

LE PROCESSUS DE POISSON PONCTUEL HOMOGENÈME DANS LE PLAN ET SA MOSAÏQUE

NATHANAËL ENRIQUEZ

RÉSUMÉ : Ces notes commencent par présenter un objet crucial de la géométrie stochastique mais aussi de la théorie des probabilités en général : le Processus Ponctuel de Poisson. Il est présenté dans le cadre particulier d'un ensemble aléatoire homogène de points du plan. Nous explorons ensuite les propriétés statistiques du pavage du plan qu'il engendre. Le lecteur trouvera dans les notes de cours de Jan Møller un exposé complet de la théorie dans un contexte euclidien [8]. Nous évoquerons ensuite comment ces propriétés statistiques sont reliées à la courbure dans le cadre géométrique des surfaces.

1. PROCESSUS DE POISSON PONCTUEL DANS LE PLAN (PPPP)

Le premier objectif est d'introduire un réseau *ultime* de points du plan : un réseau qui possède le plus d'invariance possible!

On pense bien sûr tout de suite aux réseaux carré ou bien triangulaire, qui possèdent d'intéressantes invariances par certaines translations, symétrie ou rotation. Mais nous souhaiterions un réseau de points qui ait une invariance par *toutes* les isométries du plan, et pour cela il faut chercher parmi les réseaux *aléatoires* de points, l'invariance rêvée n'aura alors pas lieu presque sûrement pour chaque réalisation, mais aura lieu en loi et c'est par cette notion d'invariance en loi que nous commencerons.

Dans la vie courante, un tel ensemble aléatoire de points est un modèle idéal pour décrire un certain nombre de phénomènes naturels : les tâches de gouttes que chacun a pu observer sur un trottoir au début d'une pluie (avant que le sol soit tout mouillé!) en sont un exemple.

Une fois ce réseau de points défini, nous étudierons les propriétés statistiques de sa mosaïque de Voronoï, défini comme le pavage polygonal du plan où chaque polygone associé à un point du réseau est défini comme l'ensemble des points plus proches de ce point que de tous les autres. Nous montrerons qu'en moyenne les polygones de la mosaïque ont 6 côtés, et bien d'autres choses encore...

On tentera de proposer une présentation la plus cohérente possible sans se référer à la théorie de la mesure. On aura toutefois besoin de manière cruciale de pouvoir tirer une variable aléatoire sous la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1.1. Définition de l'invariance par isométrie. On cherche donc à construire un ensemble aléatoire de points du plan qui soit *localement fini* (i.e. toute partie bornée du plan ne contient presque sûrement qu'un nombre fini de points de l'ensemble) et dont la loi est invariante par isométrie du plan. Pour définir cette notion, nous aurons besoin de quelques notations. Soit \mathbf{E} un ensemble aléatoire de points du plan. On note pour tout polygone P du plan,

$$N_{\mathbf{E}}(P) := \text{card}(\mathbf{E} \cap P).$$

On prendra comme définition de la loi de \mathbf{E} , la donnée de la loi du vecteur $(N_{\mathbf{E}}(R_1), \dots, N_{\mathbf{E}}(R_k))$ pour toute collection de rectangles disjoints R_1, \dots, R_k .

Definition 1.1. *On dit que la loi d'un ensemble aléatoire \mathbf{E} est invariante par isométrie si et seulement si pour toute isométrie O du plan et toute collection de rectangles disjoints R_1, \dots, R_k , les vecteurs aléatoires $(N_{\mathbf{E}}(R_1), \dots, N_{\mathbf{E}}(R_k))$ et $(N_{\mathbf{E}}(O(R_1)), \dots, N_{\mathbf{E}}(O(R_k)))$ ont même loi.*

Réfléchissons à une manière naturelle de construire un ensemble de points aléatoire. Nous voyons que la définition impose une homogénéité en espace, notamment tout carré unité devra contenir en moyenne le même nombre de points. Si nous pensons aux points du réseau \mathbb{Z}^2 , nous pourrions être tentés de tirer indépendamment et uniformément au sort à l'intérieur de chaque carré unité de \mathbb{Z}^2 un unique point et considérer la réunion de ces points.

Mais cette idée ne fonctionne pas! En effet, même si l'on peut vérifier que pour un tel un ensemble la moyenne du nombre de points contenu dans n'importe quel carré unité (pas forcément un carré unité de \mathbb{Z}^2) est égal à 1 (petit exercice utilisant la linéarité de l'espérance), la loi de ce nombre de points dépend du carré unité que l'on a choisi!

