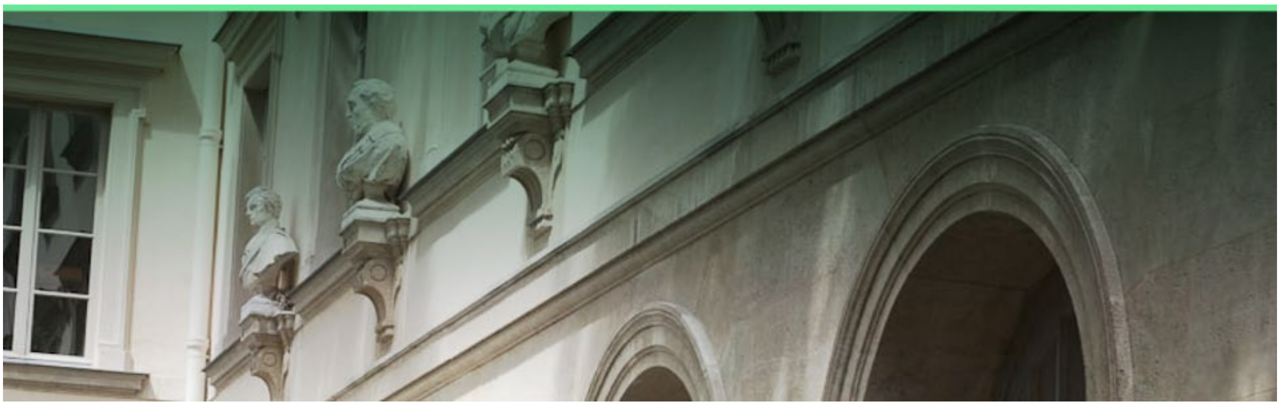
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

DIRECTION DES ETUDES

2023-2024



Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05 | 01 44 32 31 72 | education@math.ens.fr

Le département de mathématiques et applications (DMA) offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure (DENS) ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiant·e·s par an), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec Sorbonne Université, l'Université Paris Cité, l'Université Paris-Dauphine – PSL, l'Université de Paris-Saclay, et l'Université Sorbonne Paris-Nord, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Direction des études du DMA : Djalil Chafaï et Isabelle Gallagher
| Secrétariat pédagogique : Yue Teng

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05
01 44 32 31 72 - education@math.ens.fr
https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION

Objectifs

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématicien·ne·s pur·e·s et appliqué·e·s, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie, …). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

Debouches

À la sortie de la formation, l'étudiant·e peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il est également possible de prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- Enseignant·e-chercheur·euse à l'université ;
- Chercheur·euse en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- Enseignant·e en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Écoles d'ingénieurs, formations spécialisées…) ;
- Ingénieur·e mathématicien·ne dans l'industrie.

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ÉNS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.

Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

Candidature 2023-2024

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiant·e·s ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent.

Toutes les informations se trouvent sur les sites suivants :

- Site enseignement des mathématiques : https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement
- Site de l'ÉNS : https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours

Le diplome de l'ENS majeure mathematiques

Les normalien·ne·s reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu que les conditions suivantes soient satisfaites :

- L'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- La validation des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- La validation de 72 ECTS en plus des 180 ECTS de la L3 et du Master :
  - Au moins 24 ECTS de cours mathématiques[1]
  - Au moins 24 ECTS de cours **scientifiques** non-mathématiques
  - Au moins 24 ECTS libres
- La validation d'un cours de langue par année d'inscription au DENS
- Une expérience à l'étranger

Mineures et doubles majeures du DENS

- Mineures du DENS

Promotion à partir de 2023 :

[1] Les règles du cursus au DMA exigent bien plus que cet attendu minimal de 24 ETCS.

Un candidat ayant obtenu un minimum de 30 ECTS dans une discipline littéraire ou scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Promotions antérieures à 2023 :

Un candidat ayant obtenu un minimum de 24 ECTS dans une discipline scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire en sciences (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Un candidat ayant obtenu un minimum de 48 ECTS dans une discipline littéraire pourra obtenir une spécialité secondaire en lettres sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

- Doubles majeures du DENS

Les doubles majeures du DENS sont délivrées à titre exceptionnel sous les conditions suivantes :

- Un cursus complet dans une discipline (au sein d'un département de l'ENS)
- Au moins deux années complètes dans la seconde discipline (L3-M1, M1-M2 ou L3-M2 équivalent à 120 ECTS)
- Accord des deux départements

INSCRIPTION A L'UNIVERSITE

Après leur admission, les normalien·ne·s s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de ces études, il est en particulier nécessaire d'obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- Pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;

- Pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;

- A l'issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiant·e·s qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un·e directeur·ice de recherche ainsi que des divers·es encadrant·e·s de l'université d'inscription (délégué·e aux thèses, directeur·ice de l'école doctorale de rattachement, directeur·ice du laboratoire d'accueil).

Tutorat

L'encadrement des étudiant·e·s en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un·e tuteur·ice, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, est affecté·e à chaque étudiant. Choisi·e aléatoirement en première année, le choix sera fait, pour les autres années, en fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année.

Le rôle des tuteur·ice·s est d'aider l'étudiant·e à l'organisation de sa scolarité, de le·a conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études est mis au point par les étudiant·e·s, les tuteur·ice·s et le directeur des études du DMA, signé par ces parties et transmis à la directrice des études sciences de l'ENS. Ce programme régule les conditions de validations de l'année d'étude correspondante. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement les tuteur·ice·s.

Stage

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant·e à un environnement différent.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiant·e·s pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec les tuteur·ice·s et les directeurs des études du DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrant·e·s potentiel·le·s pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Les étudiant·e·s sont supposé·e·s contacter les encadrant·e·s étranger·e·s proposé·e·s non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Ce stage reste optionnel, et n'est pas obligatoire, bien qu'il aide à remplir la condition d'expérience à l'étranger pour le DENS. Il est possible de le substituer par une plus courte expérience, mais qui ne sera pas forcément rétribuée en crédits ECTS.

Un rapport de stage de 20 pages sera à rendre avant une soutenance de 15 minutes, qui a traditionnellement lieu à la rentrée suivante. Les consignes données par le passé sont les suivantes :

- Brève description de l'expérience à l'étranger

- Fonctionnement du lieu de stage
- Au moins 15 pages de description de vos activités mathématiques, recherches…
- Vous pouvez utiliser du matériel de prépublication, ou rédiger un court mémoire sur les problématiques étudiées pendant le stage

SEMINAIRE « DES MATHEMATIQUES »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois, avant le thé du département de mathématiques, et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches en mathématiques.

PLANNING

Attention, ces dates sont susceptibles de modification, consulter l'agenda en ligne.

Réunion de présentation des cours de première année
Jeudi 14 septembre 2023 à 15h, Amphithéâtre Galois

Réunion de présentation des cours de deuxième année
Vendredi 8 septembre 2023 à 14h, salle Cartan

Commission des études – Seconde session 2023
Mardi 20 septembre 2023

Premier semestre :

Pré-rentrée thématique « Analyse Harmonique »
Matinées du lundi 4 au vendredi 8 septembre 2023

Début des cours
Première année : lundi 18 septembre 2023
Deuxième année : lundi 11 septembre 2023

Vacances et jours fériés
Vacances de la Toussaint : du samedi 28 octobre au dimanche 5 novembre 2023
Vacances de Noël : du samedi 23 décembre 2023 au dimanche 7 janvier 2024

Fin des cours
Vendredi 12 janvier 2024

Examens du premier semestre
Du lundi 15 janvier au vendredi 19 janvier 2024

Réunion de présentation du second semestre
Vendredi 26 janvier 2024 à 14h, salle Cartan

<u>Deuxième semestre :</u>

Début des cours
Lundi 29 janvier 2024

Vacances et jours fériés
Vacances d'hiver : du samedi 17 février au dimanche 25 février 2024
Vacances de printemps : du samedi 13 avril au dimanche 21 avril 2024

Fin des cours
Vendredi 24 mai 2024

Examens du second semestre
Du lundi 3 juin au vendredi 7 juin 2024

Exposés de mathématiques de première année
Du lundi 10 juin au vendredi 14 juin 2024

Commissions des études 2024
1ère session (première et deuxième années) : jeudi 20 juin 2024
2ère session (première et deuxième années) : vendredi 20 septembre 2024

ENSEIGNEMENT

Organisation de la formation

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec les tuteur·ice·s, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrant·e·s du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiant·e·s et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur·ice et des directeurs des études pour tous les choix concernant leur programme d'études.

Filiere mathematiques

Première année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en troisième année de licence (L3), mais suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en deuxième année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiant·e·s dont l'avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l'étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L'inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l'élève. Avec le·a tuteur·ice, l'élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiant·e·s composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

▪ FILIERES PLURIDISCIPLINAIRES

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l'ENS. Organisées conjointement entre le département de mathématiques et les départements de physique, d'informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiant·e·s motivé·e·s de poursuivre une double formation ;
- aux étudiant·e·s encore indécis·e·s de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. Ils sont inscrits au département de mathématiques. En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Enseignant-e-s chercheur-euse-s référent-e-s : Cristina Toninelli (CNRS/PSL) et Amir-Kian Kashani Poor (ENS)

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d'informatique. Les élèves entré·e·s par le concours Info s'inscrivent au département d'informatique, les élèves entré·e·s par le concours MPI au département de mathématiques. Les tuteur·ice·s proviennent de leur département d'inscription. En deuxième année, il est possible de s'orienter soit vers les mathématiques soit vers l'informatique, et de rejoindre le département de son choix.

