0$,

$$\dim(aS) = \dim S$$

$$\begin{aligned} 2 \dim B^{-1}(aS) &= 2 \dim\{s : B(s) \in aS\} = 2 \dim\{a^2 t : \frac{1}{a} B(a^2 t) \in S\} \\ &= 2 \dim(a^2 \tilde{B}^{-1}(S)) = 2 \dim \tilde{B}^{-1}(S) \end{aligned}$$

où $\tilde{B}(\cdot) = \frac{1}{a} B(a^2 \cdot)$ est un mouvement brownien. Donc il suffit de démontrer :

$$\text{p.s. } \forall \mathrm{S} \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{\mathrm{d}}, \ \dim \mathrm{S} \geq 2 \dim \mathrm{B}^{-1}(\mathrm{S})$$

Pour cela, on prend un ω tel que lemme 2 soit vrai. On prend $S \subseteq [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$. Soient $\beta > \dim S$ et $\delta > 0$.

Pour un $\epsilon > 0$, il existe un $\delta-$recouvrement de S par des cubes $\{Q_j, \ j \in \mathbb{N}\} \subseteq \cup_{m \geq 1} C_m$ et tel que $\sum_{m \geq 1} N_m (\sqrt{d} 2^{-m})^\beta < \epsilon$, avec N_m le nombre de Q_j dans C_m. Le lemme 2 implique que $B^{-1}(S)$ admet un δ^2-recouvrement qui consiste, pour m allant de 1 à ∞ et j allant de 1 à ∞, des intervalles $[\tau^{Q_j}_1, \tau^{Q_j}_1 + r^2], \ \cdots, \ [\tau^{Q_j}_{Cm}, \tau^{Q_j}_{Cm} + r^2]$. Ici $r^2 = d 2^{-2m}$ Soit $\gamma > \beta$, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} C m N_m (r^2)^{\frac{\gamma}{2}} &\leq C \sup_{m \geq 1} \{m (\sqrt{d} 2^{-m})^{\gamma - \beta}\} \sum_{m \geq 1} N_m (\sqrt{d} 2^{-m})^\beta \\ &\leq C \epsilon \sup_{m \geq 1} \{m (\sqrt{d} 2^{-m})^{\gamma - \beta}\} \end{aligned}$$

ceci étant vrai pour tout δ et ϵ, donc $\dim B^{-1}(S) \leq \frac{1}{2}\gamma$, et on tend β, γ vers $\dim S$ pour obtenir l'inégalité voulue. $\square$

Une remarque importante est que si on remplace le résultat du lemme 2 par $\tau^Q_{m^2C+1} = \infty$ au lieu de $\tau^Q_{mC+1} = \infty$, alors la preuve du théorème reste valide, car $\sup_{m\geq 1}\{m^2(\sqrt{d}2^{-m})^{\gamma-\beta}\}$ est aussi fini. Et en fait c'est ce qu'on va avoir pour le cas de dimension $d = 2$. On introduit maintenant lemme 3 et lemme 4 qui sont des equivalents de lemme 1 et lemme 2.

Lemme 3. $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d = 2$. $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ un cube centré en x de diamètre r. Alors il existe $c = c(R) > 0$ tel que pour $m \geq 1$ et $2^{-m-1} < r \leq 2^{-m}$, on a $\mathbb{P}_z(\tau^Q_{n+1} < T_R) \leq (1 - \frac{c}{m})^n \leq e^{-\frac{cn}{m}}$.

Preuve. On fait exactement comme dans lemme 1, pour les notations, voir la preuve du lemme 1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_z(\tau^Q_{k+1} \geq T_R \mid \tau^Q_k < T_R) &\geq \mathbb{P}_z(\tau^Q_{k+1} \geq T_R,\ |B(\tau^Q_k + r^2)| > r \mid \tau^Q_k < T_R) \\
&\geq \inf_{y\in\partial Q} \mathbb{P}_y(\tau^Q_2 \geq T_R \mid |\tilde{B}(r^2)| > r) \inf_{y\in\partial Q} \mathbb{P}_y(|\tilde{B}(r^2)| > r) \\
&\geq \mathbb{P}_{y_0}(T_{\frac{r}{2}} > T_R)\mathbb{P}(|N_2| > \frac{3}{2})
\end{aligned}$$

où y_0 est un point quelconque sur $\partial B(0, r)$. Et par le théorème 2, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{y_0}(T_{\frac{r}{2}} > T_R) &= \frac{\log r - \log \frac{r}{2}}{\log R - \log \frac{r}{2}} = \frac{1}{\log_2 R - \log_2 r + 1} \\
&\geq \frac{1}{\log_2 R + m + 2} \overset{(1)}{\geq} \frac{c(R)}{m\mathbb{P}(|N_2| > \frac{3}{2})} \qquad (\forall m \geq 1)
\end{aligned}$$

Pour que (1) soit vrai, il suffit de prendre un $c(R)$ suffisamment petit. Et finalement on a $\mathbb{P}_z(\tau^Q_{k+1} \geq T_R \mid \tau^Q_k < T_R) \geq \frac{c(R)}{m}$. $\square$

Lemme 4. Avec les mêmes notations que lemme 2, pour un $R > 0$, on a p.s. $\exists C = C(\omega) \in \mathbb{N} :\ \forall m \geq 1,\ \forall Q \in C_m,\ \tau^Q_{m^2C+1} \geq T_R$.