En effet, un carré unité de \mathbb{Z}^2 contiendra p.s. exactement un point, tandis qu'un carré unité qui serait à cheval de 4 carrés unités de \mathbb{Z}^2 peut avec probabilité positive contenir 0, 1, 2, 3 ou bien 4 points! La loi d'un tel ensemble aléatoire de points n'est donc pas invariante par isométrie!

Comment faire? C'est là que va agir la magie de la loi de Poisson que nous allons présenter ainsi que ses propriétés cruciales.

1.2. La loi de Poisson et ses relations avec la loi multinomiale. Rappelons d'abord les définitions de ces deux lois discrètes.

Soit $\lambda > 0$, on dit que X suit une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ lorsque

$$\forall n \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Soit r un entier positif, $p_1 \dots p_r$ des réels positifs tels que $p_1 + \dots + p_r = 1$. On dit que Z suit une loi multinomiale de paramètres (n, p_1, \dots, p_r) lorsque

$$\text{Pour tout } k_1, \dots, k_r \geq 0, \text{ tel que } k_1 + \dots + k_r = n, \quad \mathbb{P}(Z = (k_1, \dots, k_r)) = \binom{n}{k_1, \dots, k_r} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}.$$

Cette loi correspond à la distribution de n boules disposées dans r urnes où chaque boule a probabilité p_i de tomber dans l'urne numéro i , indépendamment des autres.

Énonçons les propriétés qui nous seront utiles dans la suite :

Proposition 1.2. (i) Soit $X_1, X_2 \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

$\forall k \geq 1$, la variable $X_1 + \dots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$.

(ii) Soit r un entier positif, et $p_1 \dots p_r$ des réels positifs tels que $p_1 + \dots + p_r = 1$. Soit X_0 une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ_0 . Soit $Z := (Z_1, \dots, Z_r)$ une variable aléatoire, à valeurs dans \mathbb{Z}_+^r , dont la loi conditionnellement à l'événement $X_0 = n$ est la loi multinomiale de paramètres (n, p_1, \dots, p_r) .

Les variables Z_1, \dots, Z_r sont des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre $p_1 \lambda_0, \dots, p_r \lambda_0$.

Démonstration. La propriété (i) est classique et peut passer par exemple par l'utilisation de la fonction génératrice classique. Rappelons à cette occasion que la fonction génératrice de X_i est égale à $G_{X_i}(s) := \mathbb{E}[s^{X_i}] = e^{\lambda_i(s-1)}$.

Pour la preuve de la propriété (ii), il s'agit de montrer que $\forall (s_1, \dots, s_r) \in [0, 1]^r$, $\mathbb{E}[s_1^{Z_1} \dots s_r^{Z_r}] = \mathbb{E}[s_1^{Z_1}] \dots \mathbb{E}[s_r^{Z_r}]$. On procède en conditionnant par rapport aux différentes valeurs de X_0 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[s_1^{Z_1} \dots s_r^{Z_r}] &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}[s_1^{Z_1} \dots s_r^{Z_r} | X_0 = n] \mathbb{P}(X_0 = n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq k_1, \dots, k_r \leq n} \binom{n}{k_1, \dots, k_r} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} s_1^{k_1} \dots s_r^{k_r} e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} (p_1 s_1 + \dots + p_r s_r)^n e^{-\lambda_0} \frac{\lambda_0^n}{n!} \\ &= e^{\lambda_0((p_1 s_1 + \dots + p_r s_r) - 1)} \\ &= e^{\lambda_0(p_1(s_1 - 1) + \dots + p_r(s_r - 1))}, \end{aligned}$$

ce qui donne bien la relation voulue. □

1.3. Construction du PPP et preuve de son invariance. Nous avons vu plus haut que tirer *exactement un point* au sort uniformément dans chaque carré unité de \mathbb{Z}^2 n'était pas une bonne idée. Nous allons plutôt tirer *un nombre poissonnien* de points dans chaque carré unité.

Plus précisément, nous considérons une suite $(X_{(i,j)})_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ de variables iid de loi de Poisson de paramètre 1, et allons associer à chaque carré unité de coin inférieur gauche (i, j) une collection de $X_{i,j}$ points tirés uniformément au hasard à l'intérieur de ce carré : nous les noterons $x_1^{(i,j)}, \dots, x_{X_{i,j}}^{(i,j)}$.