Enseignant chercheur référent : Marc Lelarge (INRIA)

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheur·euse·s capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Enseignant chercheur référent : Amaury Lambert (IBENS)

Objectifs du cursus

Les étudiant·e·s issu·e·s de la filière mathématiques/biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Il y aura été appris à décortiquer la littérature spécialisée, à suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et à initier dialogues et collaborations avec les biologistes dans leurs laboratoires.

Les deux années de cursus permettent aux élèves concerné·e·s de continuer, suivant leur parcours :

- un M2 de mathématiques de la modélisation,
- un M2 de mathématiques pour la biologie,
- un M1/M2 IMaLiS, parcours Ecologie/Evolution, parcours Neurosciences ou parcours Biologie fondamentale pour la Santé.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s'inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de sciences cognitives. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tou·te·s les étudiant·e·s du département de mathématiques ; l'inscription à ces cours n'engage donc pas les étudiant·e·s concerné·e·s à l'exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

REGLES D'OBTENTION

| *Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone.* |

- PREMIÈRE ANNÉE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

Commun pour toutes les filières	4 cours de niveau licence : (1) ○ Algèbre 1 ○ Analyse complexe ○ Intégration et probabilités ○ Topologie et calcul différentiel	12 ECTS x 4 = 48 ECTS
Filière Mathématique	Mémoire et exposé de 1ère année	12 ECTS
Filière Math/Physique	Cours spécifiques du cursus mixte ○ Grande dimension	
Filière Math/Informatique	Cours spécifique du cursus mixte) ○ Initiation à la cryptologie	
Filière Math/Biologie	Mémoire et exposé d'interface math-biologie	
Total		60 ECTS

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental.

L'obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s'il ne compte pas pour la L3) parmi :
  Algèbre 2
  Analyse complexe
  Analyse fonctionnelle
  Géométrie différentielle
  Logique
  Modélisation mathématique

- Un groupe de lecture parmi :
  La méthode probabiliste, Nathanaël Enriquez UPS
  Lois de conservations scalaires, Corentin Gentil ENS
  Sous-groupes arithmétiques de groupes de Lie, Samuel Bronstein ENS
  Spectre de graphes aléatoires, Laure Dumaz CNRS/ENS

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.

  | *Il est conseillé de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filières pluridisciplinaires

Mathématiques/Physique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 de physique :

- Des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  Physique statistique des systèmes en équilibre (9 ECTS, 1er semestre)
  Introduction à la mécanique quantique (9 ECTS, 1er semestre)
  Relativité et électromagnétisme (9 ECTS, 2ème semestre)

Hydrodynamique (9 ECTS, 2ème semestre)
Physique du solide (9 ECTS, 2ème semestre)

- Le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheur·euse·s des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Informatique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- Des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

Semestre 1 :

Algorithmique et programmation (9 ECTS)
Systèmes numériques (9 ECTS)
Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

Semestre 2 :

Apprentissage statistique (9 ECTS)
Systèmes et réseaux (9 ECTS)
Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
Initiation à la cryptologie (**Obligatoire**, 12 ECTS)
Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
Bases de données (9 ECTS)
Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- Le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique.

Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un·e chercheur·euse et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

<u>Mathématiques/Biologie</u>

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours de Modalisation mathématique (2ème semestre).
- Le cours de M1 d'Analyse fonctionnelle (2ème semestre, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2ème année).
- Cours de biologie pour non biologistes :
  Introduction aux Sciences du Vivant (1er semestre, 3 ECTS, le vendredi à 14h)
  Biologie moléculaire de la cellule (2ème semestre, 3 ECTS, le mercredi après 16h)
  Groupe de lecture en biologie : modélisation des système biologique (2ème semestre, 6 ECTS).
- Deux cours parmi les suivants au 1er semestre :
  Ecologie & Biodiversité (6 ECTS)
  Neurosciences (6 ECTS)
  Biologie Moléculaire et Génétique (6 ECTS)
- Deux cours parmi les suivants au 2ème semestre :
  Biologie cellulaire (6 ECTS)
  Développement (6 ECTS)
  Biologie évolutive (6 ECTS)
- Une école d'été ou un stage en biologie ou en neuroscience.

- DEUXIÈME ANNÉE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : ○ Algèbre 2 ○ Analyse complexe [(1)] ○ Analyse fonctionnelle [(3)] ○ Géométrie différentielle [(3)] ○ Logique [(3)] ○ Processus stochastiques [(2)] ○ Modélisation mathématique [(3)]	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : ○ Mathématiques des données ○ Statistique [(2)] ○ Analyse des équations aux dérivées partielles ○ Systèmes dynamiques ○ Topologie algébrique [(3)]	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours recommandé pour la filière maths/biologie
(3) Cours accessible dès la 1$^{\text{ère}}$ année

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)
- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  Les arbres en probabilité : la clé de formules explicites (probabilités),

  Systèmes à diffusion croisée (analyse des équations aux dérivées partielles),

  Superrigidité (théorie des groupes, théorie ergodique, analyse fonctionnelle),

  Modèles non-linéaires de la physique quantique (analyse et physique mathématique)

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail des cours avancés.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du DENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1e année pour les élèves inscrit·e·s directement en 2e année
- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.

| *Il est conseillé de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière mathématiques/biologie

- Les détails sont à vérifier auprès du responsable de filière M. Amaury Lambert (amaury.lambert@ens.psl.eu).

Troisième année

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)

- La composition du *mémoire de Diplôme*
  Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Présentation du domaine de recherche,* présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).

- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - Cours de M2 des universités partenaires
  - Dynamique des équations des ondes semi-linéaires, Thomas Duyckaerts
  - Opérateurs aléatoires, Laure Dumaz
  - Fonctions harmoniques et bords de marches aléatoires, Anna Erschler
  - Systèmes de particules en interaction, Cristina Toninelli

- Un groupe de travail auto-organisé *(facultatif)*.

- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif)*.

  | *Remarque : une expérience à l'étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

COURS DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2023-2024

PREMIÈRE ANNÉE

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 : théorie des groupes (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	G. Chenevier CNRS/ENS N. Marquis ENS
• Probas 1 : intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	A.-L. Dalibard SU B. Laslier UPC
• Analyse 1 : topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	D. Chafaï PSL C. Gentil ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Spectre de graphes aléatoires	L. Dumaz CNRS/ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Sous-groupes arithmétiques de groupes de Lie	S. Bronstein ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) La méthode probabiliste	N. Enriquez UPS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Lois de conservations scalaires	C. Gentil ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	S. Rideau-Kikushi CNRS/ENS P. Wang ENS

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) (Cours de licence - 70h : 42h cours + 28h TD)	A. Mézard SU A. Metz-Donnadieu ENS
• Analyse 2 : analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	M. Fathi UPC S. Bronstein ENS

• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	E. Giroux CNRS/ENS E. Di Nezza SU
• Modélisaton mathématique (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	B. Maury PS S. Perrin-Roussel ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Topologie algébrique (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	M. Livernet PC C. Emprin ENS
• *Cours spécifique cursus Info/Maths :* Initiation à la cryptologie (12 ECTS) (48h cours + 24hTD)	D. Pointcheval ENS B. Minaud INRIA P. Nguyen INRIA
• *Cours spécifique cursus Maths/Physique :* Grande dimension (12 ECTS) (42h de cours + 28h de TD)	G. Biroli ENS & D. Chafaï PSL L. Rey ENS
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :* Modélisation des systèmes biologiques (6 ECTS)	A. Véber CNRS PC R. Ferrière ENS D. Thieffry ENS

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s’agit d’une initiation à un thème de recherche actuel. Il s’effectue en binôme sous la direction d’un·e encadrant·e appartenant le plus souvent au département de mathématiques et applications de l’ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s’agit en général de la présentation d’un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.

Le travail consiste en la rédaction d’un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d’un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d’exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;
- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiant·e·s réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.

Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Exemples de cours scientifiques non mathématiques

- Physique - http://www.phys.ens.fr/
  - Introduction à la mécanique quantique
  - Physique statistique des systèmes en équilibre
  - Relativité et électromagnétisme
  - Hydrodynamique

- Physique du solide

- Informatique - http://diplome.di.ens.fr/
  - Langages formels, calculabilité et complexité
  - Algorithmique
  - Langages de programmation et compilation
  - Systèmes numériques
  - Système d'exploitation
  - Lambda calcul et logique informatique
  - Théorie de l'information et codage
  - Initiation à la cryptologie
  - Sémantique et application à la vérification de programmes
  - Bases de données

- Biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/
  - Biologie cellulaire
  - Biologie Moléculaire et Génétique
  - Introduction aux sciences du vivant
  - Introduction to Ecology
  - Neurosciences

- Etudes cognitives - http://cognition.ens.fr
  - Introduction to Cognitive Neuroscience
  - Computational Neuroscience

- Economie - http://www.economie.ens.psl.eu/
  - Economie pour scientifiques
  - Introduction aux théories de la croissance économique
  - Introduction à l'économétrie

▪ DEUXIÈME ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 : théorie de Galois (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	F. Charles PS C. Chivet ENS
• Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h :42h cours + 28h TD)	S. Rideau-Kikuchi CNRS/ENS P. Wang ENS
• Probas 2 : processus stochastiques (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Berger SU T. Lenoir ENS
• Analyse des équations aux dérivées partielles (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	I. Gallagher UP L.-P. Chaintron ENS
• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	G. Peyré CNRS/ENS S. Marcotte, M. Sander ENS
• Statistique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	E. Aamari CNRS/ENS O. Rameh ENS
• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	C. Houdayer UPS L. Benedetto ENS
• Ateliers Maths/Entreprise (6 ECTS)	B. Maury PS L.-P. Chaintron ENS

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	M. Fathi UPC S. Bronstein ENS
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	E. Giroux CNRS/ENS P. Laurain SU
• Modélisation mathématique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	B. Maury PS S. Perrin-Roussel ENS
• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	L. Livernet PC C. Emprin ENS

Cours avancés, deuxième semestre

• Cours avancé : Les arbres en probabilité : la clé de formules explicites N. Enriquez UPS
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Modèles non linéaires pour la physique quantique D. Gontier PSL
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Superrigidité C. Houdayer UPS
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Systèmes à diffusion croisée A. Moussa SU
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 7 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Groupes de travail, premier semestre

- De Newton à Boltzmann : sphères dures et potentiels à courte portée F. Fougères ENS
- Entropie : entre physique statistique, probabilités et EDPs L.-P. Chaintron ENS
- Flot de raccourcissement des courbes E. Di Nezza SU
- Géométrie spectrale et ergodicité quantique L. Benedetto ENS
- Le 5ème problème de Hilbert C. Houdayer UPS
- Limites locales de cartes planaires et empilement de cercles A. Metz-Donnadieu ENS
- Matrices Aléatoires M. Malvy ENS
- Théorie spectrale pour la mécanique quantique S. Perrin-Roussel ENS
- Transport Optimal D. Gontier PSL

Cours non mathématiques

Exemples de cours scientifiques non mathématiques disponibles dans la partie présentation des cours de la première année.

