DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

DIRECTION DES ETUDES

2022-2023

Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05 | 01 44 32 31 72 | education@math.ens.fr

Le département de mathématiques et applications (DMA) offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure (DENS) ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiant·e·s par an), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec Sorbonne Université, l'Université Paris Cité, l'Université Paris-Dauphine – PSL, l'Université de Paris-Saclay, et l'Université Sorbonne Paris-Nord, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Direction des études du DMA : Djalil Chafaï et Raphael Cerf
| Secrétariat pédagogique : Marion Peres

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05
01 44 32 31 72 - education@math.ens.fr
https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION

OBJECTIFS

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématicien·ne·s pur·e·s et appliqué·e·s, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie, …). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

DEBOUCHES

À la sortie de la formation, l'étudiant·e peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il est également possible de prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- Enseignant·e-chercheur·euse à l'université ;
- Chercheur·euse en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- Enseignant·e en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Écoles d'ingénieurs, formations spécialisées…) ;
- Ingénieur·e mathématicien·ne dans l'industrie.

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ÉNS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.
Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

CANDIDATURE 2022-2023

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiant·e·s ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent.

Toutes les informations se trouvent sur les sites suivants :

- Site enseignement des mathématiques : https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement
- Site de l'ÉNS : https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours

LE DIPLOME DE L'ENS MAJEURE MATHEMATIQUES

Les normalien·ne·s reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu que les conditions suivantes soient satisfaites :

- L'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- La validation de chacune des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- La validation de 72 ECTS en plus des 180 ECTS de la L3 et du Master :
  - 24 ECTS de cours mathématiques
  - 24 ECTS de cours scientifiques non-mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives) en accord avec le·a tuteur·ice
  - 24 ECTS libres
- La validation d'un cours de langue par année d'inscription au DENS
- Une expérience à l'étranger

Mineures et doubles majeures du DENS

- Mineures du DENS

Un candidat ayant obtenu un minimum de 24 ECTS dans une discipline scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire en science (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Un candidat ayant obtenu un minimum de 48 ECTS dans une discipline littéraire pourra obtenir une spécialité secondaire en lettres sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

- Doubles majeures du DENS

Les doubles majeures du DENS sont délivrées à titre exceptionnel sous les conditions suivantes :

- Un cursus complet dans une discipline (au sein d'un département de l'ENS)
- Au moins deux années complètes dans la seconde discipline (L3-M1, M1-M2 ou L3-M2 équivalent à 120 ECTS)
- Accord des deux départements

Inscription a l'universite

Après leur admission, les normalien·ne·s s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de ces études, il est en particulier nécessaire d'obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- Pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;

- Pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;

- A l'issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiant·e·s qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un·e directeur·ice de recherche ainsi que des divers·es encadrant·e·s de l'université d'inscription (délégué·e aux thèses, directeur·ice de l'école doctorale de rattachement, directeur·ice du laboratoire d'accueil).

TUTORAT

L'encadrement des étudiant·e·s en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un·e tuteur·ice, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, est affecté·e à chaque étudiant. Choisi·e aléatoirement en première année, le choix sera fait, pour les autres années, en fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année.

Le rôle des tuteur·ice·s est d'aider l'étudiant·e à l'organisation de sa scolarité, de le·a conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études est mis au point par les étudiant·e·s, les tuteur·ice·s et le directeur des études du DMA, signé par ces parties et transmis à la directrice des études sciences de l'ENS. Ce programme régule les conditions de validations de l'année d'étude correspondante. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement les tuteur·ice·s.

STAGE

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant·e à un environnement différent.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiant·e·s pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec les tuteur·ice·s et les directeurs des études du DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrant·e·s potentiel·le·s pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Les étudiant·e·s sont supposé·e·s contacter les encadrant·e·s étranger·e·s proposé·e·s non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Ce stage reste optionnel, et n'est pas obligatoire, bien qu'il aide à remplir la condition d'expérience à l'étranger pour le DENS. Il est possible de le substituer par une plus courte expérience, mais qui ne sera pas forcément rétribuée en crédits ECTS.

Un rapport de stage de 20 pages sera à rendre avant une soutenance de 15 minutes, qui a traditionnellement lieu à la rentrée suivante. Les consignes données par le passé sont les suivantes :

- Brève description de l'expérience à l'étranger

- Fonctionnement du lieu de stage
- Au moins 15 pages de description de vos activités mathématiques, recherches…
- Vous pouvez utiliser du matériel de prépublication, ou rédiger un court mémoire sur les problématiques étudiées pendant le stage

SEMINAIRE « DES MATHEMATIQUES »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois, avant le thé du département de mathématiques, et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches en mathématiques.

PLANNING

Attention, ces dates sont susceptibles de modification, consulter l'agenda en ligne.

Réunion de présentation des cours de première année
Jeudi 15 septembre 2022 à 14h, Salle Cartan ou Amphithéâtre Galois

Réunion de présentation des cours de deuxième année
Vendredi 9 septembre 2022 à 14h, Salle Cartan

Commission des études – Seconde session 2022
Mardi 20 septembre 2022

Premier semestre :

Pré-rentrée thématique « Analyse Harmonique » :
Matinées du lundi 5 au vendredi 9 septembre 2022

Début des cours
Première année : lundi 19 septembre 2022
Deuxième année : lundi 12 septembre 2022

Vacances et jours fériés
Vacances de la Toussaint : du samedi 29 octobre au dimanche 6 novembre 2022
Vacances de Noël : du samedi 17 décembre 2022 au mardi 3 janvier 2023

Fin des cours
Vendredi 13 janvier 2023

Examens du premier semestre
Du lundi 16 janvier au vendredi 20 janvier 2023

Réunion de présentation du second semestre
Mercredi 25 janvier 2023 à 14h

<u>Deuxième semestre :</u>

Début des cours
Jeudi 26 janvier 2023

Vacances et jours fériés
Vacances d'hiver : samedi 25 février au dimanche 5 mars 2023
Vacances de printemps : samedi 22 avril au lundi 8 mai 2023

Fin des cours
Jeudi 25 mai 2023

Examens du second semestre
Du jeudi 1 juin au mercredi 7 juin 2023

Exposés de mathématiques de première année
Du lundi 12 juin au mercredi 14 juin 2023

Commissions des études 2023
1ère session (première et deuxième années) : jeudi 22 juin 2023
2ère session (première et deuxième années) : jeudi 21 septembre 2023

ENSEIGNEMENT

ORGANISATION DE LA FORMATION

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec les tuteur·ice·s, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrant·e·s du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiant·e·s et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur·ice et des directeurs des études pour tous les choix concernant leur programme d'études.

FILIERE MATHEMATIQUES

Première année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en troisième année de licence (L3), mais suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en seconde année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiant·e·s dont l'avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l'étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L'inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l'élève. Avec le·a tuteur·ice, l'élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiant·e·s composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

▪ FILIERES PLURIDISCIPLINAIRES

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l'ENS. Organisées conjointement entre le département de mathématiques et les départements de physique, d'informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiant·e·s motivé·e·s de poursuivre une double formation ;
- aux étudiant·e·s encore indécis·e·s de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. Ils sont inscrits au département de mathématiques. En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Enseignant-e-s chercheur-euse-s référent-e-s : Cristina Toninelli (CNRS/PSL) et Amir-Kian Kashani Poor (ENS)

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d'informatique. Les élèves entré·e·s par le concours Info s'inscrivent au département d'informatique, les élèves entré·e·s par le concours MPI au département de mathématiques. Les tuteur·ice·s proviennent de leur département d'inscription. En deuxième année, il est possible de s'orienter soit vers les mathématiques soit vers l'informatique, et de rejoindre le département de son choix.

Enseignant chercheur référent : Marc Lelarge (INRIA)

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheur·euse·s capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Enseignant chercheur référent : Amaury Lambert (IBENS)

Objectifs du cursus

Les étudiant·e·s issu·e·s de la filière mathématiques/biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Il y aura été appris à décortiquer la littérature spécialisée, à suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et à initier dialogues et collaborations avec les biologistes dans leurs laboratoires.

Les deux années de cursus permettent aux élèves concerné·e·s de continuer, suivant leur parcours :

- ou bien en suivant un M2 de mathématiques de la modélisation,
- ou bien en suivant un M2 de biologie ou de sciences cognitives.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s'inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de sciences cognitives. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tou·te·s les étudiant·e·s du département de mathématiques ; l'inscription à ces cours n'engage donc pas les étudiant·e·s concerné·e·s à l'exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

REGLES D'OBTENTION

| Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone. |

■ PREMIÈRE ANNÉE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

<table>
<tr><td>Commun pour toutes les filières</td><td>4 cours de niveau licence : (1)
○ Algèbre 1
○ Analyse complexe
○ Intégration et probabilités
○ Topologie et calcul différentiel</td><td>12 ECTS x 4 =
48 ECTS</td></tr>
<tr><td>Filière Mathématique</td><td>Mémoire et exposé de 1ère année</td><td rowspan="4">6 ECTS x 2 =
12 ECTS</td></tr>
<tr><td>Filière Math/Physique</td><td>Cours spécifiques du cursus mixte
○ Grande dimension</td></tr>
<tr><td>Filière Math/Informatique</td><td>Cours spécifique du cursus mixte)
○ Initiation à la cryptologie</td></tr>
<tr><td>Filière Math/Biologie</td><td>Mémoire et exposé d'interface math-biologie</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>60 ECTS</td></tr>
</table>

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental.