Preuve. Si C suffisamment grand,

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{Q\in C_m} \mathbb{P}_z(\tau^Q_{Cm^2+1} < T_R) \overset{\text{lemme3}}{\leq} \sum_{m\geq 1} \#|C_m|(e^{-\frac{c}{m}})^{Cm^2} = \sum_{m\geq 1}(2^d e^{-cC})^m < \infty$$

On applique Borel-Cantelli et on traite le nombre fini des cas qui restent. $\square$

La preuve du théorème de Kaufman pour $d = 2$ se découle naturellment, grâce à la remarque qu'on a fait.

On donne aussi la version $d = 1$. Sa preuve requiert des connaissaces sur le temps local, qui n'est pas simple à introduire, donc on admettra ses propriétés.

Theorème 3 (Kaufman d=1)**.** $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d = 1$, alors p.s. $\forall S_{\text{borélien}} \subseteq \mathbb{R},\ \dim B^{-1}(S) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\dim S$.

Preuve. Soit $(W(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension 1 indépendant de $(B(t))_{t\geq 0}$. On applique le théorème de Kaufman $d=2$ à $B'=(B,W)$, alors p.s. $\forall S\subseteq\mathbb{R}$,

$$\dim B^{-1}(S)=\dim B'^{-1}(S\times\mathbb{R})\leq\frac{1}{2}\dim(S\times\mathbb{R})\overset{\text{(j)}}{=}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\dim S$$

(j) : on a vu en cours $\dim(A\times B)\geq\dim A+\dim B$, et pour B borné, $\dim(A\times B)\leq\dim A+\dim_M B$. On applique à $A=S,\ B=[-N,N]$ et on tend $N\to\infty$.

On montre ensuite l'inégalité supérieure. Il suffit de considérer les S bornés. Soient $M>0$ et $S_{\text{borélien}}\subseteq[-M,M]$. On prend $\alpha<\dim S$. Le lemme de Frostman (et c'est en raison de lui qu'on doit prendre S borélien) donne l'existence d'une mesure de Radon μ portée par S et $C_0>0$ tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall r\in(0,1),\ \mu(B(x,r))\leq C_0r^\alpha$$

On considère L^a le temps local de $(B(t))_{t\geq 0}$ au niveau a, défini par

$$L^a(t)=\begin{cases}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\int_0^t\mathbf{1}_{a-\epsilon\leq B(s)\leq a+\epsilon}\mathrm{d}s & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

et l^a une mesure qui en découle : $L^a(z)=l^a((-\infty,z])$. On définit ν une mesure sur $B^{-1}(S)$ par $\nu(A)=\int\mu(\mathrm{d}a)l^a(A)$, pour tout A borélien. Pour un $\epsilon>0$, on admet la propriété höldérienne de L^a suivante : p.s. $\forall x\in[-M,M]$

$$\forall a\in[-M,M],\ \forall r\in(0,1),\ l^a(B(x,r))=L^a(x+r)-L^a(x-r)\leq C_1r^{\frac{1}{2}-\epsilon}$$

et on l'a également pour la trajectoire du mouvement brownien :

$$\text{p.s. }\forall x\in[-M,M],\ \forall r\in(0,1),\forall s\in[-r,r],\ |B(x+s)-B(x)|\leq C_2r^{\frac{1}{2}-\epsilon}$$

On en déduit $\forall x\in S\subseteq[-M,M],\ \forall r\in(0,1)$,

$$\begin{aligned}\nu(B(x,r))&\leq\int_{B(x)-C_2r^{\frac{1}{2}-\epsilon}}^{B(x)+C_2r^{\frac{1}{2}-\epsilon}}\mu(\mathrm{d}a)C_1r^{\frac{1}{2}-\epsilon}\\&\leq C_1r^{\frac{1}{2}-\epsilon}C_0(C_2r^{\frac{1}{2}-\epsilon})^\alpha=C_0C_1C_2^\alpha r^{(\frac{1}{2}-\epsilon)(1+\alpha)}\end{aligned}$$

On a l'inégalité ci-dessus vraie p.s. pour tout $S\subsetneq[-M,M]$. Le théorème de minoration de la dimension donne p.s. $\forall S\subsetneq[-M,M],\ \dim B^{-1}(S)\geq(\frac{1}{2}-\epsilon)(1+\alpha)$ et on tend $\epsilon\to 0,\ \alpha\to\dim S$. □

Application. $(B(t))_{t\geq 0}$ un mouvement brownien de dimension $d\geq 1$. On définit pour $x\in\mathbb{R}^d$, $T(x)=\{t\geq 0,\ B(t)=x\}$.

(1) Si $d\geq 2$, alors p.s. $\forall x\in\mathbb{R}^d,\ \dim T(x)=0$.

(2) Si $d=1$, alors p.s. $\forall x\in\mathbb{R},\ \dim T(x)=\frac{1}{2}$.

Preuve. (1) $\dim T(x)=\frac{1}{2}B(T(x))=\frac{1}{2}\dim\{x\}=0$

(2) $\dim T(x)=\dim B^{-1}(\{x\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\dim\{x\}=\frac{1}{2}$ □

Références

[1] P.Mörters and Y.Peres, *Brownian motion*, Cambridge Univ. Press, 2010

[2] J-F Legall, *Mouvement brownien, martingales et calcul stochastique*, Springer, 2013