- TROISIÈME ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

L'auto-organisation de groupes de travail est vivement recommandée. Elle peut être encadrée, si besoin, par un·e enseignant·e du DMA.

Deuxième semestre :

Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS (9 ECTS, 24h cours). Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription pour les conditions pédagogiques.

- Dynamique des équations des ondes semi-linéaires — T. Duyckaerts USPN
- Fonctions harmoniques et bords de marches aléatoires — A. Erschler CNRS/ENS
- Opérateurs aléatoires — L. Dumaz CNRS/ENS
- Systèmes de particules en interaction — C. Toninelli CNRS/PSL

ENSEIGNEMENTS HORS DEPARTEMENT

Le DMA offre également un ensemble de cours de mathématiques dans d'autres départements de l'ENS.

- Mathématiques pour littéraires — F. Fougères ENS
- Statistique pour économistes — M. Malvy ENS
- Mathématiques pour économistes — O. Rameh ENS
- Probabilités discrètes pour physicien·ne·s — C. Toninelli CNRS/PSL

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2023-2024

| *Algèbre 1* **(L3)** |

(Gaëtan Chenevier et Nataniel Marquis)

Ce cours d'algèbre est une introduction à la théorie des groupes et des modules.

Programme provisoire :

I. Ensembles quotients
- Partitions, fibres et relations d'équivalences, passage au quotient
- Sections, axiome du choix et représentants
- Lemme de Zorn

II. Généralités sur les groupes
- Exemples de groupes
- Morphismes et isomorphismes
- Groupes cycliques
- Théorème de Lagrange
- Groupe multiplicatif d'un corps et (Z/nZ)^*
- Groupes quotients

- Compléments : Groupes usuels, quaternions de Hamilton

III. Groupes abéliens de type fini
- Caractères et y^2=x^3+1 sur Z/pZ
- Décomposition de Fourier finie
- Structure des groupes abéliens finis
- Réseaux et groupes de type finis
- Complément : Courbes elliptiques

IV. Le groupe symétrique et son dévissage
- Actions de groupes
- Groupes symétriques et alternés, les cas $n \leq 5$
- Le langage des suites exactes
- Le dévissage de S_n
- Produits semi-directs
- Compléments : Groupe de Galois d'un polynôme, petits groupes, le théorème de Jordan-Hölder

V. Groupes et symétries
- Sous-groupes finis de O(2) et SO(3)
- Quaternions et géométrie euclidienne en dimensions 3 et 4
- Groupes linéaires et simplicité de PSL_n(k)
- Le groupe PGL_2(k) et quelques (iso)morphismes miraculeux
- Compléments : Polytopes réguliers, le groupe affine et un théorème de Galois, frises et papiers peints

VI. Éléments de structure des groupes finis
- p-groupes
- Théorèmes de Sylow
- Théorème de Schur-Zassenhaus, théorème de Hall
- Extensions et cohomologie
- Compléments : Groupes nilpotents finis

VII. Arithmétique des anneaux
- Anneaux Z[√d]

- Anneaux factoriels, idéaux et anneaux principaux
- L'anneau Z[i] et sommes de deux carrés
- Une équation diophantienne
- Complément : Anneaux quotients

VIII. Modules sur les anneaux principaux
- Modules sur un anneau
- Équivalence des matrices sur un anneau principal
- Modules de type fini sur un anneau principal

IX. Représentations linéaires des groupes finis
- Représentations et modules sur l'algèbre du groupe
- Décomposition en irréductibles
- Théorie des caractères, exemples de tables de caractères
- Retour sur le déterminant d'un groupe
- Propriétés d'intégralité des caractères
- Compléments : Des théorèmes de Burnside et P. Hall, décomposition de L^2(G)

■ ■ ■ ■ ■

| *Algèbre 2* **(M1)** |

(François Charles et Clément Chivet)

L'objet de ce cours, qui fait suite au cours d'algèbre 1, et de donner les bases de la théorie des anneaux et des corps : il s'agit des débuts de l'algèbre commutative. Les thèmes abordés seront les suivants :

- Notions de base sur les anneaux (commutatifs) : idéaux, spectre, localisation, modules. Anneaux noethériens, anneaux principaux, anneaux de Dedekind.
- Exemples d'anneaux : anneaux d'entiers de corps de nombres, anneaux de polynômes.
- Modules de type fini sur un anneau principal, applications.
- Extensions de corps et correspondance de Galois, exemples et applications.
- Quelques résultats sur les algèbres de type fini sur un corps : Nullstellensatz, lemme de normalisation de Noether, ...

Si le temps le permet, on conclura le cours par l'étude des actions de groupes sur les anneaux de polynômes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse complexe* **(L3/M1)** |

(Ariane Mézard et Alexis Metz-Donnadieu)

L'analyse complexe étudie les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globalement. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globalement, leur étude nécessite la mise en œuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Nous concluons par quelques exemples d'applications à des domaines variés.

La théorie de Cauchy donne les premières propriétés des fonctions analytiques complexes et révèle l'importance de la topologie des ensembles de définition de ces fonctions. Après avoir démontré l'analycité des fonctions holomorphes, nous donnons les premières propriétés (Théorème de l'application ouverte, Lemme de Schwarz) et les grands théorèmes (Théorème de Runge, Théorème de Weierstrass, Théorème de Riemann, Théorème de Picard...). L'étude des singularités conduit à la notion de fonctions méromorphes avec de nombreuses applications au calcul d'intégrales via la théorie des résidus et aux problèmes d'approximation (méthode du col). Nous concluons par plusieurs incursions en théorie des nombres : études des fonctions elliptiques et modulaires et des séries de Dirichlet.

▪▪▪▪▪

| *Analyse fonctionnelle* **(M1)** |
(Max Fathi et Samuel Bronstein)

Dans ce cours, on étudiera les bases de l'analyse fonctionnelle abstraite et les principaux espaces de fonctions utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Le cours commencera par l'analyse abstraite des espaces vectoriels topologiques (localement convexes) et de leurs topologies classiques, avec une attention particulière pour les topologies faibles sur les espaces de Banach. Nous verrons les théorèmes classiques d'analyse linéaire (Hahn-Banach, Banach-Alaoglu...), quelques sous-cadres classiques (espaces réflexifs, espaces uniformément convexes), ainsi que la topologie des espaces de mesures et des applications en probabilités.

Nous aborderons ensuite la théorie des distributions, ainsi que la transformée de Fourier, qui sera illustrée par des applications aux EDP et en traitement du signal.

Enfin, nous aborderons les espaces de Sobolev, leurs propriétés (injections de Sobolev notamment), et leur utilisation pour l'étude d'EDP elliptiques.

Si le temps le permet, on consacrera les dernières heures de cours à la dualité convexe.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse des Equations à Dérivées Partielles* **(M1)** |
(Isabelle Gallagher et Louis-Pierre Chaintron)

Le but du cours est de présenter quelques méthodes classiques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Après une introduction aux outils (analyse fonctionnelle et harmonique) nécessaires à leur étude, nous présenterons quelques EDP linéaires importantes (transport, ondes, chaleur, Schrödinger) et les analyserons en variant les approches (méthode des caractéristiques, solutions faibles, solutions fortes). Nous nous orienterons ensuite vers l'étude d'EDP non linéaires, en nous appuyant principalement sur les équations de la mécanique des fluides (Euler et de Navier-Stokes).

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Atelier Maths-Entreprise* **(L3/M1) |**

(Bertrand Maury et Louis-Pierre Chaintron)

Le point de départ cet atelier est le suivant : une première séance est consacrée à la présentation par un industriel d'une problématique à laquelle il est confronté. Cette problématique ne se présente pas nécessairement sous la forme d'un problème mathématisé, mais on peut espérer qu'une formalisation mathématique permette d'apporter des éléments de réponses, par utilisation d'outils existants, ou introduction d'outils conceptuels nouveaux, avec éventuellement utilisation de la simulation numérique pour approfondir l'exploration. Le groupe de participants disposera alors de quelques semaines, en toute autonomie, pour apporter des éléments de réponse à ce problème, qui seront présentés lors d'une séance de clôture à l'intervenant industriel, et feront l'objet d'un rapport de synthèse des pistes explorées.

Les années précédentes, des sujets ont par exemple été proposés par :

- Aqemia, une start-up en pharma-tech qui souhaitait des pistes pour son modèle commercial
- Greenweez, grand supermarché bio en ligne qui cherche à optimiser l'emballage de ses paquets ;
- Google, sur des problèmes d'erreurs générées par des serveurs ;
- Criteo, à propos de systèmes d'enchères pour la publicité en ligne ;
- Vallée Sud, établissement public territorial du sud de Paris, pour optimiser les collectes de déchets.

