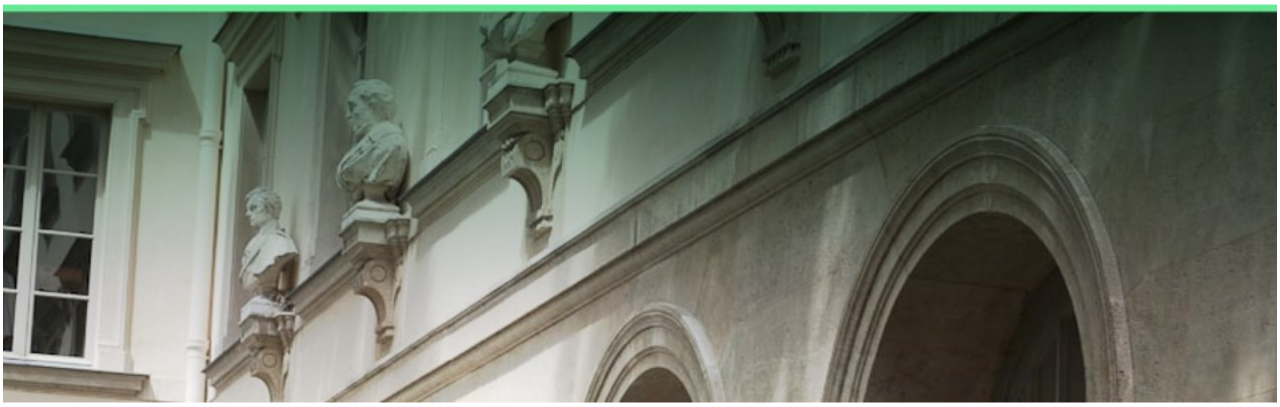
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

ENSEIGNEMENT

2020-2021



Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris cedex 05 | Tél : 01 44 32 31 72 | Mél : education@math.ens.fr

Le département de mathématiques et applications offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiants par an, dont une majorité d'élèves de l'ENS), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec les universités Sorbonne Université, Université de Paris, Université Paris-Dauphine PSL, Université de Paris-Saclay, Université de Paris 13, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Directeur de l'enseignement des mathématiques : Ariane Mézard

| Directeur des études des mathématiques : Raphaël Cerf

| Secrétariat de l'enseignement : Amélie Castelain

45 rue d'Ulm 75230 Paris cedex 05 |
Tél : 01 44 32 31 72 |
Page d'accueil : http://www.math.ens.fr/enseignement/|
Mél : education@math.ens.fr|

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION

OBJECTIFS

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématiciens purs et appliqués, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie,…). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

DÉBOUCHÉS

À la sortie de la formation, l'étudiant peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il peut également prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- chercheur en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- enseignant-chercheur à l'université ;
- ingénieur mathématicien dans l'industrie ;
- enseignant en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Ecoles d'ingénieurs, formations spécialisées...).

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ENS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.
Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

Candidature 2021/2022

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiants ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent. Toutes les informations se trouvent sur :

- le site enseignement des mathématiques : http://www.math.ens.fr/enseignement/
- ou sur le site l'École Normale Supérieure : http://www.ens.fr/une-formation-d-exception / admission-concours/concours-voie-universitaire

Le diplôme de l'ENS mention mathématiques

Les élèves et étudiants reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu qu'ils aient satisfait les conditions suivantes :

- l'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- l'obtention d'un master recherche de mathématique
- la validation de chacune des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- la validation de 72 ECTS en plus des diplômes nationaux de licence et de master, dont :
    - 24 ECTS de cours mathématiques
    - 18 ECTS de cours scientifiques non-mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives) en accord avec le tuteur.

Inscription à l'université

Après leur admission, les étudiants s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de leurs études, ils doivent en particulier obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;
- pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;
- à l'issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiants qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un directeur de recherche ainsi que des divers encadrants de l'université d'inscription (délégué aux thèses, directeur de l'école doctorale de rattachement, directeur du laboratoire d'accueil).

Tutorat

L'encadrement des étudiants en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un tuteur, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, sera affecté à chaque étudiant. Choisi aléatoirement en première année, il sera, pour les autres années, fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année. Le rôle du tuteur est d'aider l'étudiant à l'organisation de sa scolarité, de le conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études sera mis au point par l'étudiant, son tuteur et le directeur des études, et signé par ces parties. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement son tuteur.

Stage

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant à un environnement différent.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiants pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec son tuteur et les responsables du DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrants potentiels pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Les étudiants sont supposés contacter les encadrants étrangers proposés non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Séminaire « des mathématiques »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois après le thé du département de mathématiques et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches mathématiques.

Planning

Réunion de présentation des cours de 2ème année
Vendredi 4 septembre 2020 à 14h, Amphithéâtre Galois

Commission des études 2020, seconde session, lundi 21 Septembre 2021

Premier semeste:

Début des cours
Première année : lundi 21 septembre 2020
Deuxième année : lundi 7 septembre 2020

Vacances et jours fériés
Vacances de la Toussaint : du samedi 24 octobre au dimanche 1 novembre 2020
Vacances de Noël : du samedi 19 décembre au dimanche 3 janvier 2020

Fin des cours
Première année : vendredi 15 janvier 2020
Deuxième année : vendredi 8 janvier 2020

Examens du premier semestre

Première année : du lundi 18 janvier au vendredi 22 janvier 2020
Deuxième année : du lundi 11 janvier au vendredi 15 janvier 2020
(attention, ces dates sont approximatives, consulter l'agenda)

Réunion de présentation du second semestre
Mercredi 27 janvier 2021 à 17h, Amphithéâtre Galois

Vacances d'hiver (inter-semestre)
Samedi 23 janvier au dimanche 31 janvier 2021

<u>Deuxième semestre</u>

Début des cours
Lundi 1 février 2021

Vacances et jours fériés
Vacances de printemps : du samedi 17 avril au dimanche 2 mai 2021

Fin des cours
Vendredi 21 mai 2021

Examens du second semestre
Lundi 31 mai au vendredi 4 juin 2021
(attention, dates approximatives, consulter l'agenda)

Fin de l'année scolaire

Semaine des exposés de mathématiques et des entretiens individuels de première années
Du lundi 14 juin au vendredi 18 juin 2021

Commissions des études 2021:
1ère session (première et deuxième années) : mercredi 23 juin 2021

ENSEIGNEMENT

Organisation de la formation

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec le tuteur, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrants du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie.

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiants et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur et du directeur des études ou de l'enseignement pour tous les choix concernant leur programme d'études.

Filière mathématiques

Première année

Les étudiants sont inscrits en troisième année de licence (L3). Ils suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en seconde année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiants sont inscrits en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiants dont l’avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l’étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L’inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l’élève. Avec son tuteur, l’élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d’année, les étudiants composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d’un domaine de recherche. Ce mémoire fait l’objet d’une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l’ENS avec mention ès Mathématiques.

■ Filières pluridisciplinaires

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l’ENS. Organisées conjointement entre le département de mathématiques et les départements de physique, d’informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiants motivés de poursuivre une double formation ;
- aux étudiants encore indécis de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. En deuxième année, ils s’orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d’informatique. Les élèves entrés par le concours info s'inscrivent au département d’informatique, les élèves entrés par le concours math au département de mathématiques. Ils ont un tuteur dans leur département d'inscription. En deuxième année, ils s’orientent soit vers les mathématiques soit vers l’informatique et rejoignent le département de leur choix.

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheurs capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Objectifs du cursus

Les étudiants issus de la filière mathématiques/biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Ils auront appris à décortiquer la littérature spécialisée, suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et initier dialogue et collaboration avec les biologistes dans leurs laboratoires. Les deux années de cursus permettent aux élèves concernés de continuer, suivant leur parcours,

- ou bien en suivant un M2 de mathématiques de la modélisation,
- ou bien en suivant un M2 de biologie ou de sciences cognitives.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s'inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de neurosciences. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tous les étudiants du département de mathématiques ; l'inscription à ces cours n'engage donc pas les étudiants concernés à l'exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

RÈGLES D'OBTENTION

| *Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone.* |

- PREMIÈRE ANNÉE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

Commun pour toutes les filières	4 cours de niveau licence : (1) o Algèbre 1 o Analyse complexe o Intégration et probabilités o Topologie et calcul différentiel	12 ECTS x 4 = 48 ECTS
Filière Mathématique	Mémoire et exposé de 1ère année	12 ECTS
Filière Math/Physique	Cours spécifique : Dynamique et Modélisation	
Filière Math/Informatique	Cours spécifique : Apprentissage statistique	
Filière Math/Biologie	Mémoire et exposé d'interface math-biologie	
Total		60 ECTS

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental

L'obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s'il ne compte pas pour la L3) parmi :
  - Analyse complexe
  - Analyse fonctionnelle
  - Géométrie différentielle
  - Logique

- Un groupe de lecture parmi :
  - Introduction aux algèbres de Lie
  - Introduction à l'analyse semiclassique
  - La méthode probabiliste

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.

Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 18 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.

Filières pluridisciplinaires

Mathématiques/physique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 de physique :

- des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  - Physique statistique des systèmes en équilibre (1er sem) (9 ECTS)
  - Introduction à la mécanique quantique (1er sem) (9 ECTS)
  - Relativité et électromagnétisme (2ème sem) (9 ECTS)
  - Hydrodynamique (2ème sem) (9 ECTS)
  - Physique du solide (2ème sem) (9 ECTS)

- le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheurs des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/informatique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

Semestre 1 :

Algorithmique et programmation (9 ECTS)
Systèmes numériques (9 ECTS)
Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

Semestre 2 :

Systèmes et réseaux (**obligatoire**, 9 ECTS)
Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
Initiation à la cryptologie (9 ECTS)
Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
Bases de données (9 ECTS)
Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique :

Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un chercheur et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/biologie

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours d'Introduction aux sciences du vivant (S1)
- Le cours de M1 d'Analyse fonctionnelle (S2, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2nde année)

- Le cours de Modélisation (S2)
- Le groupe de lecture en biologie : Modélisation des systèmes biologiques (S2)
- L'école d'été de biologie de Marseille-Luminy ou bien un stage de neurosciences

■ DEUXIÈME ANNÉE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : o Algèbre 2 o Analyse complexe [(1)] o Analyse fonctionnelle [(3)] o Géométrie différentielle [(3)] o Logique [(3)] o Processus stochastiques [(2)]	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : o Analyse des équations aux dérivées partielles o Mathématiques des données o Modélisation mathématique et numérique [(3)] o Statistiques [(2)] o Systèmes dynamiques o Topologie algébrique [(3)]	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours recommandé pour la filière maths/biologie
(3) Cours accessible dès la 1ère année

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)

- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  - Corps réels clos et structures o-minimales
  - Du microscopique au macroscopique : validité et résolution d'EDP de la mécanique des fluides
  - Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles
  - Mouvements Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux.

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1e année pour les élèves inscrits directement en 2e année
- Un cours dans une discipline autre que les mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.

  | *Remarque : Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 18 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière mathématiques/biologie

- Trois cours à valider parmi :
  - Écologie/évolution (S1)
  - Biologie cellulaire (S1)
  - Neurosciences du Cogmaster (S1)
  - Machine learning du Cogmaster (S2)

- *o* Un projet long en biologie ou en neurosciences

TROISIÈME ANNÉE

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)
- La composition du *mémoire de Diplôme*
  Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Présentation du domaine de recherche*, présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).
- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - cours de M2
  - *Convexité cachée en analyse non-linéaire*, Yann Brenier
  - *Fibrés de Higgs et représentations de groupes de surfaces*, Nicolas Tholozan
  - *Géométrie algébrique réelle*, Olivier Benoist
  - *Introduction à la topologie symplectique*, Claude Viterbo
- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif)*.

| *Remarque : Une expérience à l'étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

COURS DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2020/2021

PREMIÈRE ANNÉE

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 (L3, 12 ECTS) — A. Ducros SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — *A. Vanhaecke ENS*

• Intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) — P. Bernard ENS
(70h : 42h cours + 28h TD) — *C. Labbé PSL*

• Topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) — D. Chelkak ENS
(70h : 42h cours + 28h TD) — *L. Vacossin ENS*

• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) : — R. Branchereau ENS
Introduction aux Algèbres de Lie

• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) : — R. Mahfouf ENS
La méthode probabiliste

• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) :
Introduction à l'analyse semiclassique — L. Vacossin ENS

• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Logique (M1, 12 ECTS) — A. Deloro SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — G. *Sebilet UP*

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) — N. Bergeron ENS
(70h : 42h cours + 28h TD) — *M. Jézéquel ENS*

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) — L. Moonens Paris Saclay
(70h : 42h cours + 28h TD) — *L. Gassot ENS*

• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) — A. Oancea SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — *P. Laurain UP*

• Modélisation mathématique et numérique (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS)
(56h : 56h cours/TP) — B. Maury Paris Saclay

• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :*
Topologie algébrique (12 ECTS) — G. Horel Paris 13
(63h : 35h cours + 28h TD) — *T. Bénard ENS*

• *Cours spécifique cursus maths/physique :* Dynamique et Modélisation (12 ECTS) (52h cours)	C. Viterbo ENS E. Dormy CNRS/ENS
• *Cours spécifique cursus maths/info :* Apprentissage statistique (12 ECTS) (35h cours + 24hTD)	P.Gaillard ENS
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :* Modélisation des systèmes biologiques (12 ECTS)	A. Véber Polytechnique R. Ferrière ENS D. Thieffry ENS

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un encadrant appartenant le plus souvent au département de mathématiques de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.
Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;

- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiants réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.
Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Cours non mathématiques

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 18 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques. Toute autre proposition pourra être étudiée avec le tuteur.* |

- économie - http://www.economie.ens.fr
  - Introduction aux théories de la croissance économique
  - Introduction à l'économétrie
  - Economie pour scientifiques
- biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/
  - Frontiers in biology
  - Génétique et Biologie Moléculaire
  - Neurosciences
  - Océanographie
  - Biologie cellulaire
- physique - http://www.phys.ens.fr
  - Physique statistique des systèmes en équilibre
  - Introduction à la mécanique quantique
  - Éléments de mécanique analytique
  - Relativité et électromagnétisme
  - Hydrodynamique
  - Mécanique des milieux continus
  - Introduction à l'astrophysique
  - Physique du solide
  - Optique
  - Physique des particules
  - Ordres de grandeur, lois d'échelles et méthodes perturbatives

– informatique - http://diplome.di.ens.fr/

- Langages formels, calculabilité et complexité
- Algorithmique et programmation
- Langages de programmation et de compilation
- Systèmes numériques
- Système d'exploitation
- Lambda calcul et logique informatique (à l'ENS Paris Saclay)
- Théorie de l'information et codage
- Initiation à la cryptologie
- Sémantique et application à la vérification de programmes
- Bases de données

– études cognitives - http://cognition.ens.fr

- Introduction to Cognitive Neuroscience
- Introduction to Cognitive and Computational Neuroscience

■ SECONDE ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 (M1, 12 ECTS) — A. Mézard ENS
(70h : 42h cours + 28h TD) — *A. Etève ENS*

• Analyse des équations aux dérivées partielles (M1, 12 ECTS) — Y. Brenier CNRS/ENS
(63h : 35h cours + 28hTD) — *T. Gallouët INRIA*

• Logique (M1, 12 ECTS) — A. Deloro SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — *G. Sébilet* UP

• Processus stochastiques (M1, 12 ECTS) — G. Giacomin UP
(70h : 42h cours + 28h TD) — R. Mahfouf *ENS*

• Statistique (M1, 12 ECTS) — S. Gaïffas UP
(63h : 35h cours + 28h TD) — *A. Ben Hamou SU*

• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) — R. Cerf ENS
(63h : 35h cours + 28h TD) — *Y. Chaubet Paris Saclay*

• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) — G. Peyré CNRS/ENS
(63h : 35h cours + 28h TD) — *G. Rochette ENS*

• Mathématiques pour l'entreprise (M1, 6 ECTS) — B. Maury Paris Saclay

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) — L. Moonens Paris Saclay
(70h : 42h cours + 28h TD) — *L. Gassot ENS*

• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) — A. Oancea SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — *P. Laurain ENS*

• Modélisation mathématique et numérique (M1, 12 ECTS) — B. Maury Paris Saclay
(56h : 56h cours/TP)

• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) — G. Horel Paris 13
(63h : 35h cours + 28h TD) — *T. Bénard ENS*

• Cours avancé : Corps réels clos et structures o-minimales — Z. Chatzidakis CNRS
(M1, 6 ECTS + 6 ECTS) (18h cours + 18h groupe de travail)

• Cours avancé : Mouvement Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux
(M1, 6 ECTS + 6 ECTS) (18h cours + 18h groupe de travail) M. Bauer CNRS/CEA

• Cours avancé : Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles E. Giroux CNRS
(M1, 6 ECTS + 6 ECTS) (18h cours + 18h groupe de travail)

• Cours avancé : EDP de la mécanique des fluides I. Gallagher ENS
(M1, 6 ECTS + 6 ECTS) (18h cours + 18h groupe de travail)

Groupes de travail

Premier semestre

Homologies persistante en analyse topologique de données	V.Lebovici ENS
Transport optimal	Y.Brenier CNRS/ENS
Le H-Principe de Gromov	C. Viterbo ENS
Représentations des groupes linéaires p-adiques	A. Eteve ENS
Courbes elliptiques	O. de Gaay Fortman ENS
Système dynamiques et géométrie non-archimédienne	L.Pille Schneider ENS
Zéros de fonctions analytiques gaussiennes	L.Dumaz CNRS
Outils mathématiques pour l'apprentissage statistique	S. Gaïffas UP

Cours avancés, deuxième semestre :

Corps réels clos et structures o-minimales Z. Chatzidakis CNRS

Du microscopique au macroscopique : validité et résolution d’EDP de la mécanique des fluides
I. Gallagher ENS

Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles E. Giroux CNRS/ENS

Mouvements Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux. M. Bauer CEA

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Cours non mathématiques

Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 18 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques. Toute autre proposition pourra être étudiée avec le tuteur.