L'obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s'il ne compte pas pour la L3) parmi :
  Algèbre 2
  Analyse complexe
  Analyse fonctionnelle
  Géométrie différentielle
  Logique

- Un groupe de lecture parmi :
  Analyse harmonique : dualité de Pontryagin, Lino Benedetto ENS
  Géométrie hyperbolique, Nicolas Tholozan CNRS/ENS
  Opérateurs aléatoires de Schrödinger, Laure Dumas CNRS/ENS

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec les tuteur·ice·s.

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filières pluridisciplinaires

<u>Mathématiques/Physique</u>

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 de physique :

- Des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  Physique statistique des systèmes en équilibre (1er sem) (9 ECTS)
  Introduction à la mécanique quantique (1er sem) (9 ECTS)
  Relativité et électromagnétisme (2ème sem) (9 ECTS)
  Hydrodynamique (2ème sem) (9 ECTS)

Physique du solide (2ème sem) (9 ECTS)

- Le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheur·euse·s des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

<u>Mathématiques/Informatique</u>

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- Des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

Semestre 1 :

Algorithmique et programmation (9 ECTS)
Systèmes numériques (9 ECTS)
Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

Semestre 2 :

Apprentissage statistique (9 ECTS)
Systèmes et réseaux (9 ECTS)
Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
Initiation à la cryptologie (**Obligatoire**, 12 ECTS)
Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
Bases de données (9 ECTS)
Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- Le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique.

Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un·e chercheur·euse et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Biologie

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours d'Introduction aux sciences du vivant (S1)
- Le cours de M1 d'Analyse fonctionnelle (S2, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2nde année)
- Le cours de Mathématiques pour l'environnement et la société (S2)
- Le groupe de lecture en biologie : Modélisation des systèmes biologiques (S2)
- L'école d'été de biologie de Marseille-Luminy ou bien un stage de neurosciences

- DEUXIÈME ANNÉE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : ○ Algèbre 2 ○ Analyse complexe (1) ○ Analyse fonctionnelle (3) ○ Géométrie différentielle (3) ○ Logique (3) ○ Processus stochastiques (2)	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : ○ Mathématiques des données ○ Mathématiques pour l'environnement et la société (3) ○ Statistique (2) ○ Analyse des équations aux dérivées partielles ○ Systèmes dynamiques ○ Topologie algébrique (3)	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours recommandé pour la filière maths/biologie
(3) Cours accessible dès la 1ère année

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)
- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  - Géométrie et relations aux dérivées partielles (géométrie et analyse),
  - Systèmes à diffusion croisée (analyse des équations aux dérivées partielles),
  - Systèmes de particules en interaction (probabilité et mécanique statistique),
  - Modèles non-linéaires de la physique quantique (analyse et physique mathématique)

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail des cours avancés.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du DENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1^e^ année pour les élèves inscrit·e·s directement en 2^e^ année
- Un cours dans une discipline autre que les mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.

  | *Remarque : Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière mathématiques/biologie

Trois cours à valider parmi :

- Écologie/évolution (S1)
- Biologie cellulaire (S1)
- Neurosciences du Cogmaster (S1)
- Machine learning du Cogmaster (S2)
- Un projet long en biologie ou en neurosciences

- TROISIÈME ANNÉE

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)

- La composition du *mémoire de Diplôme*
  Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Présentation du domaine de recherche*, présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).

- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - Cours de M2 des universités partenaires
  - Numerical methods for fluid dynamics, Emmanuel Dormy
  - Opérateurs aléatoires, Laure Dumaz
  - Applications harmoniques et théorie de Yang-Mills, Paul Laurain

- Un groupe de travail auto-organisé *(facultatif).*

- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif).*

  Remarque : une expérience à l'étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.

COURS DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2022-2023

PREMIÈRE ANNÉE

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	G. Chenevier CNRS/ENS N. Marquis ENS
• Intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	A.-L. Dalibard SU B. Mallein USPN
• Topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	D. Chafaï PSL L. Vacossin ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Opérateurs aléatoires de Schrödinger	L. Dumaz CNRS/ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) La géométrie hyperbolique	N. Tholozan CNRS/ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Analyse harmonique : dualité de Pontryagin	L. Benedetto ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	 S. Rideau-Kikushi CNRS/ENS P. Wang ENS

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) (Cours de licence - 70h : 42h cours + 28h TD)	A. Mézard SU A. Vanhaecke ENS
• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	L. Moonens PS S. Bronstein ENS
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	N. Bergeron SU P. Laurain UP

• Mathématiques pour l'environnement et la société (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 70h : 42h cours + 28h TD)	B. Maury PS S. Perrin-Roussel ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Topologie algébrique (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	 M. Livernet PC C. Emprin ENS
• *Cours spécifique cursus Info/Maths :* Initiation à la cryptologie (12 ECTS) (48h cours + 24hTD)	D. Pointcheval ENS B. Minaud INRIA P. Nguyen INRIA
• *Cours spécifique cursus Maths/Physique :* Grande dimension (12 ECTS) (42h de cours + 28h de TD)	G. Biroli ENS & D. Chafaï PSL L. Rey ENS
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :* Modélisation des systèmes biologiques (12 ECTS)	A. Véber CNRS PC R. Ferrière ENS D. Thieffry ENS

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un·e encadrant·e appartenant le plus souvent au département de mathématiques et applications de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.

Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;
- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiant·e·s réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.

Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Cours non mathématiques

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 18 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques. Toute autre proposition pourra être étudiée avec les tuteur·ice·s.* |

- Economie - http://www.economie.ens.psl.eu/
  - Introduction aux théories de la croissance économique
  - Introduction à l'économétrie
  - Economie pour scientifiques
- Biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/
  - Frontiers in biology
  - Génétique et Biologie Moléculaire
  - Neurosciences

  - Océanographie
  - Biologie cellulaire

- Physique - http://www.phys.ens.fr/

  - Physique statistique des systèmes en équilibre
  - Introduction à la mécanique quantique
  - Éléments de mécanique analytique
  - Relativité et électromagnétisme
  - Hydrodynamique
  - Mécanique des milieux continus
  - Introduction à l'astrophysique
  - Physique du solide
  - Optique
  - Physique des particules
  - Ordres de grandeur, lois d'échelles et méthodes perturbatives

- Informatique - http://diplome.di.ens.fr/

  - Langages formels, calculabilité et complexité
  - Algorithmique et programmation
  - Langages de programmation et de compilation
  - Systèmes numériques
  - Système d'exploitation
  - Lambda calcul et logique informatique (à l'ENS Paris Saclay)
  - Théorie de l'information et codage
  - Initiation à la cryptologie
  - Sémantique et application à la vérification de programmes
  - Bases de données

- Etudes cognitives - http://cognition.ens.fr

  - Introduction to Cognitive Neuroscience
  - Introduction to Cognitive and Computational Neuroscience

■ SECONDE ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	F. Charles PS A. Etève ENS
• Analyse des équations aux dérivées partielles (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	I. Gallagher UP L.-P. Chaintron ENS
• Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h :42h cours + 28h TD)	S. Rideau-Kikuchi CNRS/ENS P. Wang ENS
• Processus stochastiques (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Berger SU T. Lenoir ENS
• Statistique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	C. Levrard PC A. Ben-Hamou SU
• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	R. Cerf PS L. Benedetto ENS
• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	G. Peyré CNRS/ENS G.-J Huizing, P. Albin, CNRS
• Ateliers Maths/Entreprise (6 ECTS)	B. Maury PS L.-P. Chaintron ENS

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	L. Moonens PS S. Bronstein ENS
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	N. Bergeron SU P. Laurain SU
• Mathématiques pour l'environnement et la société (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 70h : 42h cours + 28h TD)	B. Maury PS S. Perrin-Roussel ENS
• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	L. Livernet PC C. Emprin ENS

Cours avancés, deuxième semestre

• Cours avancé : Modèles non linéaires pour la physique quantique D. Gontier PSL
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Systèmes de particules en interaction C. Toninelli CNRS/PSL
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Systèmes à diffusion croisée A. Moussa SU
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Géométrie et relations aux dérivées partielles E. Giroux CNRS/ENS
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 7 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Groupes de travail, premier semestre

- Formules d'inversions, polytopes, et quelques formules algébriques A. Etève ENS
- Mouvement brownien branchant et équation de diffusion B. Mallein USPN
- Topologie modérée et structures O-minimales V. Lebovici ENS
- Théorie de Morse et applications L. Pille-Schneider ENS
- Entropie : de la physique statistique aux mathématiques L.-P. Chaintron ENS
- Le modèle d'Ising L. Rey ENS
- Théorie spectrale pour la mécanique quantique S. Perrin-Roussel ENS
- Autour de la théorie spectrale du laplacien L. Vacossin ENS
- Applications harmoniques D. Gontier PSL

Cours non mathématiques

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 18 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques. Toute autre proposition pourra être étudiée avec les tuteur·ice·s.* |

Voir la liste des cours proposés par le département de mathématiques. On peut choisir aussi, en accord avec les tuteur·ice·s, d'autres cours des départements scientifiques de l'ENS.

- TROISIÈME ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

L'auto-organisation de groupes de travail est vivement recommandée. Elle peut être encadrée, si besoin, par un·e enseignant·e du DMA.

Deuxième semestre :

Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS (9ECTS, 24h cours). Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription pour les conditions pédagogiques.

- Applications harmoniques et théorie de Yang-Mills — P. Laurain UP
- Numerical methods for fluid dynamics — E. Dormy ENS
- Opérateurs aléatoires — L. Dumaz ENS

ENSEIGNEMENTS HORS DEPARTEMENT

Le DMA offre également un ensemble de cours de mathématiques dans d'autres départements de l'ENS.