Cet « exercice » a vocation à familiariser les élèves avec la démarche de modélisation ex nihilo, qui consiste à formaliser un problème concret donné sous forme brute, et à explorer diverses pistes d'études en confrontant systématiquement les résultats théoriques et/ou numériques à la réalité. Ce module d'ouverture s'adresse potentiellement à tous les élèves, y compris à ceux qui n'envisagent aucunement de se diriger vers le monde de l'entreprise, et / ou qui pourraient avoir du mal à concevoir que leur bagage puisse leur permettre d'apporter des éléments de réponse à une problématique industrielle.

▪▪▪▪▪

| *Cours avancé : Les arbres en probabilité - la clé des formules explicites* **(M1)** |
(Nathanaël Enriquez)

Le cours a pour but de montrer qu'à la source de nombreux calculs explicites surprenants portant sur des problèmes complexes en probabilités, se cachent des arbres... Ce sera l'occasion de découvrir une variété de thèmes classiques des probabilités.

Un certain nombre de raisonnements seront nécessairement présentés au niveau heuristique, mais ces heuristiques devraient permettre aux élèves de généraliser de façon autonome les calculs menés, à d'autres situations.

Une partie des exposés oraux faits en seconde partie de semestre par les élèves consisteront en l'explication de certaines preuves laissées de côté dans la première partie du semestre.

Nous explorerons les problèmes suivants :
1 - Graphe d'Erdos-Rényi : transition de phase, taille de la composante géante (Arbres de Galton-Watson)
2 - Marche aléatoire en milieu aléatoire en dimension 1 : calcul de la vitesse de fuite (codage d'une excursion par un arbre)
3 - Grandes matrices aléatoires réelles symétrique : la loi du demi-cercle de Wigner (arbres binaires et nombre de Catalan)
4 - Appariements optimaux : asymptotique en zeta(2) du problème classique (le PWIT (Poisson Weighted Infinite Tree) et la méthode objective d'Aldous au parfum d'« apprentissage »)

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Cours avancé : Modèles non linéaires pour la physique quantique* **(M1)** |
(David Gontier)

Dans ce cours, nous nous intéressons à la dérivation et à l'étude de modèles non linéaires qui apparaissent en mécanique quantique.

Dans la première partie du cours, nous montrerons comment, à partir de l'équation linéaire de Schrödinger, on trouve des modèles non linéaires dans certains régimes ou après certaines approximations. Nous introduirons en particulier les modèles de Hartree-Fock et de Thomas-Fermi.

L'étude de ces modèles non linéaires nous permettra dans un second temps d'obtenir des informations sur l'équation de Schrödinger. Nous retrouverons certains phénomènes plus ou moins connus de la mécanique quantique. Nous démontrerons en particulier la « stabilité de la matière », et décrirons à quoi ressemble un « atome lourd ».

Bibliographie :

- Elliott H. Lieb et Michael Loss, « Analysis »
- Elliott H. Lieb et Robert Seiringer, « Stability of Matter »

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Cours avancé : Superrigidité* **(M1)** |
(Cyril Houdayer)

Le but de ce cours avancé de M1 est d'étudier les grandes lignes de la démonstration du théorème de superrigidité de Margulis (1975) pour les réseaux de rang supérieur. Ce théorème a eu un impact retentissant sur la théorie des réseaux des groupes de Lie. C'est notamment un des ingrédients principaux de la preuve du théorème d'arithméticité de Margulis. Le théorème de superrigidité a été généralisé par Zimmer (1980) au cas des cocycles et a donné naissance au programme de Zimmer qui a connu des avancées spectaculaires ces dernières années.

La preuve du théorème de superrigidité combine de manière remarquable l'analyse fonctionnelle, la théorie ergodique et la théorie des groupes algébriques. Dans ce cours, je présenterai une nouvelle approche au théorème de superrigidité due à Bader-Furman (2018) qui s'appuie sur la notion de représentation algébrique d'action ergodique.

Parmi les thèmes qui seront abordés en cours, il y aura :
- Groupes localement compact et leurs réseaux.
- Théorie ergodique des groupes.
- Moyennabilité des groupes et des actions de groupes.
- Introduction aux groupes algébriques linéaires : Variétés algébriques ; Groupes algébriques ; Orbites et stabilisateurs des actions algébriques.
- Représentations algébriques des actions ergodiques.

Des notes de cours en anglais seront disponibles sur la page web de l'enseignant.

Bibliographie :

- U. Bader, A. Furman : An extension of Margulis's superrigidity theorem. Dynamics, geometry, number theory--the impact of Margulis on modern mathematics, 47--65, Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 2022.
- G.A. Margulis : Discrete subgroups of semisimple Lie groups. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 17. Springer-Verlag, Berlin, 1991. x+388 pp.
- R.J. Zimmer : Ergodic theory and semisimple groups. Monographs in Mathematics, 81. Birkhauser Verlag, Basel, 1984. x+209 pp.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Cours avancé : Systèmes à diffusion croisée* **(M1)** |
(Ayman Moussa)

L'objet de ce cours est d'étudier une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) utilisés en dynamique des populations pour décrire l'occupation d'un espace par différentes espèces animales. De manière assez classique, les populations y sont décrites par l'intermédiaire de deux mécanismes fondamentaux : la dispersion des individus (modélisée par un opérateur de diffusion) et leurs reproduction ou décès (modélisés par un terme de réaction). La spécificité des systèmes sur lesquels nous nous concentrerons tient dans l'expression " diffusion croisée " : pour de tels systèmes la diffusivité (ou mobilité) d'une espèce dépend – potentiellement de manière non linéaire – de la présence de ses concurrents.

La première publication proposant un tel système date de 1979, dans le Journal of Theoretical Biology. Les auteurs, Shigesada, Kawasaki et Teramoto, ont proposé ce type de systèmes (dorénavant appelés " SKT ") pour capturer le phénomène de ségrégation des espèces, c'est-à-dire une répartition quasiment disjointe de l'espace entre les différents constituants de la population. Il est fréquent, en mathématiques appliquées, qu'un outil de modélisation efficace conduise à des questions mathématiques intéressantes et étonnamment difficiles ; nous verrons dans ce cours que les systèmes à diffusion croisée sont une belle illustration de ce fait.

Après une rapide introduction qui dévoilera (formellement) le lien entre la diffusion croisée et la ségrégation, le cours se concentrera d'abord sur l'équation dite de Kolmogorov, une EDP parabolique dont l'opérateur de diffusion est adapté au comportement d'individus sensibles (par opposition à la loi de Fick, pour la diffusion de matière inerte). Cette équation étant la brique de base des systèmes à diffusion croisée que nous étudierons, il s'agira de la comprendre dans un cadre de régularité très faible. Nous aborderons ensuite à proprement parler l'étude de systèmes à diffusion croisée. Comme c'est souvent le cas pour les EDP non linéaires, nous verrons que la question même de l'existence de solutions n'est pas une trivialité. Nous fournirons un schéma de construction de solutions faibles globales par approximation-compacité, reposant sur la dissipation au cours du temps d'une fonctionnelle, appelée l'entropie du système. Suivront l'existence de solutions plus régulières (mais locales), certaines propriétés d'unicité fort-faible et éventuellement des résultats plus difficiles : la réalisation du système SKT comme limite asymptotique d'équations plus élémentaires ou l'analyse rigoureuse de certains états d'équilibres offrant une ségrégation des espèces.

En plus d'explorer des systèmes à diffusion croisée, ce cours illustrera notamment certaines méthodes standards dans l'étude d'équations paraboliques (principe du maximum, lemme d'Aubin-Lions, approximation-compacité, point fixe en dimension infinie, analyse asymptotique) que nous présenterons dans le cadre spécifique qui nous intéresse tout en soulignant la portée plus large de ces outils.

Contenu :

- Introduction et motivation
- Équation de Kolmogorov avec diffusivité peu régulière
- Structure entropique des systèmes à diffusion croisée
- Théorie d'existence pour la diffusion croisée
- Unicité fort-faible ou dérivation rigoureuse

Prérequis : Analyse fonctionnelle ; convergences faibles ; distributions ; espaces de Sobolev.

Bibliographie :

- Shigesada, Kawasaki, Teramoto. Spatial segregation of interacting species. *Journal of Theoretical Biology.*
- Chen, Jüngel. Analysis of a parabolic cross-diffusion population model without self-diffusion. *Journal of Differential Equations.*
- Le Bris, Lions. Existence and uniqueness of solutions to Fokker–Planck type equations with irregular coefficients. *Communications in Partial Differential Equations.*
- Moussa. From non-local to classical SKT systems: triangular case with bounded coefficients. *SIAM Journal of Mathematical Analysis.*
- Roques. Reaction-diffusion models for spatial ecology. *QUAE.*

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours de mathématiques pour les littéraires* **(PT)** |
(Florent Fougères)

Ce cours est un véritable cours de mathématiques, adapté à des élèves partant sans bagage mathématique spécifique. Il est destiné à chaque élève littéraire souhaitant expérimenter concrètement ce que sont les mathématiques, dans leur logique propre et leur cadre formel particulier, et comment s'y confronter pour qu'elles deviennent un outil naturel. Il est donc idéal pour les personnes qui veulent découvrir un nouveau point de vue complémentaire sur le monde ! On essaiera ainsi de dégager des notions mathématiques pouvant apporter un éclairage différent sur la vie du quotidien, le fonctionnement de l'univers ou les prédictions scientifiques, en établissant des liens avec d'autres disciplines et points de vue.