Voir la liste des cours proposés par le département de mathématiques page 22. On peut choisir aussi, en accord avec le tuteur, d'autres cours des départements scientifiques de l'ENS.

- Troisième année

Cours de mathématiques

Deuxième semestre :

Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS. Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription.

- Convexité cachée en analyse non-linéaire (DENS, 9 ECTS) Y. Brenier CNRS/ENS
- Déformation des groupes discrets dans les groupes de Lie (DENS, 9 ECTS) N. Tholozan CNRS/ENS
- Géométrie algébrique réelle (DENS, 9 ECTS) O. Benoist CNRS/ENS
- Introduction à la topologie symplectique (DENS, 9 ECTS) C. Viterbo ENS

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2020/20021

■■■■■

| *Algèbre 1* |

(Antoine Ducros)

1) Vocabulaire ensembliste élémentaire, relations d'équivalence, quotients.
2) Groupes, sous-groupes, quotient d'un groupe par un sous-groupe, sous-groupes distingué.
Exemples de base : groupes de bijections, groupes linéaires...
Notions d'anneau et de corps (on se contentera dans ce cours des définitions et de quelques exemples, sans étude systématique).
3) Propriétés de Z, arithmétique élémentaire, groupes abéliens de type fini.
4) Groupe opérant sur un ensemble, groupe symétrique. Application : théorèmes de Sylow.
5) Groupes libres, groupes définis par générateurs et relations.
6) Suites exactes, produit semi-direct, dévissages des groupes (Jordan-Hölder, groupes résolubles, groupes nilpotents...).
7) Généralités sur les représentations de groupes, après quelques rappels d'algèbre linéaire. Sous-représentations, représentations quotient, représentations induites, linéarisation d'une action de groupe...
Représentations irréductibles, indécomposables, lemme de Schur, existence et unicité de la décomposition

en somme directe de représentations irréductibles sous des hypothèses convenables.
Caractère d'une représentation.
8) Produit tensoriel d'espaces vectoriels, puis de représentations linéaires.
9) Représentations complexes des groupes finis, orthogonalité des caractères, construction de tables de caractères.
10) Représentations complexes du groupe symétrique.
11) Formes bilinéaires ; cas symétrique et alterné. Formes quadratiques, théorème de Witt. Formes sesquilinéaires (sur C).
12) Étude des sous-groupes de GLn associés aux formes bilinéaires : groupes orthogonaux, symplectiques, unitaires...

■ ■ ■ ■ ■

| *Algèbre 2* |

(Ariane Mézard)

Ce cours a pour but de fournir les bases d'algèbre commutative nécessaires à tout étudiant désirant poursuivre en théorie algébrique des nombres ou en géométrie algébrique. Nous aborderons donc les notions suivantes :

- Anneaux commutatifs : anneaux intègres, anneaux de Bézout, anneaux principaux et euclidiens, anneaux factoriels, anneaux de polynômes, de séries formelles, anneaux d'entiers algébriques, anneaux de Dedekind, anneaux de valuation. Applications arithmétiques.

-- Idéaux dans les anneaux commutatifs. : idéaux premiers, idéaux maximaux, divisibilité, factoris ation, base de Gröbner,. Applications géométriques.

-- Opérations sur les anneaux commutatifs et leurs modules : introduction au langage des catégories. Lemme de Yoneda, localisation, anneaux et modules noetheriens, structure des modules sur un anneau principal, produit tensoriel. Lemme de Nakayama. Modules injectifs et projectifs.

– Introduction à la géométrie algébrique : ensembles algébriques affines, topologie de Zariski, Nullstellensatz, spectre maximal et spectre premier.

-- Théorie de Galois : extensions algébriques et transcendantes de corps, corps finis et codes linéaires, extensions séparables et normales, extensions galoisiennes finies et infinies, groupes de Galois. Applications en géométrie arithmétique.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse complexe* |

(Nicolas Bergeron)

I. Fonctions holomorphes et analytiques : (1) Définition; (2) Equations de Cauchy-Riemann; (3) Formulation géométrique; (4) Fonctions analytiques complexes, caractère holomorphe des sommes de séries entières, Exemples; (5) Théorème de Cauchy; (6) Lemme de Goursat.

II. Les grands théorèmes : (1) Formule de la moyenne et théorème de Liouville; (2) Zéros des fonctions holomorphes et prolongement analytique; (3) Allure locale, théorème de l'application ouverte; (4) Principe du maximum et Lemme de Schwarz; (5) Suites de fonctions holomorphes; (6) Intégrales dépendant d'un paramètre holomorphe, exemple de la fonction Gamma; (7) Produits infinis de fonctions holomorphes; (8) Produits de Weierstrass.

Intermède : Disque et demi-plan de Poincaré, homographies.

III. Fonctions méromorphes, résidus : (1) Développement en série de Laurent et singularités isolées; (2) Fonctions méromorphes; (3) Formule des résidus; (4) Calculs d'intégrales; (5) Prolongement méromorphe de la fonction zeta de Riemann.

IV. Fonctions holomorphes et topologie : (1) Formes différentielles exactes et fermées (en degré 1); (2) Intégrale d'une 1-forme fermée le long d'un chemin continue; (3) Invariance par homologie (4) Groupe fondamental; (5) Chaînes, cycles, bords et homologie; (7) Simple connexité et primitives.

V. Indices, théorème de Rouché et théorème des résidus généralisé : (1) Indices; (2) Formule des résidus généralisée; (3) Stabilité du nombre de zéros; (4) Approximation par des fractions rationnelles.

VI. Représentation conforme : (1) Equivalence conforme; (2) Compacité dans l'espace des fonctions holomorphes; (3) Théorème de représentation conforme; (4) Caractérisation des ouverts simplement connexes du plan; (5) Continuité au bord de l'application de Riemann.

VII. Revêtements, fonctions modulaires et valeurs des fonctions holomorphes : (1) Introduction aux revêtements; (2) Revêtement universel et classification; (3) Revêtement modulaire de C-{0,1}; (4) Théorèmes de Picard.

VII. Fonctions harmoniques : (1) Fonctions harmoniques et holomorphes; (2) Propriétés élémentaires; (3) Formule de Green-Riesz; (4) Problème de Dirichlet.

VIII. Fonctions elliptiques et modulaires : (1) Définition et propriétés; (2) Fonction p de Weierstrass; (3) Fonctions et formes modulaires; (4) Zéros et pôles des fonctions modulaires; (5) Algèbre des formes modulaires; (6) Fonction j; (7) Sommes de carrés.

Références : Jean-Pierre Demailly Variable complexe (accessible en ligne : http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/variable_complexe.pdf)
Greene—Krantz Function Theory of One Complex Variable
Henri Cartan Théorie élémentaire des fonctions analytiques

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse des équations aux dérivées partielles* |

(Cyril Imbert)

Le but du cours est de présenter quelques outils classiques de l'analyse des équations aux dérivées partielles (EDP). Après l'étude de quelques EDP linéaires importantes (transport, Laplace/Poisson, chaleur, ondes)
-- Chapitre 1, nous verrons comment construire des solutions à des équations linéaires qui sont "elliptiques" et à coefficients continus (Chapitre 2), puis nous construirons des solutions à des équations non-linéaires d'ordre 1 (Chapitre 3). Nous verrons ensuite comment définir une notion de solutions faibles aux équations de Hamilton-Jacobi, puis comment construire de telles solutions et montrer qu'elles sont uniques (Chapitre 4). Après avoir passé en revue un certain nombre d'outils d'analyse (Chapitre 5), nous conclurons en montrant un théorème de Krylov et Safonov de la théorie de la régularité elliptique (Chapitre 6).