- Mathématiques pour littéraires — V. Lebovici ENS
- Probabilités et statistique pour économistes — M. Malvy ENS
- Mathématiques pour économistes — L. Pille-Schneider ENS
- Probabilités pour physicien·ne·s — R. Cerf PS et G. Semerjian ENS

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2022-2023

| *Algèbre 1* (L3) |

(Gaëtan Chenevier et Nataniel Marquis)

Ce cours d'algèbre est une introduction à la théorie des groupes et des modules.

Programme provisoire :

I. Ensembles quotients
- Partitions, fibres et relations d'équivalences, passage au quotient
- Sections, axiome du choix et représentants
- Lemme de Zorn

II. Généralités sur les groupes
- Exemples de groupes
- Morphismes et isomorphismes
- Groupes cycliques
- Théorème de Lagrange
- Groupe multiplicatif d'un corps et (Z/nZ)^*
- Groupes quotients

- Compléments : Groupes usuels, quaternions de Hamilton

III. Groupes abéliens de type fini
- Caractères et y^2=x^3+1 sur Z/pZ
- Décomposition de Fourier finie
- Structure des groupes abéliens finis
- Réseaux et groupes de type finis
- Complément : Courbes elliptiques

IV. Le groupe symétrique et son dévissage
- Actions de groupes
- Groupes symétriques et alternés, les cas $n \leq 5$
- Le langage des suites exactes
- Le dévissage de S_n
- Produits semi-directs
- Compléments : Groupe de Galois d'un polynôme, petits groupes, le théorème de Jordan-Hölder

V. Groupes et symétries
- Sous-groupes finis de O(2) et SO(3)
- Quaternions et géométrie euclidienne en dimensions 3 et 4
- Groupes linéaires et simplicité de PSL_n(k)
- Le groupe PGL_2(k) et quelques (iso)morphismes miraculeux
- Compléments : Polytopes réguliers, le groupe affine et un théorème de Galois, frises et papiers peints

VI. Éléments de structure des groupes finis
- p-groupes
- Théorèmes de Sylow
- Théorème de Schur-Zassenhaus, théorème de Hall
- Extensions et cohomologie
- Compléments : Groupes nilpotents finis

VII. Arithmétique des anneaux
- Anneaux Z[√d]

- Anneaux factoriels, idéaux et anneaux principaux
- L'anneau Z[i] et sommes de deux carrés
- Une équation diophantienne
- Complément : Anneaux quotients

VIII. Modules sur les anneaux principaux

- Modules sur un anneau
- Équivalence des matrices sur un anneau principal
- Modules de type fini sur un anneau principal

IX. Représentations linéaires des groupes finis

- Représentations et modules sur l'algèbre du groupe
- Décomposition en irréductibles
- Théorie des caractères, exemples de tables de caractères
- Retour sur le déterminant d'un groupe
- Propriétés d'intégralité des caractères
- Compléments : Des théorèmes de Burnside et P. Hall, décomposition de L^2(G)

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Algèbre 2* **(M1)** |

(François Charles et Arnaud Eteve)

L’objet de ce cours, qui fait suite au cours d'algèbre 1, et de donner les bases de la théorie des anneaux et des corps : il s'agit des débuts de l'algèbre commutative. Les thèmes abordés seront les suivants :

- Notions de base sur les anneaux (commutatifs) : idéaux, spectre, localisation, modules. Anneaux noethériens, anneaux principaux, anneaux de Dedekind.
- Exemples d'anneaux : anneaux d'entiers de corps de nombres, anneaux de polynômes.
- Modules de type fini sur un anneau principal, applications.
- Extensions de corps et correspondance de Galois, exemples et applications.
- Quelques résultats sur les algèbres de type fini sur un corps : Nullstellensatz, lemme de normalisation de Noether, ...

Si le temps le permet, on conclura le cours par l'étude des actions de groupes sur les anneaux de polynômes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse complexe* **(L3/M1)** |

(Ariane Mézard et Arnaud Vanhaecke)

L'analyse complexe étudie les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globalement. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globalement, leur étude nécessite la mise en œuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Nous concluons par quelques exemples d'applications à des domaines variés.

La théorie de Cauchy donne les premières propriétés des fonctions analytiques complexes et révèle l'importance de la topologie des ensembles de définition de ces fonctions. Après avoir démontré l'analycité des fonctions holomorphes, nous donnons les premières propriétés (Théorème de l'application ouverte, Lemme de Schwarz) et les grands théorèmes (Théorème de Runge, Théorème de Weierstrass, Théorème de Riemann, Théorème de Picard...). L'étude des singularités conduit à la notion de fonctions méromorphes avec de nombreuses applications au calcul d'intégrales via la théorie des résidus et aux problèmes d'approximation (méthode du col). Nous concluons par plusieurs incursions en théorie des nombres : études des fonctions elliptiques et modulaires et des séries de Dirichlet.

▪▪▪▪▪

| *Analyse fonctionnelle* (M1) |

(Laurent Moonens et Samuel Bronstein)

Dans ce cours, qui comportera deux parties principales, on étudiera les bases de l'analyse fonctionnelle abstraite et les principaux espaces de fonctions utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Le cours commencera par l'analyse abstraite des espaces vectoriels topologiques (localement convexes) et de leurs topologies classiques (dont les topologies « faibles »), avec une attention particulière portée, à l'issue de cette première partie, aux espaces lisses et uniformément convexes (dont relèvent les espaces de Lebesgue non « extrêmes »). Cette partie sera l'occasion d'aborder des résultats classiques importants d'analyse linéaire (théorèmes de Hahn-Banach, de Banach-Alaoglu, de Krein-Milman etc.).

La théorie des distributions de L. Schwartz sera ensuite introduite de façon « topologique » à l'aide des concepts et résultats développés dans la première partie du cours. Quelques résultats fondamentaux sur les distributions seront obtenus (théorème de régularisation, théorème de constance, principe de Banach-Steinhaus).

Pour finir, nous parlerons d'espaces de Sobolev, des théorèmes d'injection classiques (de Sobolev et de Rellich-Kondrachov) qui y sont valides et de leurs applications à des problèmes elliptiques.

Si le temps le permet, on consacrera les dernières heures de cours aux fonctions à variation bornée.

▪▪▪▪▪

| *Analyse des Equations à Dérivées Partielles* **(M1)** |
(Isabelle Gallagher)

Le but du cours est de présenter quelques méthodes classiques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Après une introduction aux outils (analyse fonctionnelle et harmonique) nécessaires à leur étude, nous présenterons quelques EDP linéaires importantes (transport, ondes, chaleur, Schrödinger) et les analyserons en variant les approches (méthode des caractéristiques, solutions faibles, solutions fortes). Nous nous orienterons ensuite vers l'étude d'EDP non linéaires, en nous appuyant principalement sur les équations de la mécanique des fluides (Euler et de Navier-Stokes).

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse des EDP non linéaires issues de la géométrie : des applications harmoniques à la théorie de Yang-Mills* (M2) |

(Paul Laurain)

L'invariance conforme joue un rôle important en physique et en géométrie : théorie conforme des champs, relativité générale, supraconductivité, surface de Riemann, champs de Yang- Mills.

Dans ce cours on étudiera l'aspect analytique de certains de ces problèmes. Plus précisément, on s'intéressera à l'analyse d'EDP non-linéaires issues de problème conformément invariants : applications harmoniques, problème de courbure prescrite, Ginzburg-Landau et Yang-Mills.

On commencera par l'équation de courbure moyenne constante ce qui me permettra d'introduire les phénomènes de compacité par compensation, ensuite on développera la théorie via l'approche générale de Rivière [2]. Puis nous nous intéresserons au problème de Ginzburg- Laundau [3], que l'on peut considérer comme une version abélienne de Yang-Mills. Enfin, nous étudierons les travaux d'Uhlenbeck sur l'équation Yang-Mills et si le temps le permet on donnera des applications géométriques [1].

Prérequis : EDP elliptiques, géométrie différentielle (si possible Riemannienne).

Références :

[1] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck. Instantons and four-manifolds, volume 1 of Mathematical Sciences Research Institute Publications. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[2] Tristan Rivière. Conformally invariant variational problems. 2012.

[3] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model, volume 70 of Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

Analysis of nonlinear PDEs from geometry: from harmonic maps to Yang-Mills theory

Conformal invariance plays an important role in physics and geometry: conformal field theory, general relativity, superconductivity, Riemann surface, Yang-Mills fields. In this course we will study the analytical aspect of some of these problems. More precisely, we will be interested in the analysis of nonlinear PDEs resulting from conformal invariant problem: harmonic maps, prescribed curvature problem, Ginzburg-Landau and Yang-Mills.

We will start with the constant mean curvature equation which will allow me to introduce the phenomena of compactness by compensation, then we will develop the theory via the general approach of Rivière [2]. Then we will focus on the Ginzburg-Laundau problem [3], which can be considered as an abelian version of Yang-Mills. Finally, we will study Uhlenbeck's work on the Yang-Mills equation and if time permits we will give geometric applications [1].

Background: elliptic PDE, differential geometry.

References:

[1] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck. Instantons and four-manifolds, volume 1 of Mathematical Sciences Research Institute Publications. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
[2] Tristan Rivière. Conformally invariant variational problems. 2012.
[3] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model, volume 70 of Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

■ ■ ■ ■ ■

| *Atelier Maths-Entreprise* **(L3/M1)** |
(Bertrand Maury et Louis-Pierre Chaintron)

Le point de départ cet atelier est le suivant : une première séance est consacrée à la présentation par un industriel d'une problématique à laquelle il est confronté. Cette problématique ne se présente pas nécessairement sous la forme d'un problème mathématisé, mais on peut espérer qu'une formalisation mathématique permette d'apporter des éléments de réponses, par utilisation d'outils existants, ou introduction d'outils conceptuels nouveaux, avec éventuellement utilisation de la simulation numérique pour approfondir l'exploration. Le groupe de participants disposera alors de quelques semaines, en toute autonomie, pour apporter des éléments de réponse à ce problème, qui seront présentés lors d'une séance de clôture à l'intervenant industriel, et feront l'objet d'un rapport de synthèse des pistes explorées.