La présentation des notions sera donc adaptée au public convié, sans vulgarisation néanmoins : peu de notions seront abordées mais elles seront pleinement traitées. Les séances alterneront entre cours et exercices, comme cela se fait généralement en mathématiques, la pratique personnelle et l'habitude permettant une bonne assimilation des notions et une aisance à la fois essentielle et profondément satisfaisante !

Le cours aura lieu au second semestre, les mercredis de 17h à 19h en salle Bourbaki (Bâtiment Rataud, Étage -2).

Les thèmes traités seront les suivants :

- Logique mathématique : Dans un premier temps, on commencera par donner un cadre logique formel à nos raisonnements, qui servira de langage de base pour le dialogue mathématique. On exposera alors de premières applications à ce formalisme à travers l'étude des ensembles infinis, qui nous consuira à la notion de fonction, véritable pierre angulaire des mathématiques.

- Suites et limites : Nous étudierons comment se résout naturellement le paradoxe de Zénon après introduction des bonnes notions mathématiques : les suites numériques et leurs limites. Autrement dit, nous verrons comment donner un sens à la convergence d’une succession de phénomènes vers une certaine limite et nous aborderons de nombreuses applications de ces théories à d’autres domaines des sciences.

- Étude de fonctions : Les fonctions et leur étude sont l'outil mathématique le plus utilisé dans toutes les sciences et pour toute entreprise de compréhension quantitative du monde. On donnera donc les instruments nécessaires pour mettre en équations ce qui nous entoure, et leur application fondamentale à la prédiction de phénomènes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours de statistique pour économistes* **(PT)** |
(Martin Malvy)

Nous nous appliquerons dans ce cours à construire et étudier rigoureusement l'univers probabiliste afin de formaliser dans un second temps les principaux outils des Statistiques. Le cours s'adresse aux étudiants dont le bagage mathématique est semblable à celui de la filière B/L, et leur permettra de suivre les enseignements nécessitant des prérequis dans ces domaines. Nous nous intéresserons notamment à la définition de l'univers probabiliste au travers de la théorie de la mesure, aux variables aléatoires et à leur loi, aux grands résultats de convergence (Loi des Grands Nombres, Théorème Central Limite), aux concepts fondamentaux de Statistique (estimateurs, intervalles de confiance, méthode des moments), aux tests d'hypothèse, vecteurs gaussiens, test du khi deux, information de Fisher…

■ ■ ■ ■ ■

| Cours spécifique à la filière Maths-Biologie : Groupe de lecture - Modélisation des systèmes biologiques **(L3)** |
(Denis Thieffry et Amandine Véber)

Le but de ce groupe de lecture est de discuter, à travers des présentations d'articles de recherche ou de chapitres de livres, des questions biologiques auxquelles la modélisation peut contribuer et différents outils mathématiques que l'on peut utiliser pour ce faire. Ce module est ouvert à la fois aux étudiants de mathématiques et aux étudiants de biologie de l'ENS afin de favoriser les discussions interdisciplinaires.

Chaque année, trois thèmes différents sont abordés, chacun sur quatre séances. Les exposés des étudiants sont encadrés par des chercheurs et chercheuses en mathématiques, modélisation ou biologie, spécialistes de ces domaines.

Exemples de thèmes abordés au cours des dernières années :

- Epidémiologie ;
- Neurosciences ;
- Détection de motifs sur l'ADN ;
- Evolution ;
- Déplacements d'individus à différentes échelles.

Pré-requis : Aucun. Avoir suivi le module « Introduction aux sciences du vivant » au premier semestre est bien sûr un plus pour la compréhension des questions biologiques, mais n'est pas indispensable.

Evaluation : Présentation de 2 exposés en groupe, participation active aux discussions, rédaction de 3 comptes-rendus courts synthétisant les concepts abordés lors de chacun des 3 thèmes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Initiation à la cryptologie* **(L3)** |
(David Pointcheval, Phuong Nguyen et Brice Minaud)

Ce cours s'adresse aux étudiants ayant un goût pour l'algorithmique, à la fois dans ses aspects mathématiques et dans ses aspects pratiques. Son but est d'enseigner la problématique de la cryptologie, et les principaux outils utilisés par la cryptologie pour proposer des solutions aux problèmes de sécurité. Il sert d'introduction et de préparation aux cours de cryptologie proposés au MPRI.

Ce cours commence par les notions de base de cryptographie symétrique (chiffrement par blocs et par flot, fonctions de hachage, et cryptanalyse) et asymétrique (RSA, Diffie-Hellman et ElGamal), puis présente de façon informelle plusieurs techniques plus avancées :

- Preuves zero-knowledge
- Cryptographie distribuée
- Cryptographie à base de couplages sur courbes elliptiques
- Cryptographie à base de réseaux euclidiens (cryptographie post-quantique)
- La Blockchain et bitcoin

Prérequis : Ce cours fera essentiellement appel aux notions de classes de complexité, de machine de Turing et de problèmes NP. Un minimum de connaissances en algèbre et en probabilité sera aussi requis. Enfin les outils algorithmiques de base devront être maîtrisés. Certains TDs conduiront à de la programmation en langage C ou Python.

Lien du cours : https://diplome.di.ens.fr/catalog_fr.html#INFO-L3-MPRI113-S2

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Grande dimension* **(L3)** |
(Djalil Chafaï et Giulio Biroli)

Ce cours est centré autour de phénomènes de grande dimension de nature probabiliste. Il s'agit au départ du comportement des vecteurs, matrices, et tenseurs aléatoires en grande dimension, à commencer par les théorèmes limites pour les variables indépendantes. Les notions théoriques et les méthodes introduites seront illustrées à l'aide d'exemples issus de la physique statistique, des sciences des données et de l'apprentissage automatique (machine learning).

Ce cours est donné à la fois par un physicien théoricien (Giulio Biroli) et par un mathématicien probabiliste (Djalil Chafaï). La dernière séance est donnée par Jean-Philippe Bouchaud, physicien théoricien et membre de l'Académie des sciences.

Prérequis : intégration et probabilités, physique statistique.

Plan du cours :

- Loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, Monte-Carlo
- Phénomène de concentration de la mesure
- Principe de grandes déviations de Cramér
- Principe de grandes déviations de Sanov
- Phénomène d'universalité des sommes et lois stables
- Phénomène d'universalité des extrêmes et lois max-stables
- Matrices aléatoires : théorème de Wigner
- Matrices aléatoires : théorème de Marchenko-Pastur
- Limite thermodynamique et transitions de phase
- Des équations déterministes de Newton à l'équation stochastique de Langevin
- Equilibration et thermalisation en physique statistique
- Transition BBP des matrices aléatoires : un exemple de transition de phase en science des données
- La malédiction de la grande dimension en apprentissage automatique (machine learning)
- La bénédiction de la grande dimension en apprentissage automatique
- Exposé de mise en perspective : Grandeur et misère des théorèmes en modélisation (pas de TD cette semaine)

■ ■ ■ ■ ■

| *Dynamique des équations des ondes semi-linéaires* **(M2)** |
(Thomas Duyckaerts)

Le but de ce cours est de présenter des développements récents sur la dynamique des équations des ondes non-linéaires. Dans la première partie du cours, je présenterai quelques propriétés classiques des équations des ondes linéaires (cf [3, Chapitre 5]) : représentation des solutions, vitesse finie de propagation, comportement asymptotique, dispersion et inégalités de Strichartz ([7], [5]), ainsi qu'un outil de concentration-compacité, la décomposition en profils [1].

La deuxième partie du cours concernera les équations d'ondes semi-linéaires proprement dites. Après une présentation des propriétés de base de ces équations (cf e.g. [5], [6]) : existence locale et unicité des solutions, lois de conservation, transformations), je donnerai plusieurs exemples de dynamiques : solutions asymptotiquement linéaires (scattering), comportement auto-similaire et ondes solitaires.

J'esquisserai enfin la preuve de la résolution en ondes solitaires pour l'équation des ondes critique [2], [4]. Les prérequis du cours sont les bases d'analyse réelle classique et d'analyse harmonique (transformation de Fourier). Ce cours s'inscrit dans la continuité des cours fondamentaux "Introduction aux équations aux dérivées partielles non-linéaires" et "Introduction aux équations aux dérivées partielles d'évolution", mais peut être suivi indépendamment de ces deux cours.

Horaires :
Mardi de 13h30 à 15h30; jeudi de 13h à15h.

Bibliographie :

[1] Bahouri, H., and Gérard, P. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. Amer. J. Math. 121, 1 (1999), 131–175.
[2] Duyckaerts, T., Kenig, C., and Merle, F. Classification of radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation. Camb. J. Math. 1, 1 (2013), 75–144.
[3] Folland, G. B. Introduction to partial differential equations., 2nd ed. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.
[4] Kenig, C. E. Lectures on the energy critical nonlinear wave equation, vol. 122 of CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2015.

[5] Sogge, C. D. Lectures on nonlinear wave equations. Monographs in Analysis, II. International Press, Boston, MA, 1995.
[6] Strauss, W. A. Nonlinear wave equations, vol. 73 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.
[7] Tao, T. Nonlinear dispersive equations, vol. 106 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2006. Local and global analysis.