Pour la bibliographie :

Chapitre 1 : L.-C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics. 19. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xvii, 662 p. (1998).
Chapitre 2 : N. Krylov, Lectures on parabolic and elliptic equations in Hölder spaces, Graduate Studies in Mathematics. 12. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). xii, 164 p. (1996).
Chapitre 3 : Evans, PDEs (voir plus haut)
F. John. Partial differential equations. 4th ed. Applied Mathematical Sciences, Vol. 1. New York – Heidelberg -Berlin: Springer-Verlag. X, 249 p. DM 49.50; 23.10 (1982).
Chapitre 4 : G. Barles. Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi. Mathématiques &

Applications (Berlin). 17. Paris: Springer-Verlag. ix, 194 p. (1994).
M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 (1992), no. 1, 1–67.
Polycopié avec J. Droniou. Solutions de viscosité et les solutions variationnelles d'EDP non-linéaires, cours de M2, Montpellier.
Chapitre 5 (pour les théorèmes de Rademacher et la formule de l'aire) : L.-C. Evans and Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
Chapitre 6 : L. Caffarelli, X. Cabré. Fully nonlinear elliptic equations. Colloquium Publications. 43. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). v, 104 p. (1995).

■■■■■

| *Analyse fonctionnelle* |

(Laurent Moonens)

Dans ce cours, qui comportera deux parties principales, on étudiera les bases de l'analyse fonctionnelle abstraite et les principaux espaces de fonctions utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles.
Le cours commencera par l'analyse abstraite des espaces vectoriels topologiques (localement convexes), avec une attention particulière portée aux espaces lisses et uniformément convexes (dont font partie les espaces de Lebesgue non « extrêmes ») ; ce sera l'occasion d'aborder des résultats classiques importants d'analyse fonctionnelle (théorèmes de Banach-Alaoglu, de Krein-Milman etc.).
Après avoir étudié les espaces de distributions, on s'intéressera ensuite aux espaces de Sobolev et de fonctions à variation bornée.

■■■■■

| *Atelier Maths-entreprise* |

(Bertrand Maury / Cyril Letrouit)

Le point de départ cet atelier est le suivant: une première séance est consacrée à la présentation par un industriel d'une problématique à laquelle il est confronté. Cette problématique ne se présente pas nécessairement sous la forme forme d'un problème mathématisé, mais on peut espérer qu'une formalisation mathématique permette d'apporter des éléments de réponses, par utilisation d'outils existants,

ou introduction d’outils conceptuels nouveaux, avec éventuellement utilisation de la simulation numérique pour approfondir l’exploration .
Le groupe de participants disposera alors de quelques semaines, en toute autonomie, pour apporter des éléments de réponse à ce problème, qui seront présentés lors d’une séance de clôture à l’intervenant industriel, et feront l’objet d’un rapport de synthèse des pistes explorées.

Cet « exercice » a vocation à familiariser les élèves avec la démarche de modélisation ex nihilo, qui consiste à formaliser un problème concret donné sous forme brute, et à explorer diverses pistes d’études en confrontant systématiquement les résultats théoriques et/ou numériques à la réalité.
Ce module d’ouverture s’adresse potentiellement à tous les élèves, y compris à ceux qui n’envisagent aucunement de se diriger vers le monde de l’entreprise, et / ou qui pourraient avoir du mal à concevoir que leur bagage puisse leur permettre d’apporter des éléments de réponse à une problématique industrielle.

| *Convexité cachée en analyse non-linéaire* |

(Yann Brenier)

Site : http://www.math.ens.fr/~brenier/

Les méthodes d'analyse convexe sont simples, puissantes et robustes mais paraissent souvent d'utilisation limitée.
L'objet du cours est d'étudier des exemples significatifs où une structure convexe est dissimulée qui, une fois dévoilée, ouvre la voie à des résultats d'existence et d'unicité globales inattendues.
On discutera notamment les équations de Monge-Ampère (qui interviennent en géométrie), celles d'Euler (en mécanique des fluides) et de Born-Infeld (en électromagnétisme et physique des hautes énergies).

bibliographie: un polycopié sera disponible en ligne.

Convex analysis methods are simple, powerful and robust but they often seem of limited use.
The purpose of the course is to study significative examples for which a convex structure is hidden which, once revealed, open the way to unexpected global existence and uniqueness results.
We will discuss the Monge-Ampere equations (which are important in Differential Geometry), the Euler equations (in Fluid Mechanics) and the Born-Infeld equations (in Electromagnetism and High Energy Physics).

▪▪▪▪▪

| *Cours avancé : Corps réels clos et structures o-minimales* |

(Zoé Chatzidakis)

Site : **http://www.math.ens.fr/~zchatzid/**

La notion d'o-minimalité provient de la théorie des modèles, et a été introduite par Anand Pillay et Charles Steinhorn en 1986. Les structures o-minimales sont des structures (dans un certain langage) munies d'un ordre total, et telles que tout sous-ensemble définissable de la structure soit une union finie d'intervalles et de points. A partir de cette propriété simple on montre de nombreux résultats d'uniformité, de décomposition cellulaire, etc.

Les structures o-minimales ont montré leur importance dans de nombreux domaines mathématiques. En géométrie réelle ou analytique, en théorie des nombres (Pila-Wilkie et ses applications), et plus récemment en combinatoire.

Les exemples les plus connus sont le corps ordonné des nombres réels (R,+,x,0,1,

Nous passerons ensuite aux structures o-minimales et à leurs propriétés :

Définition de l'o-minimalité.
Propriétés de base
Décomposition cellulaire
Propriété de Vapnik-Chervonenkis et invariants associés

Puis aux applications, suivant le temps restant :
Le corps des réels avec fonctions analytiques restreintes est o-minimal.
Reparamétrisation et Théorème de Pila-Wilkie.
Définition de l'exponentielle dans certains corps o-minimaux.

Prérequis : il serait utile (mais pas indispensable) de connaître les rudiments de théorie des modèles (cf mes notes de cours sur ma page web, chapitre 2 et surtout chapitre 3). Un peu d'algèbre, ainsi que des notions d'analyse de base.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Du microscopique au macroscopique : validité et résolution d'EDP de la mécanique des fluides* |

(Isabelle Gallagher)

Pour prévoir le mouvement d'un fluide (que ce soit un fluide géophysique comme l'atmosphère ou l'océan, l'eau s'écoulant d'un tuyau ou encore l'air autour d'une aile d'avion), il faut écrire des équations décrivant son mouvement, et les résoudre. Ces deux questions soulèvent des problèmes mathématiques qui pour beaucoup d'entre eux sont encore ouverts aujourd'hui. Dans ce cours nous étudierons ces deux aspects : l'écriture et la validité des équations du mouvement d'une part, et leur résolution d'autre part.

- Ecrire des équations décrivant l'évolution en temps d'un phénomène physique, c'est d'abord choisir la bonne échelle de description : en 1900, David Hilbert a posé dans son 6ème problème la question de concilier les équations de Newton (datant du 18 siècle, régissant le mouvement de chacun des atomes constituant le fluide au niveau microscopique) et celles de Navier-Stokes (datant du 19ème siècle, utilisées couramment encore aujourd'hui et décrivant l'évolution de quantités macroscopiques comme la vitesse, la densité, la température du fluide). Dans ce cours nous établirons tout d'abord le lien formel entre ces deux descriptions, en passant par la description mésoscopique de Boltzmann, puis démontrerons des théorèmes de passage à la limite de l'une vers l'autre. Les méthodes employées relèvent de l'analyse des EDP, d'un peu de combinatoire et de probabilités (références [Lan, SR,G-SR-T])

- Résoudre une équation d'évolution, c'est démontrer qu'étant données des conditions initiales, aux bords etc, il existe une unique solution à cette équation, et trouver son temps maximal d'existence. Pour l'équation de Boltzmann comme pour Navier-Stokes, ce problème est largement ouvert. Nous étudierons les méthodes classiques de résolution de ces équations : solutions fortes [B-C-D,Uk], solutions faibles ([DiP-Lions,Ler]) et suivant le temps disponible nous analyserons des articles récents concernant le comportement (en grand temps ou au voisinage du temps d'explosion) des solutions des équations de Navier-Stokes.

Quelques références :

[B-C-D] H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin, Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[DiP-Lions] R. DiPerna et P.-L. Lions, On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability, Ann. of Math. (2) 130 (1989), no. 2, 321-366.

[G-SR-T] I. Gallagher, L. Saint Raymond et B. Texier,. From Newton to Boltzmann: hard spheres and short-range potentials, Zurich Lect. in Adv. Math., 18 (2014), EMS.

[Lan] O. E. Lanford, Time evolution of large classical systems. In ``Dynamical systems, theory and applications'', Lecture Notes in Physics, ed. J. Moser, 38 (1975), Springer-Verlag, Berlin.

[Ler] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Matematica, 63 (1933), 193-248.

[SR] L. Saint-Raymond, Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1971, (2009) Springer, Berlin.

[Uk] S. Ukai, Solutions of the Boltzmann equation, Patterns and waves, Stud. Math. Appl., 18, North-Holland, Amsterdam, (1986), 37-96.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles* |

(Emmanuel Giroux)

Le but de ce cours est de discuter de notions et d'idées géométriques qui servent à analyser et résoudre certains systèmes d'équations et d'inégalités aux dérivées partielles. Les thèmes suivants seront notamment abordés : théorie des obstructions et classes caractéristiques, connexions et courbure, espaces de jets, holonomie, transversalité, approximation holonome, intégration convexe….