L'ensemble aléatoire

$$\mathbf{E} := \bigcup_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2} \bigcup_{k=1}^{X_{(i,j)}} \{x_k^{(i,j)}\}$$

définit un *Processus de Poisson Ponctuel* (PPP) d'intensité 1 (en référence au paramètre de la loi de Poisson) sur \mathbb{R}^2 et possède les propriétés suivantes qui caractérisent sa loi :

Proposition 1.3. *La loi de l'ensemble \mathbf{E} satisfait :*

(i) *La loi de \mathbf{E} est invariante par isométrie*

(ii) *Pour toute collection de rectangles disjoints R_1, \dots, R_k , les variables aléatoires $N_{\mathbf{E}}(R_1), \dots, N_{\mathbf{E}}(R_k)$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètre $\text{Aire}(R_1), \dots, \text{Aire}(R_k)$.*

Démonstration. La propriété (i) est une conséquence de la propriété (ii) qui est donc celle que nous allons montrer. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, on note $C_{i,j}$ le carré unité de coin inférieur gauche (i, j) et pour tout $l = 1, \dots, k$, $N_{i,j}(R_l) := N_{\mathbf{E} \cap R_l \cap C_{i,j}}$.

Par construction, conditionnellement à $X_{i,j}$, le vecteur $(N_{i,j}(R_1), \dots, N_{i,j}(R_l), X_{i,j} - \sum_{l=1}^k N_{i,j}(R_l))$ suit une loi multinomiale de paramètres $(X_{i,j}, \text{Aire}(A_1 \cap C_{i,j}), \dots, \text{Aire}(A_k \cap C_{i,j}), 1 - \sum_{l=1}^k \text{Aire}(A_l \cap C_{i,j}))$.

La proposition 1.2 (ii) appliquée avec

$$r = k + 1, \lambda_0 = 1, p_1 = \text{Aire}(A_1 \cap C_{i,j}), \dots, p_k = \text{Aire}(A_k \cap C_{i,j}), p_r = p_{k+1} = 1 - (p_1 + \dots + p_k),$$

entraîne que pour $l = 1, \dots, k$, les variables $N_{i,j}(R_l)$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètre $\text{Aire}(A_l \cap C_{i,j})$. □

Remarque 1 : On aurait pu construire \mathbf{E} avec n'importe quel pavage de \mathbb{R}^2 (même irrégulier), il suffit de tirer uniformément dans chaque cellule du pavage un nombre aléatoire de points suivant une loi de Poisson de paramètre l'aire de la cellule. L'ensemble ainsi défini a la même loi que celui que nous avons construit, en effet la preuve de Proposition 1.3 marche de la même manière pour cet ensemble.

Remarque 1 bis : On peut construire selon le même principe un processus de point sur n'importe quelle surface pour peu que l'on sache tirer au sort des points uniformément sur la surface. Si cette surface est compacte, on n'a même qu'à se contenter de tirer au sort uniformément un nombre poissonnien de point et l'on aura un processus de points dont la loi jointe des cardinaux de ses intersections avec des ensembles disjoints sera donnée par des lois de Poisson indépendantes de paramètre égal aux aires respectives des ensembles.

Remarque 2 : La Proposition 1.3 se généralise ainsi : pour toute collection T_1, \dots, T_k d'ensembles disjoints admettant une aire, les variables aléatoires $N_{\mathbf{E}}(T_1), \dots, N_{\mathbf{E}}(T_k)$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètre $\text{Aire}(T_1), \dots, \text{Aire}(T_k)$.

2. STATISTIQUES DE LA MOSAÏQUE DE POISSON-VORONOÏ

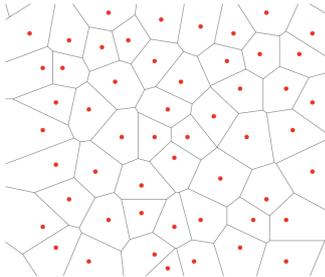
Maintenant que nous avons défini \mathbf{E} et identifié sa loi, il est naturel de nous intéresser à la manière dont ce réseau de points pave le plan. Pour cela, nous associons à \mathbf{E} son pavage de Voronoï, à tout point x de \mathbf{E} , on associe sa *cellule* \mathcal{C}_x qui est le polygone contenant les points du plan qui sont plus proches de x que de de tous les autres points de \mathbf{E} :

$$\mathcal{C}_x := \{z \in \mathbb{R}^2 : \forall y \in \mathbf{E} \setminus \{x\} \ ||z - x|| < ||z - y||\}.$$

On observe que la cellule de x , en tant qu'intersection de demi-plans délimités par des médiatrices de x avec d'autres points de \mathbf{E} , est un polygone convexe.