▪▪▪▪▪

| *Géométrie différentielle* (M1) |

(Emmanuel Giroux et Eleonora Di Nezza)

Variétés différentielles : Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes

Formes différentielles

Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle

Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces

Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie :

- J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
- J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013. Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
- J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
- M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

■ ■ ■ ■ ■

| *Fonctions harmoniques et bords de marches aléatoires* **(M2)** |
(Anna Erschler)

Diverses familles de fonctions harmoniques reflètent la géométrie asymptotique des graphes. Il existe différents concepts de bord d'espaces métriques infinis et des graphes, en particulier pour des graphes de Cayley de groupes. Le bord de Martin est un espace topologique qui fournit la description des fonctions harmoniques positives. Par le théorème de convergence des martingales, de telles fonctions convergent le long de trajectoires infinies unilatérales de la marche aléatoire sur un graphe. Si nous supposons que les fonctions sont bornées, elles peuvent être récupérées à partir de ces valeurs limites, ce qui conduit à l'une des définitions du bord de Poisson. Il s'agit d'un espace de probabilité, qui est essentiel pour comprendre le comportement asymptotique des marches aléatoires sur les graphes et les groupes.

D'autres classes de fonctions étudiées récemment incluent les fonctions harmoniques Lipshitziennes, qui apparaît dans la preuve de Kleiner du théorème de croissance polynomiale. Dans ce cours, nous étudions les fonctions harmoniques et différentes notions de bords pour les marches aléatoires sur les graphes, en nous concentrant sur le cas où les graphes sont transitifs et les opérateurs sont homogènes. Cette dernière classe comprend les marches aléatoires sur des groupes.

Nous étudierons des résultats fondamentaux du à Doob, Furstenberg, Azencott, Cartier, Margulis, Guivarch, Kaimanovich, Vershik et Derriennic, et à la fin du cours nous prévoyons de discuter quelques résultats très récents dans ce domaine.

Aucun prérequis spécifique en probabilité n'est requis.

Horaires :

Lundi de 13h30 à 15h30; mercredi de 15h15 à 17h15.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : La méthode probabiliste* **(L3)** |

(Nathanaël Enriquez)

La "méthode probabiliste", telle qu'elle est entendue dans ce livre, peut être décrite grossièrement comme suit : afin de prouver l'existence d'une structure combinatoire possédant certaines propriétés déterministes, on construit un espace de probabilité approprié puis l'on montre qu'un élément choisi au hasard dans cet espace possède les propriétés souhaitées avec une probabilité positive. Cette méthode a été développée de façon extensive par Paul Erdös, qui a tellement contribué à son développement sur une période de 50 ans qu'il est légitime de l'appeler "la méthode d'Erdös". Sa contribution consiste non seulement en de nombreux et profonds résultats dans ce domaine, mais aussi en de nombreuses conjectures qu'il a énoncées et qui ont stimulé une grande partie de la recherche dans ce domaine.

La lecture de ce livre sera un voyage dans l'étude des graphes aléatoires et déterministes, mais également avec des petites incursions en théorie analytique des nombres, tout cela sur fond d'inégalités (plus ou moins) élémentaires de la théorie des probabilités.

Référence :

N. Alon et J. Spencer, « The probabilistic method ».

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Lois de conservation scalaires : de l'analyse théorique à la modélisation des fluides* (L3) |
(Corentin Gentil)

Les lois de conservation scalaires correspondent à une classe d'équations qui modélisent la conservation locale d'une grandeur physique dans l'espace, qui sont pour la plupart des équations d'évolution non-linéaires que l'on obtient grâce à des bilans de masse sur des parcelles d'espace.

L'objectif de ce groupe de lecture sera dans un premier temps de construire différents types de solutions théoriques à ces équations dans des cas simplifiés (problème de Riemann), chaque type de solution correspondant à un contexte physique bien précis. Dans un second temps, nous vérifierons leur pertinence dans des modèles physiques.

Une grande partie de ce qui sera étudié dans ce groupe de lecture se base sur la section 3 du livre « Partial Differential Equations » de Lawrence C. Evans.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Sous-groupes arithmétiques de groupes de Lie* **(L3)** |
(Samuel Bronstein)

Les réseaux de groupes de Lie sont des objets apparaissant en géométrie lors de la considération de structures homogènes sur des variétés compactes. Il s'avère que pour de nombreux groupes de Lie, la compréhension des réseaux arithmétiques permet de décrire les réseaux des groupes de Lie semi-simples. L'objectif sera d'énoncer est de comprendre les outils principaux des preuves des théorèmes de Mostow et de rigidité de Margulis, qui énoncent que de nombreuses familles de réseaux sont classifiés par leurs propriétés algébriques. En particulier, cela nous énoncera que dans de nombreux cas, tous les réseaux irréductibles sont arithmétiques.

Référence :

Dave Witte Morris, « Introdution to Arithmetic Groups ».

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de lecture : Spectre de graphes aléatoires* **(L3)** |
(Laure Dumaz)

L'objet de ce groupe de lecture est d'introduire les graphes aléatoires et l'étude de leur spectre. Ce domaine de recherche est relié à plusieurs branches des probabilités, comme les matrices aléatoires, les arbres aléatoires, la percolation sur Z^d ou les opérateurs de Schrödinger aléatoires.

Nous définirons la notion de spectre et de mesure spectrale pour des graphes tout d'abord finis puis plus généralement localement finis. Nous examinerons de nombreux exemples célèbres. Une question fondamentale dans ce domaine concerne les propriétés de ces mesures spectrales, et en particulier s'il existe une partie continue pour ces mesures. Nous verrons quelques outils techniques qui permettent de montrer cette existence.

Ce groupe de lecture permettra également d'appliquer au cas des graphes aléatoires plusieurs notions abordées lors des cours de première année : topologie sur les graphes, convergence de mesures, graphes de Cayley pour les groupes, théorie spectrale...

Nous suivrons principalement les notes de cours très claires de Charles Bordenave (référence ci-dessous). Nous compléterons éventuellement cette lecture avec quelques articles de recherche sur le sujet.

Référence principale :

Spectrum of random graphs, Charles Bordenave, Advanced topics in random matrices, 91–150, Panor. Synthèses, 53, Soc. Math. France, Paris, 2017

Disponible sur http://www.i2m.univ-amu.fr/perso/charles.bordenave/_media/courssrg.pdf

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : De Newton à Boltzmann - sphères dures et potentiels à courte portée* **(M1)** |

(Florent Fougères)

L'équation de Boltzmann, introduite en 1872 par le physicien qui lui a donné son nom, modélise le comportement de gaz très peu denses. Les solutions de cette équation tendent de façon irréversible vers un état d'équilibre bien défini. En revanche, l'état microscopique du gaz, duquel est dérivé le modèle de Boltzmann, est donné par les équations classiques de Newton dont les solutions sont tout à fait réversibles en temps, de sorte que les contemporains de Boltzmann ont longtemps douté de la validité de ce modèle.

Tout l'enjeu de l'article proposé dans ce groupe de travail consiste à démontrer rigoureusement le théorème de Lanford, qui explicite précisément en quel sens la dérivation de l'équation de Boltzmann depuis l'échelle microscopique est justifiée. La preuve de ce théorème est l'occasion de mettre en œuvre quelques arguments géométriques et probabilistes pour l'étude microscopique de l'interaction des particules, avant d'utiliser l'analyse des équations aux dérivées partielles afin de trouver les convergences adaptées, partie pendant laquelle on pourra essayer de comprendre pourquoi le théorème n'est toujours montré que pour des temps d'évolution très courts.

Bibliographie :

From Newton to Boltzmann: hard spheres and short-range potentials, I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier, 2013.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Entropie - entre physique statistique, probabilités et EDPs* **(M1)** |
(Louis Pierre Chaintron)

La notion d'entropie est omniprésente, en physique statistique ou en théorie de l'information, en thermochimie, dans l'étude des équations de transport ou de diffusion, dans la théorie probabiliste des grandes déviations... Introduite par Clausius au dix-neuvième siècle dans l'étude des machines thermiques, cette notion a pris un essor considérable avec les travaux fondateurs de Boltzmann en mécanique statistique, puis de Shannon en théorie du signal.

Ce GT proposera une démarche illustratrice, suivant les notes de cours de L.C. Evans (librement accessibles en ligne : https://math.berkeley.edu/~evans/entropy.and.PDE.pdf). Après une introduction présentant différentes axiomatisations rigoureuses de la thermodynamique, nous verrons comment l'entropie s'étend à la mécanique des milieux continus et facilite l'étude mathématique de certaines familles d'EDPs : les lois de conservation et les équations de Hamilton-Jacobi. Ce sera l'occasion d'introduire des résultats classiques de régularité parabolique, de solutions entropiques et de solutions de viscosité. Nous ferons ensuite un retour sur les définitions de l'entropie suivant Boltzmann et Gibbs en physique statistique, puis Shannon en théorie de l'information, ainsi qu'une présentation de l'équation de Boltzmann et du théorème H. Ces définitions seront illustrées par un résultat rigoureux de limite hydrodynamique pour une version simplifiée de l'équation de Boltzmann d'une part, et par quelques résultats classiques en théorie des grandes déviations d'autre part.

Dans le temps qu'il restera, nous nous tournerons vers une vision plus probabiliste de l'entropie autour du problème du pont de Schrödinger, en s'inspirant des notes de M. Nutz (https://www.math.columbia.edu/~mnutz/docs/EOT_lecture_notes.pdf).

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Flot de raccourcissement des courbes* **(M1)** |
(Eleonora Di Nezza)

Le « curve-shortening flow » est une équation de la chaleur pour les courbes, qui donne une bonne intuition pour d'autres flot géométriques plus généraux (de dimensions supérieures). Le nom « curve-shortening » vient du fait que la courbe se déforme de manière à réduire au maximum sa longueur.

Dans ce GT, nous allons introduire ce flot, étudier quelques exemples en détail et démontrer un résultat d'existence et d'unicité. Nous nous concentrerons ensuite sur la formule de monotonie de Huisken.