On présentera aussi les applications classiques (retournement de la sphère, plongements isométriques C^1...).

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Mouvement Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux* |

(Michel Bauer)

Site:
https://www.ipht.fr/Phocea/Pisp/index.php?nom=michel.bauer

Même si les mathématiciens de l'antiquité avaient développé des idées remarquablement modernes pour calculer longueurs, surfaces et volumes, la première construction rigoureuse de l'intégrale, due à Bernhard Riemann, date du milieu du XIX siècle. Sa définition de ∫â–'fdx tient en quelques lignes, et il caractérise complètement la classe des fonctions f pour lesquelles l'intégrale existe. Depuis cette date, motivés par des considérations abstraites mais aussi par des questions pratiques, les mathématiciens n'ont pas cessé de rechercher des généralisations de la notion d'intégrale. Même en restant dans le cadre d'une variable, donner un sens à ∫â–'fdg pour des classes de plus en plus vastes d'intégrandes f et d'intégrateurs g reste d'actualité.
Pour citer la direction la plus connue, la théorie de la mesure à permis de traiter dans un cadre général le cas où f est mesurable et g est à variation bornée (i.e. la différence de deux fonctions croissantes) ; c'est la théorie de Lebesgue-Stieltjes.
Traiter des intégrandes et des intégrateurs aléatoires est un autre dévelop¬pement qui a conduit au calcul stochastique. Dans ce cadre les intégrateurs sont souvent à variation non-bornée, une autre extension qui à motivé des travaux jusqu'à nos jours. Le cours proposé est une introduction à ces aspects, illustrée à chaque étape par l'exemple du mouvement Brownien. Nous définirons l'intégrale d'Itô, dont le cadre est probabiliste, donnerons ses propriétés élémentaires et quelques applications. Nous construirons aussi, dans le cadre déterministe, l'intégrale de Young et montrerons comment elle échoue, mais de peu, à traiter le cas Brownien. Nous traiterons enfin sa récente et fructueuse généralisation au cas des intégrales de chemins rugueux.
La littérature sur le calcul stochastique est immense. Nous recommandons [Øks03] et [Kuo06] dont les chapitres pertinents pour ce cours sont d'un niveau adapté. Parmi les livres plus avancés, on peut citer [RY05] ou [KS00] par exemple. La littérature sur les chemin rugueux est bien moins étendue. Nous recommandons [FH14] dont les chapitres pertinents pour ce cours sont très lisibles. À un niveau plus avancé, on pourra consulter [FV10].

Références
[FH14] Peter K. Friz and Martin Hairer, A Course on Rough Paths, Universitext, Springer, 2014.
[FV10] Peter K. Friz and Nicolas B. Victoir, Multidimensional stochastic processes as rough paths, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2010.
[KS00] Ioannis Karatsas and Steven E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Graduate Texts in Mathematics, no. 113, Springer, 2000.
[Kuo06] Hui-Hsiung Kuo, Introduction to stochastic integration, 1 ed., Universitext, Springer, 2006.

[Øks03] Bernt Øksendal, Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications, 6 ed., Universitext, Springer, 2003.
[RY05] Daniel Revuz and Marc Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, 3 ed., Grundlehren der matematischen Wissenschaften, vol. 293, Springer, 2005.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours d'Anglais pour les scientifiques* |

(Département ECLA)

Le département ECLA vous propose un cours d'Anglais pour scientifiques que nous vous recommandons.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière maths - physique : Dynamique et Modélisation* |

(C. Viterbo, E. Dormy)

Site : http://www.math.ens.fr/~dormy/DYN/
Les problèmes simples de mécanique, impliquant peu de degrés de liberté, peuvent généralement être modélisés à l'aide de systèmes couplés d'équations différentielles ordinaires. Bien que simples, ces systèmes mènent à une dynamique particulièrement riche et à des situations parfois imprédictibles ; c'est le chaos déterministe.
De manière plus surprenante, la dynamique des systèmes complexes (comme les écoulements atmosphériques ou océaniques, la circulation des courants électriques dans les planètes et les étoiles, et bien d'autres encore) peut également être décrite en termes de systèmes dynamiques.
Ce cours introductif se concentrera sur les aspects mathématiques de ces modèles dynamiques, les problèmes physiques qui les motivent et les difficultés introduites par la construction de solutions numériques approchées.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière maths-informatique : Apprentissage statistique* |

(Pierre Gaillard)

L'apprentissage statistique est une discipline en plein essor à l'interface de l'informatique et des mathématiques appliquées (probabilitéss / statistiques, optimisation, etc.) et qui joue aujourd'hui un rôle majeur en matière d'innovation technologique.

A la différence d'un cours de statistique traditionnel, l'apprentissage statistique se préoccupe particulièrement de l'analyse de données de grande dimension ainsi que de l'efficacité des algorithmes pour traiter d'importants volumes de données telles que rencontrées dans des domaines d'applications divers tels l'analyse d'image et du son, le traitement automatique du langage, la bioinformatique ou la finance.

L'objectif du cours est de présenter les théories et algorithmes majeurs de l'apprentissage statistique. Les méthodes abordéees reposeront en particulier sur des arguments d'analyse convexe.

Les séances de TDs (dont plus de la moitié seront réalisées sur machines) donneront lieu à des implantations simples des algorithmes vus en cours et à une application à différents domaines comme la vision ou le traitement du langage.

Page du cours à lire attentivement : https://www.di.ens.fr/appstat/

■ ■ ■ ■ ■

| *Fibrés de Higgs et représentations de groupes de surfaces* |

(Nicolas Tholozan)

Site: https://www.math.ens.fr/~tholozan/coursM2.html

Soit Sune surface de Riemann compacte. La *correspondance de Hodge non-abélienne* établit une équivalence de catégories entre des objets de nature holomorphe: les *fibrés de Higgs* sur S et des objets purement topologiques: les représentations linéaires de son groupe fondamental.

Après avoir présenté la correspondance et les deux théorèmes d'analyse géométrique sur lesquels elle repose, nous verrons ses applications à la description des \emph{variétés de caractères} du groupe fondamental de S Un objectif sera de décrire la topologie de l'espace des classes de conjugaisons de représentations à valeurs dans **PSL**(2,**R**).

Si le temps le permet, nous mentionnerons quelques généralisations de la correspondance (aux variétés kählériennes compactes, aux surfaces épointées...).

Références

[1]Kevin Corlette, Flat G-bundles with canonical metrics, *Journal of differential geometry* 28(3), 1988, p. 361--382.
[2] Nigel Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface. *Proceedings of the London Mathematical Society* 3(1), p. 59--126.
[3] Nigel Hitchin, Lie groups and Teichmüller space Topology 31(3), 1992, p. 449--473.
[4] Carlos Simpson, Higgs bundles and local systems, *Publications Mathématiques de l'IHES,* 75, 1992, p. 5--95.

| *Géométrie algébrique réelle* |

(Olivier Benoist)

Site : http://www.math.ens.fr/~benoist/coursgeometriereelle.html .

Une variété algébrique réelle est le lieu des zéros d'une famille d'équations polynomiales à coefficients réels. Si cette variété est non singulière, l'ensemble des solutions complexes (resp. réelles) de ces équations est une variété algébrique complexe lisse (resp. une variété différentielle). Le thème principal du cours sera l'interaction entre la géométrie de la première et la topologie de la seconde. On abordera notamment le théorème de Nash–Tognoli: toute variété différentielle compacte est l'ensemble des points réels d'une variété algébrique réelle. On étudiera également de ce point de vue les sous-variétés des variétés algébriques réelles.

Bibliographie :

J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy : Real Algebraic geometry.
F. Mangolte : Variétés algébriques réelles.

■ ■ ■ ■ ■

| *Géométrie différentielle* |

(Alexandru Oancea)

Variétés différentielles :
Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes.

Formes différentielles :
Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle :
Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces :
Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie:

J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013.

Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

■ ■ ■ ■ ■

| Groupe de lecture : Introduction aux algèbres de Lie |

(Romain Branchereau)

Une algèbre de Lie est un espace vectoriel muni d'une application bilinéaire satisfaisant certaines conditions, appelée un crochet de Lie.
Lorsque l'on souhaite étudier une fonction réelle on est souvent amené à regarder sa droite tangente à certains points pour savoir par exemple si la fonction est croissante ou non. De manière analogue, les algèbres de Lie apparaissent naturellement comme une approximation linéaire de certains espaces plus compliqués (plus précisément les espaces tangents de groupes de Lie sont des algèbres de Lie). Ainsi, elles encodent de nombreuses informations concernant la géométrie de ces espaces et leur étude est donc indispensables dans beaucoup de domaines, allant de la théorie des nombres à la physique théorique.