La mosaïque ainsi obtenue est le modèle naturel pour décrire des phénomènes naturels aussi variés que le pelage des girafes, les ailes des libellules, la carapace des tortues, les photos ne manquent pas sur internet...

Les sommets de la cellule polygonale \mathcal{C}_x sont des intersections de médiatrices, sont donc des centres de sommets cocycliques, mais vu que les points de \mathbf{E} ont été tirés au sort selon une loi à densité, la probabilité d'existence de 4 points cocycliques est nulle et presque sûrement tous les sommets des cellules de la mosaïque sont de degré 3 (voir figure).



Nous aimerions en savoir plus sur les propriétés statistiques de ces cellules polygonales à commencer par leur nombre moyen de côtés.

2.1. Nombre moyen de côtés d'une cellule. La définition elle-même du nombre moyen de côtés d'une cellule n'a rien d'évidente. Pour fixer les idées, considérons le nombre moyen $N_n(\mathbf{E})$ de côtés des cellules des points qui se trouvent dans le carré $[0, n]^2$. Ce résultat a été trouvé indépendamment par des mathématiciens appliqués, Meijering en 1953 [4] et Gilbert en 1962 [3] qui étudiaient la subdivision de l'espace dans un crystal.

Proposition 2.1. *Si, pour tout $x \in \mathbf{E}$, on note \mathcal{C}_x la cellule de x , et $N(\mathcal{C}_x)$ son nombre de côtés, le nombre moyen de côtés d'une cellule dans le carré $[0, n]^2$ défini par*

$$N_n(\mathbf{E}) := \frac{\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} N(\mathcal{C}_x)}{N_{\mathbf{E}}([0, n]^2)}$$

converge en probabilité vers 6 quand n tend vers l'infini.

Remarque : Le lecteur se convaincra aisément en lisant la preuve que le résultat se généralise par les mêmes raisonnements si la suite de carrés $[0, n]^2$ est remplacée par une suite A_n d'ensembles qui tend vers l'infini et telle que l'aire de A_n est négligeable devant la longueur de sa frontière, de sorte que l'essentiel est de pouvoir ignorer les "effets de bord". Nous avons ainsi une définition satisfaisante du nombre moyen de côtés.

Démonstration. Le dénominateur $N_{\mathbf{E}}([0, n]^2)$ suit une loi de Poisson de paramètre n^2 , ainsi $\frac{N_{\mathbf{E}}([0, n]^2)}{n^2}$ converge en probabilité vers 1. Il reste à montrer que $\frac{\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} N(\mathcal{C}_x)}{n^2}$ converge vers 6 en probabilité.

On va considérer le graphe dessiné par la mosaïque restreinte au carré $[0, n]^2$ où toutes les arêtes qui sortent du carré sont rattachées à un point virtuel, de sorte que ce graphe peut être vu comme un graphe dessiné sur une sphère. Si on appelle F_n, E_n, V_n respectivement son nombre de faces, arêtes et sommets, la formule d'Euler donne

$$(1) \quad F_n - E_n + V_n = 2.$$

Observons maintenant que :

$$(2) \quad F_n = N_{\mathbf{E}}([0, n]^2) \sim n^2, \text{ en probabilité.}$$

Le numérateur $\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} N(\mathcal{C}_x)$, compte :

- en double les arêtes de la mosaïque qui sont communes à deux cellules dont les germes sont dans le carré $[0, n]^2$.
- en simple les arêtes qui n'appartiennent qu'à une cellule dont les germes sont dans le carré $[0, n]^2$.