Ce GT se basera sur les notes de cours de Robert Haslhofer :
http://www.math.toronto.edu/roberth/pde2/curve_shortening_flow.pdf

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Géométrie spectrale et ergodicité quantique* **(M1)** |

(Lino Benedetto)

Introduite au début du XXème siècle, la mécanique quantique décrit les propriétés d'un système physique à partir du spectre et des fonctions propres d'opérateurs qui le décrivent.

Il est cependant naturel de se demander dans quel mesure la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique : ceci est observable dans l'approximation des hautes fréquences ou encore dans la limite où la constante de Planck tend vers zéro.

Historiquement les systèmes classiques complétement intégrables se sont le mieux prêtés à cette analyse, tandis que les systèmes chaotiques ont davantage résisté aux mathématiciens.

Ce groupe de travail propose ainsi une introduction à la géométrie spectrale, c'est-à-dire l'étude des liens entre géométrie d'un objet et spectre d'opérateurs, en se concentrant sur le chaos quantique. En particulier nous présenterons des outils de la géométrie symplectique, des systèmes dynamiques et de l'analyse semi-classique. L'objectif sera de démontrer le théorème de Schnirelman portant sur la délocalisation de la plupart des fonctions propres associées à un système hamiltonien ergodique.

Ce groupe de travail pourra servir d'introduction aux cours de Nalini Anantharaman au collège de France, traitant de nombreux problèmes ouverts autour de ces questions.

Référence :

- Maciej Zworski, « Semi-classical analysis »
- Steve Zelditch, « Eigenfunctions of the Laplacian on a riemannian manifold »

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Le 5ème problème de Hilbert* **(M1)** |
(Cyril Houdayer)

L'objectif du groupe de travail sera de comprendre et d'étudier la démonstration de la résolution du 5ème problème de Hilbert. Une formulation possible du 5ème problème de Hilbert, résolu par Montgomery-Zippin (1952) et Gleason (1952) est la suivante : Tout groupe topologique localement euclidien est isomorphe à un groupe de Lie. Nous verrons que ce résultat est une conséquence d'un théorème de structure général concernant les groupes localement compacts dû à Gleason (1951) et Yamabe (1953).

Les exposés s'appuieront sur l'ouvrage de Terence Tao « Hilbert's fifth problem and related topics ». Ce groupe de travail permettra d'aborder plusieurs thèmes en théorie des groupes, géométrie différentielle et analyse : groupes et des algèbres de Lie, groupes localement compacts, mesures de Haar, théorème de Peter-Weyl etc.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Limites locales de cartes planaires et empilement de cercles* **(M1)** |
(Alexis Metz-Donnadieu)

Les modèles de triangulations planaires infinis sont des modèles de graphes aléatoires infinis plongés dans le plan dont toutes les faces sont des triangles. Ils apparaissent comme limite en loi de certains modèles naturels de graphes aléatoires finis lorsque l'on munit l'ensemble des graphes localement finis d'une topologie adéquate (dite topologie de la convergence locale). Un théorème de He et Schramm montre qu'il existe une façon naturelle de plonger ces graphes soit sur la sphère de Riemann soit sur le plan hyperbolique en les voyant comme graphe d'intersection d'un empilement de cercles. Ces plongements sont uniques à réflexions et automorphismes conformes près.

De façon remarquable, certaines caractéristiques géométriques de ce plongement sont reliées à des informations probabilistes sur notre modèle aléatoire. Par exemple, on peut relier le nombre de points d'accumulations de l'empilement au caractère récurent/transient d'une marche aléatoire sur le graphe. Dans un premier temps l'objectif de ce GT va être de définir la topologie de la convergence locale et d'introduire rigoureusement certains modèles de cartes planaires aléatoires infinies. Nous nous pencherons dans un second temps sur le lien avec la théorie des empilements de cercles.

On se réfèrera en partie aux notes de lectures de Asaf Nachmias : « Planar Maps, Random Walks and Circle Packing » de l'école d'été de Saint-Flour 2018.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Matrices Aléatoires* **(M1)** |
(Martin Malvy)

Les premières matrices aléatoires apparaissent dans les années 30 dans les travaux de Wishart, un statisticien s'intéressant à des tableaux de corrélations de données aléatoires. Plus tard, et de manière indépendante, Wigner introduit des modèles de matrices dans l'optique de décrire les niveaux d'énergie de noyaux excités. Les matrices aléatoires se sont depuis largement diffusées, mentionnons la théorie des nombres, la mécanique statistique, les graphes aléatoires, et, plus généralement, la Physique, l'Informatique...

Dans ce groupe de travail, nous suivrons un ouvrage de référence du sujet : An Introduction to Random Matrices de Greg Anderson, Alice Guionnet et Ofer Zeitouni. Nous parlerons des grands résultats du domaine, en nous concentrant sur le comportement des valeurs propres. Il est à noter que les vecteurs propres sont aussi très largement étudiés et donnent lieu à des conjectures fameuses comme le phénomène de localisation d'Anderson.

Pour de larges classes de matrices aléatoires, dites de Wigner, le comportement macroscopique du spectre est bien compris. En grande dimension, les valeurs propres se répartissent asymptotiquement selon une mesure de probabilité à support compact appelée loi du demi-cercle. Le comportement microscopique nécessite une analyse fine et il est plus commode de la réaliser pour des modèles avec de fortes propriétés de symétrie (GOE, GUE). En effet, la loi jointe des valeurs propres est bien connue dans ce cas et cela facilite grandement la tâche. Il est attendu que ces résultats microscopiques soient universels ; c'est d'ailleurs une question qui occupe de nombreux probabilistes.

Finalement, étudier les matrices aléatoires est aussi l'occasion d'aborder des thématiques connexes, comme les phénomènes de concentrations et les grandes déviations, les polynômes orthogonaux et les transformées de Stietljes, les processus déterminantaux voire même (est-ce vraiment une bonne idée ?) les probabilités libres. Cela nous laisse un peu de choix pour combler les envies de chacun !

Référence :

An Introduction to Random Matrices, Greg Anderson, Alice Guionnet et Ofer Zeitouni, Cambridge University Press.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie spectrale pour la mécanique quantique* **(M1)** |
(Solal Perrin-Roussel)

La théorie spectrale a été développée à partir des années 1920 pour proposer un cadre mathématique rigoureux à la physique quantique émergente. Nous étudierons dans ce groupe de travail les outils mathématiques de la théorie spectrale en les illustrant dans le cadre de la mécanique quantique. Nous verrons le modèle quantique de l'atome d'hydrogène, avant de se concentrer sur la théorie des opérateurs auto-adjoints. Le but est d'établir un "théorème spectral" pour poser les bases du calcul fonctionnel, et d'étudier le spectre des opérateurs auto-adjoints.

Le groupe de travail s'appuiera sur le livre « Théorie spectrale et mécanique quantique » de Mathieu Lewin.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Transport Optimal* **(M1)** |

(David Gontier)

La première formulation d'un problème de transport optimal remonte au XVIIIe siècle par Gaspard Monge : de quelle façon déplacer des tas de sable pour construire des “remblais" de manière optimale ?

Aujourd'hui, la théorie du transport optimal a des applications nombreuses, aussi bien théoriques que pratiques, qui dépassent de loin le transport de tas de sable : économie, finance, traitement d'images, dynamique des fluides, etc.

Le but de ce groupe de travail est de comprendre les bases de cette théorie, ses liens avec les équations aux dérivées partielles, et sa résolution numérique.

Aucun pré-requis est nécessaire pour ce GT.

Références :

- Optimal Transport for Applied Mathematicians, de Filippo Santambrogi
- Topics in Optimal Transportation, de Cédric Villani

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Intégration et Probabilités* **(L3)** |

(Anne-Laure Dalibard et Benoît Laslier)

Le cours commencera par une étude des suites de jets de dés, qui sera l'occasion à la fois d'introduire quelques techniques probabilistes et de motiver les questionnements sur l'existence des mesures.

Ensuite, nous montrerons l'existence des mesures utiles (mesures produits, mesure de Lebesgue) et nous donnerons les grands théorèmes d'intégration.

Pour finir, nous reviendrons aux probabilités et montrerons la loi forte des grands nombres dans un cadre plus général, ainsi que le théorème de la limite centrale.

Références : Il existe de nombreux livres d'introduction à la théorie de la mesure et/ou aux probabilités. Le plus proche du cours est sans doute : Billingsley - Probability and Measure.

▪▪▪▪▪

| ***Logique*** **(M1) |**

(Silvain Rideau-Kikuchi et Paul Wang)

Née des questionnements du début du 20ème siècle sur les « fondements des mathématiques », la logique mathématique est encore relativement jeune à l'échelle des mathématiques. Et bien qu'elle fournisse en effet les outils d'analyse de ces fondements, elle a largement dépassé cette seule question, mise à mal par l'impossibilité de ce programme fondationnel, mise en avant par Gödel entre autres.

La logique s'intéresse aux liens entre les structures mathématiques en mettant l'accent sur les phénomènes de définissabilité (par des formules) : axiomatisation de certaines classes, définissabilité ou non de certains ensembles, interprétations de structures les unes dans les autres, complexité combinatoire et géométrique des ensembles définissables... Par sa nature transverse, la logique mathématique a trouvé des applications à de nombreux autres sujets mathématiques : de la combinatoire à la théorie des nombres en passant par la dynamique. Ses liens avec la théorie des ensembles sont une coïncidence historique ; mais comme elle permet d'en clarifier les indécidabilités, le semestre terminera sur un peu de combinatoire transfinie. Il doit pourtant être pris comme une invitation au point de vue modèle-théorique.