Les années précédentes, des sujets ont par exemple été proposés par :

- Aqemia, une start-up en pharma-tech qui souhaitait des pistes pour son modèle commercial
- Greenweez, grand supermarché bio en ligne qui cherche à optimiser l'emballage de ses paquets ;
- Google, sur des problèmes d'erreurs générées par des serveurs ;
- Criteo, à propos de systèmes d'enchères pour la publicité en ligne ;
- Vallée Sud, établissement public territorial du sud de Paris, pour optimiser les collectes de déchets.

Cet « exercice » a vocation à familiariser les élèves avec la démarche de modélisation ex nihilo, qui consiste à formaliser un problème concret donné sous forme brute, et à explorer diverses pistes d'études en confrontant systématiquement les résultats théoriques et/ou numériques à la réalité. Ce module d'ouverture s'adresse potentiellement à tous les élèves, y compris à ceux qui n'envisagent aucunement de se diriger vers le monde de l'entreprise, et / ou qui pourraient avoir du mal à concevoir que leur bagage puisse leur permettre d'apporter des éléments de réponse à une problématique industrielle.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles* **(M1)** |
(Emmanuel Giroux)

La première partie du cours sera une introduction à l'étude des variétés et de leur topologie qui commencera avec les bases de la théorie de l'homotopie et de l'homologie. On se concentrera ensuite sur les variétés et les fibrés lisses en s'intéressant à la géométrie des formes différentielles et des connexions.

La seconde partie du cours sera consacrée à l'étude des relations aux dérivées partielles et du h-principe, théorie qui permet de mettre à jour de nombreux phénomènes géométriques frappants : théorème de Smale sur le retournement de la sphère, théorèmes de Nash sur les plongements isométriques...

▪▪▪▪▪

| *Cours avancé : Modèles non linéaires pour la physique quantique* **(M1)** |
(David Gontier)

Dans ce cours, nous nous intéressons à la dérivation et à l'étude de modèles non linéaires qui apparaissent en mécanique quantique.

Dans la première partie du cours, nous montrerons comment, à partir de l'équation linéaire de Schrödinger, on trouve des modèles non linéaires dans certains régimes ou après certaines approximations. Nous introduirons en particulier les modèles de Hartree-Fock et de Thomas-Fermi.

L'étude de ces modèles non linéaires nous permettra dans un second temps d'obtenir des informations sur l'équation de Schrödinger. Nous retrouverons certains phénomènes plus ou moins connus de la mécanique quantique. Nous démontrerons en particulier la « stabilité de la matière », et décrirons à quoi ressemble un « atome lourd ».

Bibliographie :

« Analysis » (Elliott H. Lieb et Michael Loss)
« Stability of Matter » (Elliott H. Lieb et Robert Seiringer)

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Systèmes à diffusion croisée* **(M1)** |
(Ayman Moussa)

L'objet de ce cours est d'étudier une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) utilisés en dynamique des populations pour décrire l'occupation d'un espace par différentes espèces animales. De manière assez classique, les populations y sont décrites par l'intermédiaire de deux mécanismes fondamentaux : la dispersion des individus (modélisée par un opérateur de diffusion) et leurs reproduction ou décès (modélisés par un terme de réaction). La spécificité des systèmes sur lesquels nous nous concentrerons tient dans l'expression " diffusion croisée " : pour de tels systèmes la diffusivité (ou mobilité) d'une espèce dépend – potentiellement de manière non linéaire – de la présence de ses concurrents.

La première publication proposant un tel système date de 1979, dans le Journal of Theoretical Biology. Les auteurs, Shigesada, Kawasaki et Teramoto, ont proposé ce type de systèmes (dorénavant appelés " SKT ") pour capturer le phénomène de ségrégation des espèces, c'est-à-dire une répartition quasiment disjointe de l'espace entre les différents constituants de la population. Il est fréquent, en mathématiques appliquées, qu'un outil de modélisation efficace conduise à des questions mathématiques intéressantes et étonnamment difficiles ; nous verrons dans ce cours que les systèmes à diffusion croisée sont une belle illustration de ce fait.

Après une rapide introduction qui dévoilera (formellement) le lien entre la diffusion croisée et la ségrégation, le cours se concentrera d'abord sur l'équation dite de Kolmogorov, une EDP parabolique dont l'opérateur de diffusion est adapté au comportement d'individus sensibles (par opposition à la loi de Fick, pour la diffusion de matière inerte). Cette équation étant la brique de base des systèmes à diffusion croisée que nous étudierons, il s'agira de la comprendre dans un cadre de régularité très faible. Nous aborderons ensuite à proprement parler l'étude de systèmes à diffusion croisée. Comme c'est souvent le cas pour les EDP non linéaires, nous verrons que la question même de l'existence de solutions n'est pas une trivialité. Nous fournirons un schéma de construction de solutions faibles globales par approximation-compacité, reposant sur la dissipation au cours du temps d'une fonctionnelle, appelée l'entropie du système. Suivront l'existence de solutions plus régulières (mais locales), certaines propriétés d'unicité fort-faible et éventuellement des résultats plus difficiles : la réalisation du système SKT comme limite asymptotique d'équations plus élémentaires ou l'analyse rigoureuse de certains états d'équilibres offrant une ségrégation des espèces.

En plus d'explorer des systèmes à diffusion croisée, ce cours illustrera notamment certaines méthodes standards dans l'étude d'équations paraboliques (principe du maximum, lemme d'Aubin-Lions, approximation-compacité, point fixe en dimension infinie, analyse asymptotique) que nous présenterons dans le cadre spécifique qui nous intéresse tout en soulignant la portée plus large de ces outils.

Contenu :

- Introduction et motivation
- Équation de Kolmogorov avec diffusivité peu régulière
- Structure entropique des systèmes à diffusion croisée
- Théorie d'existence pour la diffusion croisée
- Unicité fort-faible ou dérivation rigoureuse

Prérequis : Analyse fonctionnelle ; convergences faibles ; distributions ; espaces de Sobolev.

Bibliographie :

- Shigesada, Kawasaki, Teramoto. Spatial segregation of interacting species. *Journal of Theoretical Biology.*
- Chen, Jüngel. Analysis of a parabolic cross-diffusion population model without self-diffusion. *Journal of Differential Equations.*
- Le Bris, Lions. Existence and uniqueness of solutions to Fokker–Planck type equations with irregular coefficients. *Communications in Partial Differential Equations.*
- Moussa. From non-local to classical SKT systems: triangular case with bounded coefficients. *SIAM Journal of Mathematical Analysis.*
- Roques. Reaction-diffusion models for spatial ecology. *QUAE.*

▪▪▪▪▪

| *Cours avancé : Systèmes de particules en interaction* **(M1)** |
(Cristina Toninelli)

Ce cours est une introduction aux systèmes de particules en interaction (IPS), un domaine des probabilités très fécond et qui a des applications dans nombreuses disciplines. Les IPS ont été introduits dans les années 1960 pour étudier des modèles issus de la physique statistique. La classe de modèles a été vite agrandi pour étudier de phénomènes diverses issus de la physique, de la biologie ou de sciences sociales : la transition ferromagnétique/paramagnétique, la croissance des cristaux, la diffusion d'infections, la dynamique d'opinions, les dynamiques vitreuses, \dots D'un point de vue mathématique il s'agit de processus de Markov à temps continue avec espace d'état infini et discret (typiquement ${0,1}^{\mathbb Z^d}$). L'enjeu principal est celui de déterminer le comportement de temps longue, notamment caractériser les mesures invariantes, leur bassin d'attraction et les échelles de temps typiques.

Après avoir construit le processus on analysera en détail deux modèles : le modèle d'Ising stochastique et le processus de contact. Cela nous permettra d'introduire plusieurs outils classiques tels que les techniques de couplage, la dualité, les arguments de contour, et les inégalités de Poincaré.

▪▪▪▪▪

| *Cours de mathématiques pour les littéraires* **(PT)** |
(Vadim Lebovici)

Ce cours est un véritable cours de mathématiques, adapté à des élèves sans bagage mathématique. Il est destiné à tout élève littéraire souhaitant expérimenter véritablement ce que c'est que de faire des mathématiques. Il est donc idéal pour ceux qui s'intéressent à la philosophie des sciences, mais pas seulement !

La présentation des notions sera adaptée au public, sans vulgarisation néanmoins : peu de notions seront abordées mais elles seront pleinement traitées. Les séances alterneront entre cours et exercices, comme toujours en mathématiques, seule la pratique personnelle permettant une bonne assimilation des notions.

Les thèmes traités seront les suivants :

– Ensembles et fonctions : Nous retracerons l'histoire des ensembles — objets aux fondements des mathématiques modernes — en partant de la question ayant motivé leur formalisation : comment comparer la taille d'ensembles infinis ? La réponse à cette question nous permettra de découvrir la notion de fonction, véritable pierre angulaire des mathématiques.

– Suites et limites : Nous étudierons comment se résout naturellement le paradoxe de Zénon après introduction des bonnes notions mathématiques : les suites numériques et leurs limites. Autrement dit, nous verrons comment donner un sens à la convergence d'une succession de phénomènes vers une certaine limite et nous aborderons des applications (innombrables) de ces théories à d'autres domaines des sciences.

– Statistique et probabilités : Nous étudierons la théorie des probabilités et des statistiques en partant de la question suivante : « Etant donné une pièce truquée secrètement, comment savoir quelle face est la plus avantageuse ? ». La découverte de ces théories défiant le hasard nous permettra aussi de réfléchir à la notion de modélisation mathématique.