Seules les arêtes du "bord" seront donc éventuellement comptées 1 seule fois, leur nombre est de l'ordre de n , ainsi

$$(3) \quad E_n = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} N(\mathcal{C}_x) + O(n) \text{ en probabilité.}$$

Maintenant, rappelons que le degré de chaque sommet est égal 3, ainsi, de chaque sommet différent du point virtuel partent exactement 3 demi-arêtes et donc

$$(4) \quad E_n = \frac{3}{2} V_n + O(n).$$

D'après (2) et (3),

$$(5) \quad \frac{\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} N(\mathcal{C}_x)}{n^2} \sim \frac{2E_n}{F_n}$$

Mais en rassemblant, (1) et (4), on constate que

$$(6) \quad F_n = \frac{1}{2} V_n + O(n).$$

ce qui donne le résultat en utilisant (5). □

2.2. Moyenne d'une caractéristique géométrique d'une cellule : notion de cellule typique. Généralisons le problème précédent. Considérons f une fonction invariante par translation de l'ensemble des polygones du plan, dans \mathbb{R} . On note $N_n(\mathbf{E}, f)$ la valeur moyenne de l'image par f des cellules des points qui se trouvent dans le carré $[0, n]^2$. Plus précisément, on note

$$(7) \quad N_n(\mathbf{E}, f) := \frac{\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} f(\mathcal{C}_x)}{N_{\mathbf{E}}([0, n]^2)}.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, le dénominateur suit une loi de Poisson de paramètre n^2 , et converge en probabilité vers 1 une fois normalisé par n^2 .

Le numérateur quand à lui est plus délicat à étudier. La preuve de la convergence en probabilité du numérateur, normalisé par n^2 , vers une constante est due à Cowan [4] en 1976 et utilise des arguments de théorie ergodique que l'on va essayer de contourner dans l'heuristique suivante (qui a ensuite été utilisée en 1993 par Avram Et Bertsimas [1] pour montrer un TCL). L'idée naturelle est de décomposer le carré $[0, n]^2$ en un quadrillage de carreaux de taille $A \times A$, où A tend vers l'infini. Le hic est que les sommes sur chacun de ces grands carreaux ne sont pas indépendantes dû aux *chevauchements* des cellules ayant leur germe dans un carreau dans un carreau d'à côté. Pour contourner ce problème, on décide d'omettre la contribution des cellules dont les germes sont à une distance inférieure à \sqrt{A} des frontières des carreaux de sorte que les chevauchements entre carreaux voisins n'ont lieu qu'avec faible probabilité et que l'on peut considérer les contributions dans chaque carreau privé de sa bordure comme iid. La loi des grands nombres classique permet alors de montrer la convergence de (7).

Pour identifier la valeur de cette limite, il suffit d'exprimer l'espérance du numérateur de (7), vu que le dénominateur est équivalent à n^2 . Il se trouve que cette espérance se 'calcule', grâce à la propriété "miraculeuse" de l'ensemble \mathbf{E} qui dit que l'ensemble \mathbf{E} conditionné à contenir le point x a la même loi que l'ensemble $\mathbf{E} \cup \{x\}$. En effet d'après la proposition 1.3, l'ensemble \mathbf{E} restreint à l'extérieur d'un voisinage \mathcal{V}_x de x est indépendant de $\mathbf{E} \cap \mathcal{V}_x$. Cette propriété entraîne l'identité parfois appelée identité de Mecke-Slivnyack. Si l'on note, $\mathcal{C}_x(\mathbf{E} \cup \{x\})$ la cellule du point x pour la mosaïque de Voronoï associé à l'ensemble $\mathbf{E} \cup \{x\}$, on a l'identité

$$(8) \quad \mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} f(\mathcal{C}_x) \right] = \int_{[0, n]^2} \mathbb{E}[f(\mathcal{C}_x(\mathbf{E} \cup \{x\}))] dx.$$

L'intuition de cette identité est assez simple. Si on quadrille le carré $[0, n]^2$, en petits carrés de côté $1/N$, que l'on notera $C_{k,l}$, pour k, l compris entre 1 et nN , il suffit de réécrire la somme $\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} f(\mathcal{C}_x)$ comme étant approximativement $\sum_{k,l} f(\mathcal{C}_{x_{k,l}}) \mathbf{1}_{|\mathbf{E} \cap C_{k,l}|=1}$ où $x_{k,l}$ est le point de $\mathbf{E} \cap C_{k,l}$ quand cet ensemble est un singleton. Les événements $|\mathbf{E} \cap C_{k,l}| > 1$ étant de probabilité de l'ordre du carré de l'aire de $C_{k,l}$, soit $1/N^4$, ils ne contribuent pas à l'espérance. On aboutit à une espérance qui est ainsi approchée par une somme de Riemann qui converge vers l'intégrale de droite dans (9).