Dans ce groupe de lecture nous couvrirons les bases sur la théorie les algèbres de Lie jusqu'à la classification des algèbres de Lie semi-simples.

Référence: James E. Humpheys, Introduction to Lie Algebras and Representation
Theory, Graduate texts in Mathematics vol.9, Springer, 1972.

■ ■ ■ ■ ■

| Groupe de lecture : Introduction à l'analyse semiclassique. |

(Lucas Vacossin)

Ce groupe de lecture a pour objectif de familiariser les élèves avec les outils de l'analyse semiclassique.

Nous tâcherons de suivre les tous premiers chapitres du très complet Semiclassical Analysis de M. Zworski. Nous commencerons par présenter les outils fondamentaux de l'analyse semiclassique. Celle-ci a pour but d'étudier les propriétés de l'équation de Schrödinger dans la limite semiclassique, à savoir, regarder le comportement des solutions dans la limite "h tend vers 0". L'idée derrière l'analyse semiclassique est le principe de correspondance onde/particule et à ce titre, celle-ci cherche à relier les dynamiques classiques des particules aux évolutions quantiques des fonctions d'onde. L'analyse semiclassique est également particulièrement fructueuse quand il s'agit d'étudier des phénomènes dans la limite des hautes fréquences (ou hautes énergies). C'est dans cette optique que ce groupe de lecture s'aventurera dans des applications de l'analyse semiclassique à l'équation des ondes amortie sur le tore.
Support : Semiclassical Analysis, M. Zworski, AMS.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : La méthode probabiliste* |
(Rémy Mahfouf)

La méthode probabiliste, popularisée par Paul Erdös, désigne l'utilisation de techniques probabilistes pour traiter des problèmes "déterministes" en mathématiques discrètes. Souvent, il s'agit, quand on veut montrer l'existence d'un objet satisfaisant certaines propriétés, de choisir cet objet de manière aléatoire et de montrer qu'il vérifie les propriétés voulues avec probabilité strictement positive.

Malgré l'apparente simplicité de cette idée, les contextes dans lesquels elle s'applique sont variés (combinatoire, théorie des graphes mais aussi théorie des nombres, logique, codes correcteurs...) et les outils probabilistes utilisés (méthodes du premier et du second moment, martingales, inégalités de concentration...) sont fondamentaux en probabilités.

[1] Alon, N., Spencer, J. The probabilistic method. J. Wiley & sons, New York, 2008.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Modélisation mathématique des systèmes biologiques* |

(Amandine Véber et Denis Thieffry)

Le but est de discuter à travers des présentations d'articles des questions biologiques auxquelles la modélisation peut contribuer et différents outils mathématiques que l'on peut utiliser dans ce but. 3 thèmes différents seront abordés, chacun sur 4 séances.

Les présentations des étudiants seront supervisées par des chercheurs en mathématiques et en biologie, spécialistes de ces domaines.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Calcul des variations* |

(Patrick Bernard)

On introduira quelques thèmes du calcul des variations, la méthode directe, des notions de convexité, la gamma-convergence,.. sans doute en suivant le livre "Homogenization of multiple integrals", de Braides et Defranceschi.

prérequis : topologie et calcul diff, intégration et probabilité, et idéalement analyse fonctionnelle.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Courbes Elliptiques et le Dernier Théorème de Fermat* |

(Olivier De Gaay Fortman)

Une courbe elliptique complexe est en gros une courbe lisse dans C^2 qui est aussi un groupe. En tant que telle, elle est donnée par l'ensemble des solutions complexes d'une équation polynomiale à deux variables à coefficients complexes, par exemple y^2 = x^3-x. La loi de groupe sur les points d'une telle courbe est construite géométriquement, ce qui rend la théorie des courbes elliptiques très riche. En effet, on peut étudier la géométrie algébrique de la courbe, la structure comme variété complexe (c'est un tore) et l'arithmétique associée: plus généralement on peut définir une courbe elliptique par un polynôme avec des coefficients dans n'importe quel corps (en particulier les nombres rationnels ou un corps fini). Les courbes elliptiques apparaissent largement en géométrie algébrique, en géométrie différentielle, en cryptographie, et en théorie des nombres. Par exemple, Andrew Wiles a utilisé la théorie des courbes elliptiques pour prouver le Dernièr Théorème de Fermat.

Dans ce groupe de travail, nous couvrirons les sujets suivants: la base de la géométrie algébrique, la définition d'une courbe elliptique, sa géométrie et sa loi de groupe, la structure de variété complexe sur les points complexes, la reduction modulo p, et le Théorème de Mordell-Weil. Si le temps le permet, nous pourrons également aborder la Conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer et le lien entre les courbes elliptiques et les formes modulaires.

Milne - Elliptic Curves (2006)
Silverman - The Arithmetic of Elliptic Curves (2009)
Fulton - Algebraic Curves (2008)
Hartshorne - Algebraic Geometry (1977) - (le premier chapitre)

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Homologie persistante en analyse topologique de données : théorie et applications* |

(Vadim Lebovici)

Contenu : L'objectif de ce groupe de travail sera de découvrir la théorie et les applications de l'homologie persistante, un outil phare de l'analyse topologique de données, destiné à extraire de l'information topologique d'un nuage fini de points.

- D'un point de vue théorique, on présentera les modules de persistance, leur "code-barres", i.e les résultats de décomposition des modules de persistance (ce sera l'occasion de découvrir la théorie des représentations de carquois) et les résultats de stabilité qui y sont liés. Un module de persistance est obtenu lorsque l'on considère les groupes d'homologie d'une famille paramétrée croissante d'espaces topologiques.
- D'un point de vue pratique, on abordera d'abord les aspects algorithmiques liés à la construction et aux calculs des code-barres, puis on étudiera l'apport de l'homologie persistante dans trois domaines :

l'inférence géométrique (comprendre la structure d'un objet géométrique inconnu à partir la connaissance d'échantillons finis de points sur cet objet), la segmentation (clustering), et les signatures des espaces métriques (comparaison quantitative entre jeux de données). Au cours du groupe de travail, des applications de ces outils dans le domaine scientifique, médical ou de l'entreprise seront présentées.
- Si le temps le permet, on abordera les résultats et les questions que soulèvent une généralisation de ces outils dont le besoin se fait sentir en pratique : l'homologie multi-persistante.

Feuilleter l'introduction de la référence ci-dessous vous donnera un bonne aperçu de ce que recouvre l'homologie persistante.

Prérequis : Aucun. Les élèves ayant suivi le cours de topologie algébrique découvriront des applications concrètes de ce domaine, mais il n'est pas nécessaire d'avoir suivi ce cours pour suivre le groupe de travail. Seules l'intuition et la connaissance des propriétés des groupes d'homologie seront nécessaires pour comprendre les constructions abordées par la suite, et nous les rappellerons lors d'une séance introductive.

Référence principale : Steve Oudot, Persistence theory, from quiver representations to data analysis.
- Téléchargeable depuis la page web de S. Oudot : https://geometrica.saclay.inria.fr/team/Steve.Oudot/
- Disponible à la bibliothèque

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Outils mathématiques pour l'apprentissage statistique* |

(Stéphane Gaïffas)

Le but de ce groupe de travail est de travailler sur certains outils et résultats mathématiques en lien avec l'étude théorique des algorithmes d'apprentissage statistique. On retiendra de façon non-exhaustive les grands thèmes suivants :

* Calcul des probabilités, inégalités de concentration, matrices aléatoires
* Géométrie en grande dimension
* Optimisation convexe et non-convexe
* Statistique mathématiques
* Théorie de la décision

Le groupe de travail utilisera quelques livres sur ces sujets, mais également des publications récentes.