– Arithmétique (si le temps le permet) : Nous étudierons un objet au centre des mathématiques depuis des siècles : les nombres premiers. Comment est-il possible qu'un concept si simple à définir soit régi par des lois aussi riches et obscures ? Apparemment coupée du monde réel, l'arithmétique a pourtant de nombreuses applications pratiques, notamment en cryptographie.

▪▪▪▪▪

| *Cours de probabilités et statistique pour économistes* **(PT)** |
(Martin Malvy)

Nous nous appliquerons dans ce cours à construire et étudier rigoureusement l'univers probabiliste afin de formaliser dans un second temps les principaux outils des Statistiques. Le cours s'adresse aux étudiants dont le bagage mathématique est semblable à celui de la filière B/L, et leur permettra de suivre les enseignements nécessitant des prérequis dans ces domaines. Nous nous intéresserons notamment à la définition de l'univers probabiliste au travers de la théorie de la mesure, aux variables aléatoires et à leur loi, aux grands résultats de convergence (Loi des Grands Nombres, Théorème Central Limite), aux concepts fondamentaux de Statistique (estimateurs, intervalles de confiance, méthode des moments), aux tests d'hypothèse, vecteurs gaussiens, test du khi deux, information de Fisher…

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Biologie : Groupe de lecture - Modélisation des systèmes biologiques* **(L3)** |
(Denis Thieffry et Amandine Véber)

Le but de ce groupe de lecture est de discuter, à travers des présentations d'articles de recherche ou de chapitres de livres, des questions biologiques auxquelles la modélisation peut contribuer et différents outils mathématiques que l'on peut utiliser pour ce faire. Ce module est ouvert à la fois aux étudiants de mathématiques et aux étudiants de biologie de l'ENS afin de favoriser les discussions interdisciplinaires.

Chaque année, trois thèmes différents sont abordés, chacun sur quatre séances. Les exposés des étudiants sont encadrés par des chercheurs et chercheuses en mathématiques, modélisation ou biologie, spécialistes de ces domaines.

Exemples de thèmes abordés au cours des dernières années :

- Epidémiologie ;
- Neurosciences ;
- Détection de motifs sur l'ADN ;
- Evolution ;
- Déplacements d'individus à différentes échelles.

Pré-requis : Aucun. Avoir suivi le module « Introduction aux sciences du vivant » au premier semestre est bien sûr un plus pour la compréhension des questions biologiques, mais n'est pas indispensable.

Evaluation : Présentation de 2 exposés en groupe, participation active aux discussions, rédaction de 3 comptes-rendus courts synthétisant les concepts abordés lors de chacun des 3 thèmes.

▪▪▪▪▪

| *Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Initiation à la cryptologie* **(L3)** |
(David Pointcheval, Phuong Nguyen et Brice Minaud)

Ce cours s'adresse aux étudiants ayant un goût pour l'algorithmique, à la fois dans ses aspects mathématiques et dans ses aspects pratiques. Son but est d'enseigner la problématique de la cryptologie, et les principaux outils utilisés par la cryptologie pour proposer des solutions aux problèmes de sécurité. Il sert d'introduction et de préparation aux cours de cryptologie proposés au MPRI.

Ce cours commence par les notions de base de cryptographie symétrique (chiffrement par blocs et par flot, fonctions de hachage, et cryptanalyse) et asymétrique (RSA, Diffie-Hellman et ElGamal), puis présente de façon informelle plusieurs techniques plus avancées :

- Preuves zero-knowledge
- Cryptographie distribuée
- Cryptographie à base de couplages sur courbes elliptiques
- Cryptographie à base de réseaux euclidiens (cryptographie post-quantique)
- La Blockchain et bitcoin

Prérequis : Ce cours fera essentiellement appel aux notions de classes de complexité, de machine de Turing et de problèmes NP. Un minimum de connaissances en algèbre et en probabilité sera aussi requis. Enfin les outils algorithmiques de base devront être maîtrisés. Certains TDs conduiront à de la programmation en langage C ou Python.

Lien du cours : https://diplome.di.ens.fr/catalog_fr.html#INFO-L3-MPRI113-S2

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Grande dimension* **(L3)** |
(Djalil Chafaï et Giulio Biroli)

Ce cours est centré autour de phénomènes de grande dimension de nature probabiliste. Il s'agit au départ du comportement des vecteurs, matrices, et tenseurs aléatoires en grande dimension, à commencer par les théorèmes limites pour les variables indépendantes. Les notions théoriques et les méthodes introduites seront illustrées à l'aide d'exemples issus de la physique statistique, des sciences des données et de l'apprentissage automatique (machine learning).

Ce cours est donné à la fois par un physicien théoricien (Giulio Biroli) et par un mathématicien probabiliste (Djalil Chafaï). La dernière séance est donnée par Jean-Philippe Bouchaud, physicien théoricien et membre de l'Académie des sciences.

Prérequis : intégration et probabilités, physique statistique.

Plan du cours :

- Loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, Monte-Carlo
- Phénomène de concentration de la mesure
- Principe de grandes déviations de Cramér
- Principe de grandes déviations de Sanov
- Phénomène d'universalité des sommes et lois stables
- Phénomène d'universalité des extrêmes et lois max-stables
- Matrices aléatoires : théorème de Wigner
- Matrices aléatoires : théorème de Marchenko-Pastur
- Limite thermodynamique et transitions de phase
- Des équations déterministes de Newton à l'équation stochastique de Langevin
- Equilibration et thermalisation en physique statistique
- Transition BBP des matrices aléatoires : un exemple de transition de phase en science des données
- La malédiction de la grande dimension en apprentissage automatique (machine learning)
- La bénédiction de la grande dimension en apprentissage automatique
- Exposé de mise en perspective : Grandeur et misère des théorèmes en modélisation (pas de TD cette semaine

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Géométrie différentielle* **(M1)** |

(Nicolas Bergeron et Paul Laurain)

Variétés différentielles : Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes.

Formes différentielles : Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle : Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces : Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie :

J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013. Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Analyse harmonique – dualité de Pontryagin* **(L3)** |
(Lino Benedetto)

L'analyse de Fourier est traditionnellement présentée comme l'étude du développement en séries trigonométriques de fonctions du cercle, ou encore comme celle de la transformation de Fourier sur l'axe réel. Ces deux cas de figure historiques ont motivé au début du XXème siècle l'adoption d'un cadre plus général pour le développement de l'analyse harmonique : les groupes topologiques localement compacts. Cette conception est riche en applications, dans des domaines aussi variés que la théorie des nombres, la mécanique quantique ou l'études des équations aux dérivées partielles.

Dans ce groupe de lecture, nous introduirons les idées et théorèmes fondamentaux de l'analyse harmonique abstraite : la construction de la mesure de Haar, la théorie de la représentation et la dualité de Pontryagin dans le cas des groupes abéliens.

Référence :

Gerald B. Folland, « A course in abstract harmonic analysis »

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Géométrie hyperbolique* (L3) |
(Nicolas Tholozan)

Imaginée d'abord par Lobatchevski comme une sorte d'utopie non euclidienne, la géométrie hyperbolique a acquis ses lettres de noblesses à la fin du XIXe siècle avec les travaux de Klein, Poincaré sur l'uniformisation des surfaces de Riemann. Plus flexible et plus riche que sa grande soeur euclidienne, la géométrie hyperbolique est devenue progressivement un outil incontournable des mathématiques modernes.

L'objectif de se groupe de lecture sera de découvrir cette géométrie, dans laquelle le périmètre d'un cercle dépend exponentiellement de son rayon, la somme des angles d'un triangle dépend de son aire, et les octogones peuvent paver le plan.

Références :

Brice Loustau, Hyperbolic geometry, livre en préparation
https://brice.loustau.eu/ressources/book.pdf

James W. Anderson, Hyperbolic geometry, Springer undergraduate Mathematics series

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Opérateurs aléatoires de Schrödinger* (L3) |
(Laure Dumaz)

L'objet de ce groupe de lecture est d'introduire la théorie des opérateurs de Schrödinger aléatoires. Ces opérateurs décrivent l'évolution d'un électron dans un cristal avec des impuretés modélisées par un potentiel aléatoire. Dans un cristal pur, l'électron se propage et sa dynamique est dictée par le laplacien. Anderson a montré dans les années 50 que la présence - même faible - d'impuretés aléatoirement distribuées bloquait l'électron dans une petite région de l'espace. Ce phénomène est depuis appelé « localisation d'Anderson » et forme un domaine très actif de recherche à la fois en physique et en mathématiques, même si d'importantes conjectures sont encore loin d'être résolues.

Nous verrons dans ce groupe de lecture diverses techniques à l'interface des probabilités, de l'analyse fonctionnelle et de la théorie spectrale pour comprendre les questions de ce domaine et donner une preuve de la localisation d'Anderson.

Nous suivrons principalement les notes de cours très pédagogiques de Werner Kirsch, « An Invitation to Random Schrödinger operators », disponibles en ligne. Une autre preuve de la localisation pourra éventuellement être étudiée en suivant les notes de cours du M2 de Giambattista Giacomin.

Référence :

Werner Kirsch, « An Invitation to Random Schrödinger operators, Panoramas et Synthèses 25, 2008, p. 1–119, https://arxiv.org/abs/0709.3707

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Analyse harmonique* **(M1)** |
(David Gontier)

L'analyse harmonique s'intéresse à la représentation de fonctions comme somme (ou intégrale) de fonctions "de base", appelées harmoniques. Dans ce groupe de travail, nous nous intéresserons à certaines décompositions classiques (Fourier, ondelettes, Paley-Wiener, états cohérents, …), aux propriétés de convergence des séries obtenues, et nous en déduirons des inégalités fonctionnelles comme Hardy-Littlewood-Sobolev, Calderón-Zygmund, Lieb-Thirring, etc.