Mais maintenant, nous remarquons que la loi de \mathbf{E} étant invariante par translation,

$$(9) \quad \int_{[0, n]^2} \mathbb{E}[f(\mathcal{C}_x(\mathbf{E} \cup \{x\}))] dx = n^2 \mathbb{E}[f(\mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\}))].$$

La conclusion de ces discussions est :

Proposition 2.2. *Pour toute fonction f définies sur les polygones de \mathbb{R}^2 invariante par translation, le quotient $N_n(\mathbf{E}, f) := \frac{\sum_{x \in \mathbf{E} \cap [0, n]^2} f(\mathcal{C}_x)}{N_{\mathbf{E}}([0, n]^2)}$ converge vers $\mathbb{E}[f(\mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\}))]$ en probabilité quand n tend vers l'infini.*

Cette convergence justifie le nom de *cellule typique de la mosaïque* que l'on donne au polygone aléatoire $\mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})$.

3. CALCULS SUR LA CELLULE TYPIQUE

À ce stade de la discussion, la question qui se pose naturellement est la suivante. Le nombre "6" trouvé dans la section 2.1 devrait donc être égal à l'espérance du nombre de côtés de la cellule typique définie dans la section 2.2. Est il possible de retrouver ce nombre par un calcul sur la cellule typique ? Des calculs pourraient-ils donner d'autres informations plus fines ? La réponse est oui, et nous allons essayer de voir comment. Tout va résider dans calcul de jacobien portant dans un cadre général le nom de jacobien de Blaschke-Petkantschin.

Proposition 3.1. *Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ,*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in \mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})} f(x) \right] = 6\pi \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]} f(R \cos u, R \sin u) R^3 \exp(-\pi R^2) dR du.$$

En particulier, le nombre moyen de sommets de la cellule typique est :

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\}))] = 6.$$

Remarque : la première égalité donne une information sur la densité de présence dans le plan de sommets de la cellule typique. Cette densité $6\pi R^3 \exp(-\pi R^2) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]}(R, u)$ n'est pas une densité de probabilité et son intégrale vaut 6, ce qui explique la deuxième partie de la proposition.

Preuve : Si, pour toute paire de points $\{x_1, x_2\}$ du plan, on note :

- $\mathcal{B}_{\text{circ}}(0, x_1, x_2)$ la boule circonscrite à 0, x_1 et x_2 ,

- $C(x_1, x_2)$ son centre
 - $R_{circ}(0, x_1, x_2) := \|C(x_1, x_2)\|$ son rayon.
- La définition de $\mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})$ donne

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})} f(x)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{\{x_1, x_2\} \in \mathbf{E}} f(C(x_1, x_2)) \mathbf{1}_{\mathcal{B}_{circ}(0, x_1, x_2) \cap \mathbf{E} = \emptyset}\right].$$

Mais cette dernière espérance peut se réécrire, (encore grâce à la formule de Mecke-Slivnyack!)

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})} f(x)\right] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(C(x_1, x_2)) \mathbb{P}(\mathcal{B}_{circ}(0, x_1, x_2) \cap \mathbf{E} = \emptyset) dx_1 dx_2.$$

(*stricto sensu*, on aurait dû écrire $\mathbb{P}(\mathcal{B}_{circ}(x_0, x_1, x_2) \cap (\mathbf{E} \cup \{x_1, x_2\}) = \emptyset)$ mais cette quantité est égale à $P(\mathcal{B}_{circ}(x_0, x_1, x_2) \cap \mathbf{E} = \emptyset)$. Quant au facteur $\frac{1}{2}$, il provient du fait que les paires de points $\{x_1, x_2\}$ qui contribuent ne sont pas ordonnées et que l'intégrale les compte deux fois.)

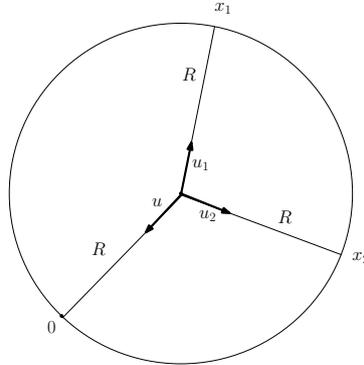
La loi du Processus de Poisson Ponctuel indique que

$$\mathbb{P}(\mathcal{B}_{circ}(0, x_1, x_2) \cap \mathbf{E} = \emptyset) = P(\text{Poisson}(\pi R_{circ}(0, x_1, x_2)^2) = 0) = \exp(-\pi R_{circ}(0, x_1, x_2)^2).$$