Programme provisoire :

- Logique élémentaire : dualité de Boole-Stone, sémantique du premier ordre, ultraproduits, complétude et compacité, espaces de types.
- Éléments de théorie des modèles : constructions de modèles, catégoricité, va et vient, élimination des quantificateurs.
- Phénomènes d'incomplétude : problèmes d'internalisation et théorèmes d'incomplétude.
- Théorie des ensembles : axiomatisation, ordinaux, cardinaux, modèles intérieurs classiques, axiome du choix, hypothèse du continu.

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques des données* **(M1)** |
(Gabriel Peyré, Sibylle Marcotte et Michael Sander)

Ce cours passe en revue les méthodes mathématiques et numériques fondamentales en sciences des données. La première partie du cours couvre les bases de la représentation et du traitement des données, en particulier la théorie de

Shannon, le filtrage et les ondelettes. La deuxième partie présente l'optimisation convexe et non-convexe, dans la perspective de son utilisation en apprentissage automatique et en particulier pour les réseaux de neurones. Le cours est validé par un petit projet et un examen.

Références :

- Pour la théorie : https://mathematical-tours.github.io/book/
- Pour le numérique et les TPs : www.numerical-tours.com

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques pour économistes* **(PT)**|
(Ons Rameh)

Le but de ce cours est de fournir aux étudiants les outils d'analyse nécessaires pour suivre des cours d'économie s'appuyant sur un formalisme mathématique. La première partie du cours visera à introduire les notions de topologie et d'algèbre linéaire nécessaires, tandis que la deuxième fournira les bases de calcul différentiel requises afin d'aborder l'optimisation sous contraintes et la convexité en dimension arbitraire.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Modélisation mathématique* **(M1)** |
(Bertrand Maury et Solal Perrin-Roussel)

Ce cours propose, en premier lieu, une introduction poussée aux cadres mathématiques permettant d'aborder ces questions d'environnement et de société. Nous avons choisi de privilégier trois axes :

- Optimisation
- Graphes et réseaux
- Systèmes dynamiques

En second lieu, ce cours se veut une initiation à la démarche de modélisation, qui permet d'élaborer, à partir de la considération d'une situation de la vie réelle, un cadre mathématique adapté, et une formalisation du problème sous forme d'équations, en lien avec un ou plusieurs des domaines des mathématiques évoqués ci-dessus.

Les domaines applicatifs visés sont (liste non exhaustive) : questions de mobilité / transport (mobilité urbaine, transport multimodal, mouvements de foules), développement urbain, cycle des énergies, qualité de l'air, propagation d'épidémies, réseaux sociaux (propagation d'opinion) …

▪▪▪▪▪

| *Opérateurs aléatoires* (M2) |

(Laure Dumaz)

Depuis les travaux du physicien Anderson dans les années 50, la localisation dans des systèmes désordonnés a été l'objet d'une importante littérature. D'un point de vue mathématique, la question est de savoir si l'opérateur auto-adjoint représentant l'hamiltonien du système est purement ponctuel.

Parallèlement, la théorie des matrices aléatoires s'est développée suite aux travaux de Wigner, qui a observé que les niveaux d'énergie d'atomes lourds est bien modélisée par les valeurs propres de grandes matrices aléatoires. Les études se concentrent dans ce cas sur la répartition statistique des valeurs propres de ces grandes matrices et en particulier la répulsion entre celles-ci.

L'objet de ce cours est l'étude d'opérateurs aléatoires provenant de ces deux théories. Ces opérateurs appartiennent à la classe des opérateurs de Sturm Liouville généralisés du premier ou deuxième ordre. Nous expliquerons quels opérateurs apparaissent dans ces modèles puis nous étudierons certaines de leurs propriétés spectrales notamment grâce à des outils de calcul stochastique.

Les notions importantes de la théorie des opérateurs auto-adjoints seront rappelées dans les premiers cours (elles ne sont donc pas un prérequis nécessaire à ce cours).

Horaires :
Mardi de 10h30 à 12h30; jeudi de 10h à 12h.

■ ■ ■ ■ ■

| *Probabilités discrètes pour physiciens* **(PT)** |
(Cristina Toninelli)

Abstract: This course will present the probabilistic model and the fundamental limit theorems for sums of independent real-valued random variables. The central object of the course is the heads or tails game or the symmetric random walk on the integers.

Résumé : Ce cours présentera le modèle probabiliste et les théorèmes limites fondamentaux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles. L'objet central du cours est le jeu de pile ou face ou la marche aléatoire symétrique sur les entiers.

■ ■ ■ ■ ■

| *Processus stochastiques* **(M1)** |

(Quentin Berger et Théo Lenoir)

Le cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques à temps et espace discrets, avec quelques excursions dans le cas continu :

1. Révisions sur le cadre probabiliste : convergence en loi, théorème(s) de la limite centrale, vecteurs gaussiens, lois infiniment divisibles.
2. Espérance conditionnelle : définition, propriétés.
3. Martingales à temps discret : exemples, temps d'arrêt, inégalités de Doob, convergence.
4. Chaînes de Markov : exemples, classification des états, mesures invariantes, théorèmes ergodiques.
5. Marches aléatoires et un aperçu du mouvement brownien.
6. Quelques exemples des modèles de la physique statistique.

Bibliographie :

- J.-F. Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, notes de cours (2006)
- P. Billingsley, Probability and Measure, third edition, Wiley and sons (1995)
- D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press (1991)

■ ■ ■ ■ ■

| *Statistique* **(M1)** |

(Eddie Aamari et Ons Rameh)

La statistique s'intéresse aux méthodes permettant d'ajuster un modèle probabiliste aux observations issues d'un phénomène aléatoire. Une fois ajusté, ce modèle peut être utilisé pour expliquer (sciences expérimentales), déterminer des causes (santé), évaluer des risques (assurance, environnement), ou prédire (décision). Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

Menu :

- Modèles et expériences statistiques
- Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
- Régression linéaire : estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussien
- Méthodes d'estimation : méthode des moments, modèles exponentiels, maximum de vraisemblance, tests du chi-deux
- Outils bayésiens : risque bayésien, estimateur bayésien, optimalité minimax
- Grande dimension et données massives : parcimonie, descente de gradient
- Introduction à la statistique non-paramétrique : test de Kolmogorov-Smirnov, estimation de densité

Bibliographie :

- Benoît Cadre & Céline Vial (2012). Statistique mathématique, cours et exercices corrigés
- Didier Dacunha-Castelle & Marie Duflo (1986). Probability and statistics Vol II
- Aad van der Vaart (1998). Asymptotic statistics

■ ■ ■ ■ ■

| *Systèmes de particules en interaction* **(M2)** |
(Cristina Toninelli)

Ce cours est une introduction aux systèmes de particules en interaction (IPS), un domaine des probabilités très fécond et qui a des applications dans nombreuses disciplines. Les IPS ont été introduits dans les années 1960 pour étudier des modèles issus de la physique statistique. La classe de modèles a été vite agrandi pour étudier de phénomènes divers issus de la physique, de la biologie ou de sciences sociales : la transition ferromagnétique/paramagnétique, la croissance des cristaux, la diffusion d'infections, la dynamique d'opinions, les dynamiques vitreuses, … D'un point de vue mathématique il s'agit de processus de Markov à temps continue avec espace d'état infini et discret, typiquement $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. L'enjeu principal est celui de déterminer le comportement de temps longue, notamment caractériser les mesures invariantes, leur bassin d'attraction et les échelles de temps typiques.

Après avoir construit le processus on analysera en détail deux modèles : le modèle d'Ising stochastique et le processus de contact. Cela nous permettra d'introduire plusieurs outils classiques tels que les techniques de couplage, la dualité, les arguments de contour, et les inégalités de Poincaré.

Horaires :

Lundi de 10h30 à 12h30; vendredi de 9h à 11h.

▪▪▪▪▪

| *Systèmes dynamiques* **(M1)** |

(Cyril Houdayer et Lino Benedetto)

Dans ce cours, nous allons donner une introduction aux systèmes dynamiques topologiques et mesurés en illustrant la théorie par des exemples provenant de la théorie des groupes, de la géométrie, de la dynamique symbolique et des espaces homogènes et en présentant quelques applications à d'autres domaines.

Le cours sera composé de trois parties :

- Dynamique topologique : Récurrence, transitivité, mélange, unique ergodicité, entropie topologique, applications à la théorie de Ramsey.
- Dynamique mesurée : Ergodicité, mélange faible, théorèmes ergodiques, entropie mesurée et principe variationnel, exposant de Lyapunov de marches aléatoires dans SL_d(R)
- Dynamique homogène : Réseaux des groupes localement compacts, exemple de SL_d(Z) < SL_d(R), propriété de Howe-Moore pour SL_d(R), théorème d'ergodicité de Moore.

Des notes de cours (en anglais) seront disponibles sur la page web de l'enseignant.

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie algébrique* **(M1)** |

(Muriel Livernet et Coline Emprin)

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique. On associera aux espaces topologiques des invariants algébriques (groupe fondamental, groupes d'homologie, anneau de cohomologie, groupes d'homotopie supérieurs), et on donnera des applications de l'étude et du calcul de ces invariants à des problèmes de topologie.

1. **Groupe fondamental**
   Revêtements
   Théorème de Van Kampen
   CW-complexes

2. **Homologie singulière**
   Théorème de Hurewicz
   Homologie cellulaire
   Cohomologie et cup-produit

3. **Groupes d'homotopie supérieurs**
   Fibrations
   Théorème de Freudenthal

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie et calcul différentiel* **(L3)** |
(Djalil Chafaï et Corentin Gentil)

1. Topologie générale et espaces métriques :
   Espaces métriques et espaces topologiques.
   Complétude, compacité, connexité.
   Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2. Espaces de Banach :
   Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
   Théorème de Hahn-Banach.
   Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3. Calcul différentiel :
   Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
   Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4. Équations différentielles ordinaires :
   Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
   Lemme de Gronwall et estimations