Ce GT s'appuiera sur le livre : « Harmonic Analysis, A comprehensive course in Analysis, Part 3 » de Barry Simon.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Autour de la théorie spectrale du Laplacien* **(M1)** |
(Lucas Vacossin)

On considère une membrane attachée aux bords d'un cadre de forme quelconque telle la peau d'un tambour. Comment comprendre les vibrations de cette membrane ? Revenons à un problème plus simple : la corde vibrante. Il est bien connu que celle-ci possède une fréquence fondamentale dont les multiples sont les harmoniques, bien connues des musiciens. Pour un tambour de forme quelconque, l'étude se complique. S'il est possible de définir ces fréquences propres, il n'est en général pas possible de les exprimer analytiquement.

La première tâche de ce groupe de travail sera de définir rigoureusement ces fréquences propres, et donc de présenter la théorie spectrale du Laplacien sur un ouvert borné. La suite du programme sera discutée avec les étudiants. Parmi les thématiques que l'on pourra aborder pour pousser l'étude spectrale du Laplacien :

- La loi de Weyl (comptage des valeurs propres)
- Les harmoniques sphériques (les fonctions propres du Laplacien sur la sphère)
- Détermination numérique des valeurs propres
- Le comportement haute-fréquence des fonctions propres (comprendre notamment la conjecture d'unique ergodicité quantique)
- Le Laplacien en dehors d'obstacles et la notion de résonances
- Le Laplacien sur les surfaces hyperboliques
- etc. !

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Entropie, de la physique statistique aux mathématiques* **(M1)** |
(Louis-Pierre Chaintron)

Ce groupe de travail s'intéressera à la formalisation et l'utilisation en mathématiques de concepts issus de la thermodynamique et de la mécanique statistique. Pour introduire le contexte, une citation inspirante, célèbre parmi d'autres : ``Ludwig Boltzmann, who spent much of his life studying statistical mechanics, died in 1906, by his own hand. Paul Ehrenfest, carrying on the work, died similarly in 1933. Now it is our turn to study statistical mechanics.'' States of matter, by David L. Goodtsein, 1975, Dover N.Y.

Pour préserver la santé mentale des membres de ce GT, nous restreindrons notre étude à différentes formalisations et utilisations de la notion d'entropie, qui est omniprésente en physique statistique, aussi bien qu'en théorie de l'information, en thermochimie, dans l'étude des équations de transport ou de diffusion, dans la théorie probabiliste des grandes déviations… Introduite par Clausius et Carnot pour l'étude des machines thermiques, cette notion a pris un essor considérable avec les travaux fondateurs de Boltzmann en mécanique statistique, qui aboutirent notamment au célèbre Théorème H. On la retrouve aujourd'hui dans toutes sortes de modèles et de contextes, dont la grande diversité rend parfois difficile le lien avec la grandeur physique initiale. Plutôt que d'en proposer une dérivation systématique et rigoureuse (dont l'existence même n'est aujourd'hui pas certaine), ce GT proposera une démarche plus illustratrice, suivant les notes de cours de L.C. Evans (librement accessibles en ligne : https://math.berkeley.edu/~evans/entropy.and.PDE.pdf).

Après une introduction présentant différentes axiomatisations rigoureuses de la thermodynamique (pour revenir sur l'origine historique de la notion), nous verrons comment l'entropie s'étend à la mécanique des milieux continus et facilite naturellement l'étude de certaines familles d'EDPs : les équations linéaires de diffusion et de transport, et non-linéaires de Hamilton-Jacobi. Ces équations seront l'occasion d'introduire des résultats classiques de régularité parabolique, de solutions entropiques et de solutions de viscosité. Nous ferons alors un aparté sur les définitions de l'entropie suivant Boltzmann et Gibbs en physique statistique, suivant Shannon en théorie de l'information, ainsi qu'une présentation de l'équation de Boltzmann et du théorème H. Ces définitions seront ensuite illustrées par un résultat rigoureux de limite hydrodynamique pour une version simplifiée de l'équation de Boltzmann d'une part, et par quelques résultats classiques en théorie des grandes déviations d'autre part. Dans le temps qu'il restera, nous parlerons du principe de conditionnement de Gibbs et de son application en théorie de l'estimation, suivant l'article de S.Mitter et N.Newton : A variational Approach to Nonlinear Estimation (suivant les goûts des étudiants présents, nous pourrons passer rapidement sur l'estimation, pour voir plutôt d'autres applications du principe de Gibbs en grandes déviations).

Références :

Entropy and Partial Differential Equations, Lawrence C. Evans, lecture notes at UC Berkeley, Department of Mathematics.

A Variational Approach to Nonlinear Estimation, Sanjoy Mitter and Niegel Newton, 2003, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol.42, Iss.5.

Références complémentaires :

Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics, Richard S. Ellis, Springer 2006, Classics in Mathematics.

(Ir)réversibilité et Entropie, Cédric Villani, Séminaire Poincaré XV (2010), Le Temps, 17 – 75.

| ***Groupe de travail : Formules d'inversion, polytopes et quelques*** *structures algébriques* **(M1)** |

(Arnaud Etève)

Le but de ce groupe de travail est de comprendre quelques résultats de l'article "Hopf monoids and generalized permutahedra" de M. Aguiar et F. Ardila. Ce sont des résultats au croisement de la combinatoire des polytopes et des structures algébriques.

Plus précisément, d'un côté, on dispose d'une large classe de polytopes, à savoir les permutoèdres généralisés, ceux-ci sont obtenus en déformant le permutoèdre qui est un polytope explicite. D'un autre côté, on peut considérer certaines catégories et structures algébriques dans ces catégories, à savoir les algèbres de Hopf, que l'on peut comprendre en premier instance comme un généralisation des groupes. En tant que tel, on peut considérer le groupe des caractères d'une telle algèbres et ceux-ci forment un groupe. La construction d'Aguiar et Ardila consiste ensuite à construire une telle algèbre de Hopf à partir de la famille de polytopes précédemment considérée puis à en identifier le groupe des caractères. En considérant certaines sous-familles des permutoèdres généralisés on obtient certaines sous algèbres avec de nouveaux groupes de caractères.

Lorsqu'on considère la famille de tous les permutoèdres généralisés, le groupe des caractères que l'on obtient s'identifie au groupe des séries exponentielles $\sum_i a_i \frac{t^i}{i!}$ avec la multiplication, et il sort de la combinatoire une formule explicite pour l'inverse de cette série. Similairement, si on considère la famille des associaèdres généralisés, le groupe de caractères que l'on obtient s'identifie au groupe des série formelles de la forme $t + \sum_{i > 1}a_i t^i$ équipé de la composition, et la machinerie produit aussi une formule pour l'inverse pour la composition des séries.

L'article considère plusieurs autres familles de polytopes, nous nous concentrerons en premier sur les deux familles mentionnées précédemment et la construction principale de ces algèbres de Hopf pour obtenir les formules promises. Si le temps le permet, on pourra étudier d'autres familles de polytopes et les invariants correspondants.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Le modèle d'Ising* **(M1)** |
(Lucas Rey)

Le modèle d'Ising est un modèle probabiliste issu de la physique statistique décrivant l'interaction de spins disposés aux sommets d'un graphe, le plus souvent Z^d. Proposé en 1925 par Lenz et étudié par Ising dans sa thèse dans le cas de la dimension 1, ce modèle a suscité un intérêt toujours renouvellé dans les communautés des mathématiques et de la physique statistique, notamment car il permet d'étudier le phénomène de transition de phase (à partir de la dimension 2) et présente des comportements différents et riches selon les valeurs des paramètres (critique, sous-critique, sur-critique) qui sont encore pour beaucoup des problèmes ouverts. Citons par exemple la détermination des exposants critiques, les résultats d'universalité, le calcul des probabilités de croisement.

Dans ce groupe de travail, nous proposons une introduction détaillée au modèle d'Ising en suivant dans un premier temps les notes de cours de Y. Velenik "Le modèle d'Ising" (disponibles en ligne). Nous introduirons les outils mathématiques communs aux autres modèles discrets de la physique statistique, notamment les mesures de Gibbs finies et infinies, le formalisme des fonctions de partition, l'énergie libre. Cela nous permettra d'étudier le phénomène de transition de phase. Selon le temps restant et les goûts, nous pourrons (en utilisant le livre de S. Friedli et Y. Velenik "Statistical mechanics of lattice systems") étudier les liens avec d'autres modèles (la percolation, le modèle de dimère), ou rentrer dans les détails de l'étude en dimension 1 et 2 et essayer de comprendre pourquoi on parle de modèle "exactly solvable". On pourra aussi s'intéresser à la littérature de la communauté physicienne sur le sujet en étudiant quelques chapîtres du livre de R. Baxter "Exactly solved models in statistical mechanics".

Prérequis : intégration et probabilités.

Il est conseillé de suivre en parallèle le cours de processus stochastiques.

■ ■ ■ ■ ■

| ***Groupe de travail : Mouvement Brownien branchant et*** *équation de réaction-diffusion* **(M1)** |
(Bastien Mallein)

Le mouvement Brownien branchant est un système de particules sur la droite réelle. Chaque particule se déplace de façon indépendante selon un mouvement Brownien, tout en se séparant en deux au bout d'un temps exponentiel. Ce processus est connecté avec une équation de réaction diffusion dite F-KPP, introduite parallèlement par Fisher et par Kolmogorov, Petroviskii et Piskunov dans les années 30 pour décrire le comportement d'une population invasive.