On est donc amené à calculer

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x \in \mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})} f(x)\right] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(C(x_1, x_2)) \exp(-\pi R_{circ}(0, x_1, x_2)^2) dx_1 dx_2.$$

Le calcul de cette intégrale nécessite un changement de variable. Les points x_1 et x_2 étant repérés grâce au centre du cercle circonscrit à $0x_1x_2$ qui, lui, est repérable en coordonnées polaires par $R_{circ}(0, x_1, x_2)$ et par un vecteur unité u . On a alors uniquement besoin de deux vecteurs unités u_1 et u_2 pour repérer x_1 et x_2 sur le cercle circonscrit à $0x_1x_2$. Les 4 coordonnées R, u, u_1, u_2 repèrent donc les deux points x_1 et x_2 (voir figure).



Calculons maintenant le Jacobien. Pour écrire la matrice jacobienne, on décide que les 4 lignes correspondent respectivement aux dérivées partielles suivant R, u, u_1, u_2 , et que les 4 colonnes correspondent, pour les deux premières, aux projections de la dérivée partielle de x_1 selon u_1 et u_1^\perp , et pour les deux dernières, aux projections de la dérivée partielle de x_2 selon u_2 et u_2^\perp , où pour un vecteur x , le vecteur x^\perp désigne le vecteur obtenu à partir de x par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Avec ces conventions,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1 dx_2}{dR du du_1 du_2} &= \begin{vmatrix} \langle u + u_1, u_1 \rangle & \star & \langle u + u_2, u_2 \rangle & \star \\ R \langle (u + u_1)^\perp, u_1 \rangle & \star & R \langle (u + u_2)^\perp, u_2 \rangle & \star \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{vmatrix} \\ &= R^3 \begin{vmatrix} \langle u + u_1, u_1 \rangle & \langle u + u_2, u_2 \rangle \\ \langle (u + u_1)^\perp, u_1 \rangle & \langle (u + u_2)^\perp, u_2 \rangle \end{vmatrix} \\ &= 2R^3 \text{Aire}(uu_1u_2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[\sum_{x \in \mathcal{C}_0(\mathbf{E} \cup \{0\})} f(x)] =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]^3} f(R, u) R^3 \exp(-\pi R^2) 2 \text{Aire}(uu_1u_2) dR du_1 du_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+} f(R, u) R^3 \exp(-\pi R^2) dR \int_{[0, 2\pi]^3} 2 \text{Aire}(uu_1u_2) du_1 du_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]} f(R, u) R^3 \exp(-\pi R^2) \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi-x} |\sin x + \sin y + \sin(2\pi - x - y)| dy dx \right) dR du \\ &= 6\pi \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]} f(R, u) R^3 \exp(-\pi R^2) dR du \end{aligned}$$

(Le facteur $\frac{1}{2}$ disparaît dans la troisième égalité car les points sont ordonnés lorsque l'intégrale en u, u_1, u_2 est écrite comme une intégrale sur le domaine $0 < y < 2\pi - x$.)

Pour trouver le nombre moyen de sommets, il suffit d'appliquer l'égalité à la fonction $f = 1$ \square

Remarque : ce calcul appliqué à une fonction qui dépend également des angles sous lesquels les côtés partent d'un sommet donne accès également à la statistique de ces angles. On trouve que leur densité de distribution est proportionnelle au produit des sinus des 3 demi-angles qu'ils forment.

4. LE CAS DES SURFACES ET SON APPLICATION : LE THÉORÈME DE GAUSS-BONNET !

Il est naturel de se poser la question des statistiques d'une mosaïque de Poisson-Voronoi sur une surface. Lorsque la densité du processus de Poisson tend vers l'infini, les cellules deviennent tellement petites qu'elles ne voient plus la courbure. Donc, lorsque l'intensité tend vers l'infini, la situation se rapproche de celle du plan, et le nombre de sommets moyen tend vers 6. Question : quelle est la correction par rapport à cette limite ? La réponse a été apportée par Calka, Chapron et Enriquez qui montrent dans [2] que cette correction dépend de la courbure. Plus précisément,

Proposition 4.1. *Soit S une surface et x_0 un point de S . Soit \mathbf{E}_λ un PPP homogène d'intensité λ . Lorsque λ tend vers l'infini,*

$$\mathbb{E}[N(\mathcal{C}_{x_0}(\mathbf{E}_\lambda \cup \{x_0\}))] = 6 - \frac{K(x_0)}{3\pi} \frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

où $K(x_0)$ désigne la courbure de Gauss de la surface au point x_0 .