Quelques références :

- C. M. Bishop, Pattern recognition and machine learning. Springer (2006)
- S. Boucheron, G. Lugosi, and P. Massart, Concentration inequalities: A nonasymptotic theory of independence. Oxford university press (2013)
- S. Bubeck, Convex Optimization: Algorithms and Complexity, In Foundations and Trends in Machine Learning (2015)
- Friedman, J., Hastie, T. and Tibshirani, R., The elements of statistical learning. New York: Springer series in statistics (2001).
- K. Murphy, Machine Learning, A Probabilistic Perspective. MIT Press (2012)
- R. Vershynin, High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics (2018)

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Représentations des groupes linéaires p-adiques.* |

(Arnaud Eteve)

Représentations des groupes linéaires p-adiques
Le but de ce groupe de travail sera d'étudier les représentations de GLn(Qp) du point de vue algébrique et on visera en particulier le résultat de Bernstein et Deligne sur la décomposition du centre de cette catégorie. Le centre est ici l'analogue de l'algèbre des fonctions centrales sur les groupes finis et dont les caractères contiennent l'information des représentations irréductibles.
Ces groupes sont le pendant p-adique des groupes de Lie et leurs représentations apparaissent aussi bien en théorie des nombres qu'en analyse harmonique. L'approche algébrique que nous considérerons a le mérite de réduire certaines de ces questions à des problèmes algébriques.
Une stratégie générale pour étudier les catégories de représentations consiste à isoler une classe de sous-groupes et à décrire les représentations induites depuis ces sousgroupes.
Dans notre situations les sous-groupes en question seront des produits de copies de GLm(Qp) pour des m plus petits plongés diagonalement dans GLn(Qp).
On commencera par développer un peu de formalisme catégorique puis on suivra le livre de David Renard - Représentations des groupes réductifs p-adiques - en libre accès sur son site.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Système dynamiques et géométrie non-archimédienne* |

(Léonard Pille Schneider)

Soit f : C^n -> C^n une application polynomiale (et donc holomorphe). On s'intéresse à la dynamique de f, c'est-à-dire le comportement asymptotique pour n grand des itérées f^n = f \circ … \circ f.
Plutôt que d'étudier la dynamique directement dans l'espace complexe habituel, on peut munir C de la valeur absolue triviale, telle que tout nombre complexe non nul soit de norme 1. Cette valeur absolue munit C d'une structure de corps non-archimédien, et la théorie de Berkovich permet alors d'associer C^n un espace analytique non-archimédien, sur lequel f induit un système dynamique non-archimédien.
Le but de ce groupe de travail est d'étudier la dynamique de telles applications lorsque n=1 ou 2, où la dynamique non-archimédienne se ramène à l'étude d'un système dynamique sur un graphe infini, ce qui permet en retour d'obtenir des résultats non-triviaux sur la dynamique holomorphe de f.

Prérequis: analyse complexe, un peu de théorie des anneaux

Références:
Dynamics on Berkovich spaces in low dimensions, Mattias Jonsson, dans Berkovich Spaces and applications, Ducros, Favre, Nicaise
The Valuative Tree, C. Favre, M. Jonsson, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1853.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Transport Optimal* |

(Yann Brenier)

Le problème du transport optimal a été posé par Monge en 1781 : il s'agit de déplacer une densité de probabilité (concrètement, pour Monge, un déblai de terre) vers une autre (un remblai), en minimisant un certain coût.
Ce problème d'optimisation semble a priori d'intérêt scientifique et de contenu mathématique limités.

Pourtant, il s'en est suivi, surtout depuis les années 1980-90, une foule de travaux mathématiques reliant et impliquant de multiples domaines de recherche : analyse fonctionnelle, géométrie, systèmes dynamiques, équations aux dérivées partielles, probabilités, statistique et traitement des données.

On abordera les résultats fondamentaux de la théorie :
formulation originale de Monge et reformulation convexe de Kantorovich,
formulations dynamiques eulérienne et lagrangienne, interprétation en termes de géométrie riemannienne.

Ensuite, on examinera quelques applications : inégalités fonctionnelles et géométriques (isopérimétrique, Sobolev, Sobolev logarithmique), reformulation d'équations aux dérivées partielles (de la chaleur, des milieux poreux, d'Euler et même d'Einstein), en lien avec la théorie des fluides fondée par Euler dès 1757 et « géométrisée » par Arnold en 1966.

Livres de référence :
F. Santambrogio. Optimal Transport for Applied Mathematicians. Birkhaüser- Springer 2015.
C. Villani, Topics in Optimal Transportation. American Mathematical Society 2003.
C. Villani, Optimal Transport: Old and New. Springer 2008.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Zéros de fonctions analytiques gaussiennes* |

(L.Dumaz)

L'objet de ce groupe de travail est d'étudier certains processus ponctuels aléatoires. Le plus naturel est le processus ponctuel de Poisson, qui peut être vu comme la limite de points tirés uniformément aléatoirement dans une grande région. D'un autre point de vue, n'importe quelle collection finie de points correspond aux zéros d'un polynôme bien choisi. Dans ce système de coordonnées, il est naturel de considérer des coefficients aléatoires indépendants.
Nous allons examiner la limite de ces polynômes aléatoires et de leurs zéros. Ces limites sont très différentes des processus de Poisson et laissent apparaître une répulsion entre leurs points.

Nous suivrons principalement le livre « Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes » disponible en ligne : http://math.iisc.ernet.in/~manju/GAF_book.pdf

■ ■ ■ ■ ■

| *Intégration et Probabilités* |

(Patrick Bernard)

Le cours commencera par une étude des suites de jets de dés, qui sera 'occasion à la fois d'introduire quelques techniques probabilistes et de motiver les questionnements sur l'existence des mesures.

Ensuite, nous montrerons l'existence des mesures utiles (mesures produits, mesure de de Lebesgue), donnerons les grands théorèmes d'intégration.

Pour finir, nous reviendrons aux probabilités et montrerons la loi forte des grands nombres dans un cadre plus général, ainsi que le théorème de la limite centrale.

Références:
Il existe de nombreux livres d'introduction à la théorie de la mesure
et/ou aux probabilités. Le plus proche du cours est sans doute :

Billingsley - Probability and Measure.

■ ■ ■ ■ ■

| *Introduction aux sciences du vivant* |

(Morgane Thomas-Chollier)

Ce cours d'introduction vise à permettre à des non-biologistes de s'approprier les connaissances fondamentales nécessaires à toute compréhension des modes d'organisation, de fonctionnement et d'évolution du vivant. Il constitue un pré-requis nécessaire pour suivre la plupart des autres cours destinés aux non-biologistes et constitue la première étape de filières mixtes avec la biologie. Les généraux objectifs sont les suivants :

• permettre une compréhension en profondeur de ce qui fait l'originalité, l'unité et la diversité du vivant
• donner les informations essentielles sur la machinerie centrale, responsable des phénomènes d'hérédité, d'expression de l'information génétique et d'adaptation, et sur ses mécanismes de contrôle et leurs

dérèglements éventuels
• fournir une introduction aux mécanismes-clefs impliqués dans l’origine des espèces et de leur évolution
• illustrer par quelques exemples les méthodologies qui permettent de constituer ce savoir, et leurs limites

Thèmes abordés :
Unité du vivant : chimie du vivant, protéines et acides nucléiques, organisation cellulaire, métabolisme, membranes, signalisation et communication cellulaires, cycle cellulaire, hérédité, de l’ADN aux protéines, régulation de l’expression génique et médecine moléculaire, développement et morphogenèse.

Diversité du vivant : Individus, populations, communautés, écosystèmes : variation phénotypique et propriétés émergentes des populations. Réseaux d’interactions entre populations : structure, robustesse, évolution. Diversité des communautés et fonctionnement des écosystèmes. Evolution : marqueurs génétiques, notion d’espèce et principes de la reconstruction phylogénétique. Histoire des caractères et innovation évolutive. Evolution de la coopération et niveaux de sélection. Processus de spéciation.

Méthodes pour l’étude et la manipulation des gènes et des génomes : Méthodes de base (recombinaison in vitro, cartographie, séquençage..). Clonage moléculaire (principes, stratégies d’isolement de gènes, manipulation de gènes isolés). Organismes génétiquement modifiés (transgenèse, invalidation, mutation et remplacement de gènes, considérations éthiques)

Évaluation : Examen écrit incluant questions de cours et exercices
Support de cours : Life, The Science of Biology (Savada)

■ ■ ■ ■ ■

| *Introduction à la topologie symplectique* |

(Claude Viterbo)

Présentation

La topologie symplectique étudie les propriétés topologiques des objets de la géométrie symplectique: variétés symplectiques et de contact, sous-variétés lagrangiennes, flots Hamiltoniens. Elle a des relations avec les systèmes dynamiques, géométrie algébrique réelle ou complexe. La topologie symplectique s'est développée de manière spectaculaire dans les 35 dernières années et un trimestre lui sera consacré à l'IHP d'avril à juillet 2021. Ce cours constitue en une introduction aux résultats de base de la topologie symplectique par la méthode des fonctions génératrices ce qui permet d'introduire rapidement les capacités symplectiques et leurs applications. Dans une seconde partie du cours (à partir d'avril), on montrera comment le point de vue de la théorie des faisceaux de Kashiwara et Shapira permet de généraliser ces méthodes dans un cadre plus vaste et de faire le lien avec la théorie de Floer.

Contenu
Géométrie symplectique linéaire, différentielle
Indice de Maslov
Fonctions génératrices
Capacités symplectiques et applications
Théorie des faisceaux, support singulier

Prérequis
E. WAGNER, Théorie de l'homologie
O. BIQUARD, Géométrie différentielle et riemanienne
ou bien le cours accéléré de Paris-Saclay
R. LECLERCQ, Variétés différentielles et formes différentielles
Bibliographie

J. Milnor. Topologie from the differentiable viewpoint. Princeton Univ. Press
C. Godbillon. Éléments de topologie algébrique. Hermann
V.I. Arnold. Méthodes mathématiques de la mécanique classique (ou sa version anglaise Mathematical Methods...). Editions Mir/ Springer-Verlag
D. Salamon et D.McDuff. Introduction to symplectic topology. Oxford University Press
H. Hofer et E.Zehnder. Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics. Birkh\"auser

■ ■ ■ ■ ■

| *Logique* |

(Adrien Deloro)

Ce cours est accessible aux étudiants de première année.
Il couvre les bases de la logique, avec une approche résolument mathématique.