L'objectif de ce groupe de travail est de montrer cette connexion entre le mouvement Brownien branchant et l'équation F-KPP et d'illustrer quelques applications de cette connexion. Nous introduirons progressivement les outils nécessaires à la description du mouvement Brownien branchant et son lien avec l'équation F-KPP en suivant les notes de cours de Julien Berestycki : https://www.stats.ox.ac.uk/~berestyc/Articles/EBP18_v2.pdf.

En particulier, nous introduirons et décrirons :
- Le processus de Yule décrivant le nombre de particules d'un mouvement Brownien branchant ;
- Le mouvement Brownien, décrivant la trajectoire des particules, et ses liens avec l'équation de la chaleur ;
- La représentation de McKean liant mouvement Brownien branchant et équation F-KPP ;
- La position du front de l'équation F-KPP ;
- Les méthodes de changement de mesure et décompositions épinales.

| *Groupe de travail : Théorie de Morse et applications* **(M1)** |

(Léonard Pille-Schneider)

Soit M une variété différentielle, et f: M -> R une fonction de Morse sur M, à savoir une fonction lisse dont les points critiques sont tous non-dégénérés (et en particulier isolés). La théorie de Morse propose de reconstruire la topologie de la variété M à travers l'étude de celle des ensembles de niveau {f ≤ c} pour c variant dans R. On construira par exemple l'homologie de Morse d'une variété, obtenue en comptant des trajectoires entre les points critiques d'une fonction de Morse, le long d'un certain champ de vecteurs. On en déduira des résultats généraux sur la topologie des variétés, par exemple la classification topologique des surfaces.

En fonction du temps nous verrons aussi d'autres applications :

- Groupes de Lie et espaces symétriques,
- Périodicité de Bott,
- Théorie de Morse sur les espaces de chemins,
- Etude des géodésiques fermées sur une variété Riemannienne.

Références :

Morse Theory, Milnor;
Morse Theory and Floer Homology, Audin-Damian.

Prérequis : géométrie différentielle, un peu de topologie algébrique.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie spectrale pour la mécanique quantique* **(M1)** |
(Solal Perrin-Roussel)

La théorie spectrale a été développée à partir des années 1920 pour proposer un cadre mathématique rigoureux à la physique quantique émergente. Nous étudierons dans ce groupe de travail les outils mathématiques de la théorie spectrale en les illustrant dans le cadre de la mécanique quantique. Nous verrons le modèle quantique de l'atome d'hydrogène, avant de se concentrer sur la théorie des opérateurs auto-adjoints. Le but est d'établir un "théorème spectral" pour poser les bases du calcul fonctionnel, et d'étudier le spectre des opérateurs auto-adjoints.

Le groupe de travail s'appuiera sur le livre « Théorie spectrale et mécanique quantique » de Mathieu Lewin.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Topologie modérée et structures O-minimales* **(M1)** |
(Vadim Lebovici)

« […] La “topologie générale” a été développée (dans les années trente et quarante) par des analystes et pour les besoins de l’analyse, non pour les besoins de la topologie proprement dite, c’est-à-dire l’étude des propriétés topologiques de formes géométriques diverses. Ce caractère inadéquat des fondements de la topologie se manifeste dès les débuts, par des “faux problèmes” (au point de vue au moins de l’intuition topologique des formes) comme celle de “l’invariance du domaine” [...].

Aujourd’hui encore, comme aux temps héroïques où on voyait pour la première fois et avec inquiétude des courbes remplir allègrement des carrés et des cubes, quand on se propose de faire de la géométrie topologique dans le contexte technique des espaces topologiques, on se heurte à chaque pas à des difficultés parasites tenant aux phénomènes sauvages. » - Alexander Grothendieck [2]

Au cours de ce groupe de travail, nous découvrirons la topologie modérée développée tout au long du XXème siècle via l'axiomatisation introduite par Lou van den Dries en 1984 sous le nom de structures O-minimales. Nous suivrons principalement le livre de van den Dries [1] lui-même. Ceci nous permettra de découvrir en détail plusieurs exemples de telles structures (les semilinéaires, les semialgébriques) ainsi que les nombreux théorèmes que cette puissante axiomatique permet de déduire : le théorème de décomposition cellulaire, de triangulation, de trivialisation, et d'autres.

Selon le temps et les affinités des élèves, nous pourrons également aborder une très jolie application -- que l'on pourrait nommer "rayons X topologiques" -- de cette théorie au travers d'un théorème de Pierre Schapira [3] qui répond positivement à la question suivante : la connaissance de la caractéristique d'Euler de l'intersection d'une forme géométrique modérée avec chaque hyperplan affine d'un espace Euclidien suffit-elle à reconstruire la forme ?

Références :

[1] van den Dries (1998) Tame topology and O-minimal structures (Vol. 248). Cambridge University Press.

[2] Grothendieck (1984) Esquisse d'un programme.
[3] Schapira (1995) Tomography of constructible functions. In International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms, and Error-Correcting Codes (pp. 427-435). Springer, Berlin, Heidelberg.

■ ■ ■ ■ ■

| *Intégration et Probabilités* **(L3)** |

(Anne-Laure Dalibard et Bastien Mallein)

Le cours commencera par une étude des suites de jets de dés, qui sera l'occasion à la fois d'introduire quelques techniques probabilistes et de motiver les questionnements sur l'existence des mesures.

Ensuite, nous montrerons l'existence des mesures utiles (mesures produits, mesure de Lebesgue) et nous donnerons les grands théorèmes d'intégration.

Pour finir, nous reviendrons aux probabilités et montrerons la loi forte des grands nombres dans un cadre plus général, ainsi que le théorème de la limite centrale.

Références : Il existe de nombreux livres d'introduction à la théorie de la mesure et/ou aux probabilités. Le plus proche du cours est sans doute : Billingsley - Probability and Measure.

■■■■■

| *Introduction aux sciences du vivant* **(L3)** |
(Gersende Lepere)

Ce cours d'introduction vise à permettre à des non-biologistes de s'approprier les connaissances fondamentales nécessaires à toute compréhension des modes d'organisation, de fonctionnement et d'évolution du vivant. Il constitue un pré-requis nécessaire pour suivre la plupart des autres cours destinés aux non-biologistes et constitue la première étape de filières mixtes avec la biologie.

Les généraux objectifs sont les suivants :

- Permettre une compréhension en profondeur de ce qui fait l'originalité, l'unité et la diversité du vivant
- Donner les informations essentielles sur la machinerie centrale, responsable des phénomènes d'hérédité, d'expression de l'information génétique et d'adaptation, et sur ses mécanismes de contrôle et leurs dérèglements éventuels
- Fournir une introduction aux mécanismes-clés impliqués dans l'origine des espèces et de leur évolution.
- Illustrer par quelques exemples les méthodologies qui permettent de constituer ce savoir, et leurs limites

Thèmes abordés :

Unité du vivant : chimie du vivant, protéines et acides nucléiques, organisation cellulaire, métabolisme, membranes, signalisation et communication cellulaires, cycle cellulaire, hérédité, de l'ADN aux protéines, régulation de l'expression génique et médecine moléculaire, développement et morphogenèse.

Diversité du vivant : Individus, populations, communautés, écosystèmes : variation phénotypique et propriétés émergentes des populations. Réseaux d'interactions entre populations : structure, robustesse, évolution. Diversité des communautés et fonctionnement des écosystèmes. Evolution : marqueurs génétiques, notion d'espèce et principes de la reconstruction phylogénétique. Histoire des caractères et innovation évolutive. Evolution de la coopération et niveaux de sélection. Processus de spéciation.

Méthodes pour l'étude et la manipulation des gènes et des génomes : Méthodes de base (recombinaison in vitro, cartographie, séquençage...). Clonage moléculaire (principes, stratégies d'isolement de gènes, manipulation de gènes isolés). Organismes génétiquement modifiés (transgenèse, invalidation, mutation et remplacement de gènes, considérations éthiques)

Évaluation : Examen écrit incluant questions de cours et exercices

Support de cours : Life, The Science of Biology (Savada)

▪▪▪▪▪

| *Logique* **(M1)** |
(Silvain Rideau-Kikuchi et Paul Wang)

Née des questionnements du début du 20ème siècle sur les « fondements des mathématiques », la logique mathématique est encore relativement jeune à l'échelle des mathématiques. Et bien qu'elle fournisse en effet les outils d'analyse de ces fondements, elle a largement dépassé cette seule question, mise à mal par l'impossibilité de ce programme fondationnel, mise en avant par Gödel entre autres.

La logique s'intéresse aux liens entre les structures mathématiques en mettant l'accent sur les phénomènes de définissabilité (par des formules) : axiomatisation de certaines classes, définissabilité ou non de certains ensembles, interprétations de structures les unes dans les autres, complexité combinatoire et géométrique des ensembles définissables... Par sa nature transverse, la logique mathématique a trouvé des applications à de nombreux autres sujets mathématiques : de la combinatoire à la théorie des nombres en passant par la dynamique. Ses liens avec la théorie des ensembles sont une coïncidence historique ; mais comme elle permet d'en clarifier les indécidabilités, le semestre terminera sur un peu de combinatoire transfinie. Il doit pourtant être pris comme une invitation au point de vue modèle-théorique.

Programme provisoire :

- Logique élémentaire : dualité de Boole-Stone, sémantique du premier ordre, ultraproduits, complétude et compacité, espaces de types.
- Éléments de théorie des modèles : constructions de modèles, catégoricité, va et vient, élimination des quantificateurs.
- Phénomènes d'incomplétude : problèmes d'internalisation et théorèmes d'incomplétude.
- Théorie des ensembles : axiomatisation, ordinaux, cardinaux, modèles intérieurs classiques, axiome du choix, hypothèse du continu.