La preuve de ce résultat est basée sur le calcul de la correction apportée par la courbure dans le calcul du jacobien de la section précédente. Nous n'allons pas détailler ces calculs ici. Une présentation assez simple en est faite dans [3]. Nous allons plutôt essayer de montrer comment la proposition précédente fournit une preuve probabiliste du Théorème de Gauss-Bonnet qui est un théorème fondamental de la géométrie différentielle qui relie la courbure d'une surface à sa topologie. Plus précisément,

Théorème. (Gauss-Bonnet) [5] *Soit S une surface compacte sans bord, la caractéristique d'Euler $\chi(S)$ satisfait*

$$\chi(S) = \frac{1}{2\pi} \int_S K(x) d\sigma(x)$$

où $d\sigma$ désigne la mesure de surface sur S .

Preuve : Considérons la mosaïque de Poisson-Voronoi associée à \mathbf{E}_λ . Notons F , E et V , le nombre total respectivement de faces, arêtes et sommets de la mosaïque. La relation d'Euler appliquée au graphe de Voronoi donne

$$\chi(S) = F - E + V.$$

Comme tous les sommets sont presque sûrement de degré 3, on peut faire partir de chaque sommet trois demi-arêtes et obtenir une partition de l'ensemble des arêtes. Ceci entraîne donc

$$E = \frac{3}{2}V.$$

De ces deux dernières équations, on déduit

$$\chi(S) = F - \frac{1}{2}V.$$

Cette dernière égalité étant vraie presque sûrement, en passant à l'espérance, on obtient

$$(10) \quad \chi(S) = \mathbf{E}[F] - \frac{1}{2}\mathbf{E}[V].$$

Il nous reste donc à calculer les deux espérances du membre de droite. Remarquons d'abord que le nombre de faces F n'est rien d'autre que le nombre de points de \mathbf{E}_λ dans S , ainsi

$$(11) \quad \mathbf{E}[F] = \mathbf{E}[\#(\mathbf{E}_\lambda \cap S)] = \lambda\sigma(S).$$

Maintenant, comme chaque sommet appartient à 3 cellules,

$$\mathbf{E}[V] = \frac{1}{3} \mathbf{E}\left[\sum_{x \in \mathbf{E}_\lambda} N(C_x)\right].$$

En appliquant la formule de Mecke-Slivnyak, on obtient

$$(12) \quad \mathbf{E}[V] = \frac{\lambda}{3} \int_S \mathbf{E}[N(C_x(\mathbf{E}_\lambda \cup \{x\}))] d\sigma(x).$$

Une version uniforme du Théorème 1 donne

$$(13) \quad \sup_{x \in S} \lambda \left(\mathbf{E}[N(C_x(\mathbf{E}_\lambda \cup \{x\}))] - 6 + \frac{3K(x)}{\pi\lambda} \right) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

En combinant, (10), (11), (12) et (13), on obtient

$$\chi(S) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_S K(x) d\sigma(x).$$

Et l'égalité, car l'intégrale ne dépend pas de λ . □

RÉFÉRENCES

- [1] F. Avram, D. Bertsimas. : *On central limit theorems in geometrical probability*. Ann. Appl. Probab. 3 4, 1033–1046 (1993)
- [2] P. Calka, A. Chapron, N. Enriquez : *Poisson-Voronoi tessellation on a Riemannian manifold*, IMRN, Volume 2021, Issue 7, (2021)
- [3] P. Calka, A. Chapron, N. Enriquez : *Mosaïque de Poisson-Voronoi sur une surface*, Séminaire de Probabilités L, LN 2252 Springer, 9-16 (2019)
- [4] R. Cowan : *The use of ergodic theorems in random geometry*. Adv. in Appl. Probab. 10,47–57 (1978)
- [5] M.P. Do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces* (1976)
- [6] E.N. Gilbert *Random subdivisions of space into crystals* The Annals of mathematical statistics, 33(3) :958-972 (1962)
- [7] J.L. Meijering *Interface area, edge length, and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation*, Philips Res. Rep, 8 (1953)
- [8] J. Møller : *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Lecture Notes in Statist. 87, Springer, New York (1994)