1. Logique générale, théorie de la démonstration

Concept de définissabilité
Logique «du premier ordre» (aussi appelée «calcul des prédicats»)
Déduction naturelle
Correction, complétude et compacité

2. Éléments de théorie des modèles
Constructions de modèles
Ultraproduits
Techniques de va-et-vient
Applications algébriques

3. Phénomènes d'incomplétude
Problèmes d'internalisation
Théorèmes d'incomplétude

4. Quelques points sur une axiomatique due à Zermelo et Fraenkel
Axiomes ZF et variantes
Formalisation des ordinaux et des cardinaux
Arithmétique transfinie
Modèles intérieurs classiques et discussion de l'hypothèse du continu

Bibliographie:
Aucun traité ne recouvre exactement ce programme, et beaucoup sont d'inspiration moins ouvertement mathématique.
On peut néanmoins conseiller :
-- en langue française, le traité de Cori-Lascar ;
-- en langue anglaise, le texte d'Enderton ou de Shoenfield.
Ces références seront affinées en cours de semestre pour des points précis.

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques des données* |

(Gabriel Peyré)

Ce cours présente un tour d'horizon de méthodes mathématiques et numériques pour la science des données, avec des applications en imagerie, apprentissage statistique, vision par ordinateurs et informatique graphique. La présentation du cours alterne entre l'exposition de la théorie et l'implémentation sur machine des algorithmes. Les aspects théoriques couvrent le calcul des variations, l'analyse convexe, les problèmes inverses et le transport optimal. Ces éléments théoriques seront présentés conjointement à leurs applications à des problèmes tels que la super-résolution en imagerie médicale, la classification en apprentissage supervisé, et l'échantillonnage compressé pour la conversion analogique-numérique des signaux. La validation se fera par un mini-projet (avec lecture d'un article, tests numériques et un rapport), ainsi qu'un examen écrit. Le support pour les parties numériques et informatiques du cours est le site www.numerical-tours.com, qui présente des implémentations Matlab/Python/Julia des méthodes numériques.

Bibliographie :
* A Wavelet Tour of Signal Processing (3rd ed.), Stéphane Mallat, Academic Press, 2010.
* The Numerical Tours of Signal Processing, Gabriel Peyré, see www.numerical-tours.com
* Optimal Transport for Applied Mathematicians, Filippo Santambrogio, Springer, 2016
* Computational Optimal Transport, Gabriel Peyré, Marco Cuturi, Justin Solomon, to appear, 2017.

■ ■ ■ ■ ■

| *Modélisation mathématique et numérique* |

(Bertrand Maury)

Ce cours propose une introduction à la modélisation mathématique, qui consiste, à partir d'une réalité observée, à construire des problèmes de nature mathématique qui encodent une partie des phénomènes sous-jacents, à développer des outils abstraits pour étudier ces modèles, ainsi que des stratégies numériques permettant de calculer des solutions approchées des équations obtenues, en vue de « tester » l'adéquation des modèles à la réalité observée.

Cette démarche nous amènera à visiter (ou revisiter) un certain nombre d'objets et cadres mathématiques :
- équations différentielles ordinaires (existence et unicité de solutions, stabilité, comportement asymptotique),
- équations aux dérivées partielles,
- optimisation sous contrainte (formulation duale, multiplicateurs de Lagrange)
- une partie significative du cours sera aussi dédiée à des développement plus récents en transport optimal de mesures (formulation originale de Monge, et reformulation de Kantorovich).

En termes d'applications nous aborderons des modèles classiques (phénomènes de diffusion, de transport, propagation d'ondes, modèles SIR en épidémiologie, comme ceux qui ont été utilisés de façon intensive pour la modélisation de l'épidémie de Covid19, …), et des domaines plus exotiques ou spécialisés : trafic routier, mouvements de foules, propagation d'opinion dans les réseaux sociaux, modélisation du système respiratoire …

Les cours théoriques seront complétés par des séances sur ordinateur (langage Python), qui nous permettront d'effectuer la résolution effective (et approchée) de certains des problèmes abordés. Cette partie numérique portera notamment sur les méthodologies suivantes:
- méthodes numériques de résolution des EDO,
- méthodes de résolution des EDP (différences finies)
- méthodes numériques en optimisation sous contraintes.

| *Processus stochastiques* |

(Giambattista Giacomin)

Révisions sur le cadre probabiliste: convergence en loi, théorème(s) de la limite centrale, vecteurs gaussiens, lois infiniment divisibles.
Espérance conditionnelle : définition, propriétés.
Martingales à temps discret : exemples, temps d'arrêt, inégalités de Doob, convergence.
Chaînes de Markov : exemples, classification des états, mesures invariantes, théorèmes ergodiques.
Marches aléatoires et un aperçu du mouvement brownien.
Quelques exemples des modèles de la physique statistique.

Bibliographie :
P. Billingsley, Probability and Measure, third edition, Wiley and sons (1995)
D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press (1991)
Summary: Back to the probabilistic framework: convergence in law, central limit theorem(s), Gaussian vectors, infinitely divisible laws.
Conditional expectation: definition, properties.
Discrete time martingales: examples, stopping times, Doob's inequalities, martingale convergence theorem(s).
Markov chains: examples, classification of states, invariant measures, ergodic theorems.
Random walks and and a first look at Brownian motion.
Statistical mechanics models: some examples

■ ■ ■ ■ ■

| *Statistiques* |

(Stéphane Gaïffas)

Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

En fonction des goûts et du niveau d'allergie au clavier de chacun, on pourra s'attarder plus ou moins en profondeur sur des exemples d'applications et d'implémentation. Nous essaierons de proposer dans ce cours 80% de contenus classiques et inévitables dans un cours de statistique et 20% de résultats récents et problèmes ouverts, pour montrer de jolies mathématiques appliquées qui répondent à des problèmes importants en statistique.

Le plan du cours, modulo quelques modifications éventuelles, est le suivant :
Modèles et expériences statistiques
Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
Régression linéaire : propriétés de l'estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussaient, optimalité minimax de l'estimateur des moindres carrés
Statistiques bayesiennes : risque bayesien, estimateur bayesien
Maximum de vraisemblance et application aux modèles exponentiels
Modèles linéaire généralité : régression logistique, résultats limites
Statistique en grande dimension : Lasso et sparsité
Retour aux tests paramétriques, théorie de Neyman Pearson
Tests multiples, procédure de Benjamini Hochbe

■ ■ ■ ■ ■

| *Systèmes dynamiques* |

(Raphaël Cerf)

La première partie du cours sera consacrée aux systèmes dynamiques déterministes. Nous procèderons à une première classification des systèmes linéaires, puis nous verrons comment les systèmes généraux peuvent être linéarisés au voisinage d'un point fixe hyperbolique. Nous montrerons le théorème de la variété stable, et nous parlerons de stabilité structurelle. Des exemples classiques seront présentés pour illustrer les concepts introduits.

La seconde partie du cours sera consacrée à la théorie ergodique. Nous présenterons les théorèmes classiques de récurrence, le théorème ergodique et nous expliquerons ce qu'est un système ergodique. Nous parlerons de la question de la classification des systèmes ergodiques et de leur entropie. Nous appliquerons certains de ces résultats à la percolation de premier passage.

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie algébrique* |

(Geoffroy Horel)

L'objectif du cours est de présenter plusieurs notions et résultats importants de la topologie algébrique en se basant sur de nombreux exemples et en évoquant des applications des résultats considérés.

Programme :

(0) Introduction au langage des catégories.
Propriétés universelles, lemme de Yoneda.
Limites et colimites.

(1) Exemples importants d'espaces topologiques.
Complexes simpliciaux et CW-complexes.
Introduction à la théorie de l'homotopie.
Groupe fondamental d'un espace topologique. Revêtements.
Groupes d'homotopie supérieurs. Fibrations.

(2) Homologie singulière. Homologie simpliciale.
Groupes d'homologie de CW-complexes.
Groupes de cohomologie.
Homologie des variétés. Dualité de Poincaré.

▪▪▪▪▪

| *Topologie et calcul différentiel* |

(Dimitry Chelkak)

1/ Topologie générale et espaces métriques :
Espaces métriques et espaces topologiques.
Complétude, compacité, connexité.
Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2/ Espaces de Banach :
Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
Théorème de Hahn-Banach.
Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3/ Calcul différentiel :
Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4) Équations différentielles ordinaires :
Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
Lemme de Gronwall et estimations.