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques des données* **(M1)** |
(Gabriel Peyré, Geert-Jan Huizing et Pierre Ablin)

Ce cours passe en revue les méthodes mathématiques et numériques fondamentales en sciences des données. La première partie du cours couvre les bases de la représentation et du traitement des données, en particulier la théorie de

Shannon, le filtrage et les ondelettes. La deuxième partie présente l'optimisation convexe et non-convexe, dans la perspective de son utilisation en apprentissage automatique et en particulier pour les réseaux de neurones. Le cours est validé par un petit projet et un examen.

Références :
- Pour la théorie : https://mathematical-tours.github.io/book/
- Pour le numérique et les TPs : www.numerical-tours.com

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques pour économistes* **(PT)**|
(Léonard Pille-Schneider)

Le but de ce cours est de fournir aux étudiants les outils d'analyse nécessaires pour suivre des cours d'économie s'appuyant sur un formalisme mathématique. La première partie du cours visera à introduire les notions de topologie et d'algèbre linéaire nécessaires, tandis que la deuxième fournira les bases de calcul différentiel requises afin d'aborder l'optimisation sous contraintes et la convexité en dimension arbitraire.

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques pour l'environnement et la société* **(M1)** |
(Bertrand Maury et Solal Perrin-Roussel)

Ce cours propose, en premier lieu, une introduction poussée aux cadres mathématiques permettant d'aborder ces questions d'environnement et de société. Nous avons choisi de privilégier trois axes :

- Optimisation
- Graphes et réseaux
- Systèmes dynamiques

En second lieu, ce cours se veut une initiation à la démarche de modélisation, qui permet d'élaborer, à partir de la considération d'une situation de la vie réelle, un cadre mathématique adapté, et une formalisation du problème sous forme d'équations, en lien avec un ou plusieurs des domaines des mathématiques évoqués ci-dessus.

Les domaines applicatifs visés sont (liste non exhaustive) : questions de mobilité / transport (mobilité urbaine, transport multimodal, mouvements de foules), développement urbain, cycle des énergies, qualité de l'air, propagation d'épidémies, réseaux sociaux (propagation d'opinion) …

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Numerical methods for fluid dynamics **(M2) |**
(Emmanuel Dormy)

Numerical simulation is playing an expanding role in the study of fluid dynamics in scientific research. In this course, we will develop and analyse the various methods available to solve the partial differential equations relevant to computational fluid dynamics (elliptic, parabolic and hyperbolic). The emphasis will be placed on the algorithms and the convergence properties, as well as their application to a wide variety of problems in fluid dynamics.

1. Overview of discretisation in time and space for PDEs,
2. Stokes equation and splitting algorithms,
3. Transport schemes, numerical diffusion and dispersion,
4. Compressible flows,
5. Spectral methods and turbulent flows,
6. Waves and numerical anisotropy,
7. Open domains and boundary conditions.
8. Complex domains,
9. Prospects.

Validation will take the form of a mid-term problem and a final project in pairs.

Modélisation numérique pour la mécanique des fluides

La résolution numérique des équations de la dynamique des fluides occupe une place grandissante en recherche. Nous allons dans ce cours développer et analyser les méthodes mises en œuvre pour la résolution des équations aux dérivées partielles intervenant en dynamique des fluides (elliptiques, paraboliques et hyperboliques). On insistera sur les algorithmes et leurs propriétés de convergence ainsi que sur les applications à une grande variété de problèmes de dynamique des fluides.

1. Retour sur la discrétisation en espace et en temps pour les EDP,
2. Equation de Stokes et schémas de splitting,
3. Schémas de transport, diffusion et dispersion numérique,
4. Ecoulements compressibles,
5. Méthodes spectrales et écoulements turbulents,

6. Vagues, ondes et anisotropie numérique,
7. Domaines ouverts et conditions aux limites.
8. Domaines de formes complexes,
9. Perspectives.

L'évaluation du cours se fait par un devoir de mi-cours et un projet de fin de cours en binôme.

▪▪▪▪▪

| *Opérateurs aléatoires* **(M2)** |

(Laure Dumaz)

Depuis les travaux du physicien Anderson dans les années 50, la localisation dans des systèmes désordonnés a été l'objet d'une importante littérature. D'un point de vue mathématique, la question est de savoir si l'opérateur auto-adjoint représentant l'hamiltonien du système est purement ponctuel.
Parallèlement, la théorie des matrices aléatoires s'est développée suite aux travaux de Wigner, qui a observé que les niveaux d'énergie d'atomes lourds est bien modélisée par les valeurs propres de grandes matrices aléatoires. Les études se concentrent dans ce cas sur la répartition statistique des valeurs propres de ces grandes matrices et en particulier la répulsion entre celles-ci.

L'objet de ce cours est l'étude d'opérateurs aléatoires provenant de ces deux théories. Ces opérateurs appartiennent à la classe des opérateurs de Sturm Liouville généralisés du premier ou deuxième ordre. Nous expliquerons quels opérateurs apparaissent dans ces modèles puis nous étudierons certaines de leurs propriétés spectrales notamment grâce à des outils de calcul stochastique.

Les notions importantes de la théorie des opérateurs auto-adjoints seront rappelées dans les premiers cours (elles ne sont donc pas un prérequis nécessaire à ce cours).

■ ■ ■ ■ ■

| *Probabilités pour physicien·ne·s* **(PT)** |
« Probability »
(Raphaël Cerf et Guilhem Semerjian)

Abstract: This course will present the probabilistic model and the fundamental limit theorems for sums of independent real-valued random variables. The central object of the course is the heads or tails game or the symmetric random walk on the integers.

Résumé : Ce cours présentera le modèle probabiliste et les théorèmes limites fondamentaux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles. L'objet central du cours est le jeu de pile ou face ou la marche aléatoire symétrique sur les entiers.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Processus stochastiques* **(M1)** |
(Quentin Berger et Théo Lenoir)

Le cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques à temps et espace discrets, avec quelques excursions dans le cas continu :

1. Révisions sur le cadre probabiliste : convergence en loi, théorème(s) de la limite centrale, vecteurs gaussiens, lois infiniment divisibles.
2. Espérance conditionnelle : définition, propriétés.
3. Martingales à temps discret : exemples, temps d'arrêt, inégalités de Doob, convergence.
4. Chaînes de Markov : exemples, classification des états, mesures invariantes, théorèmes ergodiques.
5. Marches aléatoires et un aperçu du mouvement brownien.
6. Quelques exemples des modèles de la physique statistique.

Bibliographie :

J.-F. Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, notes de cours (2006)
P. Billingsley, Probability and Measure, third edition, Wiley and sons (1995)
D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press (1991)

■ ■ ■ ■ ■

| *Statistique* **(M1)** |
(Clément Levrard et Anna Ben-Hamou)

Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

En fonction des goûts et du niveau d'allergie au clavier de chacun, on pourra s'attarder plus ou moins en profondeur sur des exemples d'applications et d'implémentation. Nous essaierons de proposer dans ce cours 80% de contenus classiques et inévitables dans un cours de statistique et 20% de résultats récents et problèmes ouverts, pour montrer de jolies mathématiques appliquées qui répondent à des problèmes importants en statistique.

Le plan du cours, modulo quelques modifications éventuelles, est le suivant :

- Modèles et expériences statistiques
- Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
- Régression linéaire : estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussien, optimalité minimax
- Statistique bayésienne : risque bayésien, estimateur bayésien
- Maximum de vraisemblance et application aux modèles exponentiels
- Modèles linéaire généralité : régression logistique, résultats limites
- Statistique en grande dimension : Lasso et sparsité
- Retour aux tests paramétriques, théorie de Neyman Pearson

■ ■ ■ ■ ■

| *Systèmes dynamiques* **(M1)** |

(Raphaël Cerf et Lino Benedetto)

La première partie du cours sera consacrée aux systèmes dynamiques déterministes. Nous procéderons à une première classification des systèmes linéaires, puis nous verrons comment les systèmes généraux peuvent être linéarisés au voisinage d'un point fixe hyperbolique. Nous montrerons le théorème de la variété stable, et nous parlerons de stabilité structurelle. Des exemples classiques seront présentés pour illustrer les concepts introduits.

La seconde partie du cours sera consacrée à la théorie ergodique. Nous présenterons les théorèmes classiques de récurrence, le théorème ergodique et nous expliquerons ce qu'est un système ergodique. Nous parlerons de la question de la classification des systèmes ergodiques et de leur entropie. Nous appliquerons certains de ces résultats à la percolation de premier passage.

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie algébrique* **(M1)** |
(Muriel Livernet et Coline Emprin)

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique. On associera aux espaces topologiques des invariants algébriques (groupe fondamental, groupes d'homologie, anneau de cohomologie, groupes d'homotopie supérieurs), et on donnera des applications de l'étude et du calcul de ces invariants à des problèmes de topologie.

1. Groupe fondamental
   Revêtements
   Théorème de Van Kampen
   CW-complexes

2. Homologie singulière
   Théorème de Hurewicz
   Homologie cellulaire
   Cohomologie et cup-produit

3. Groupes d'homotopie supérieurs
   Fibrations
   Théorème de Freudenthal

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie et calcul différentiel* **(L3)** |
(Djalil Chafaï et Lucas Vacossin)

1. Topologie générale et espaces métriques :
   Espaces métriques et espaces topologiques.
   Complétude, compacité, connexité.
   Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2. Espaces de Banach :
   Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
   Théorème de Hahn-Banach.
   Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3. Calcul différentiel :
   Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
   Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4. Équations différentielles ordinaires :
   Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
   Lemme de Gronwall et estimations