Journée ENS-CPGE: Autour des propriétés de rationnalité des hypersurfaces cubiques de petite dimension

Diego Izquierdo
CMLS - Ecole Polytechnique

Dans cette note, on cherche à présenter un développement de géométrie algébrique de manière aussi accessible que possible à des étudiants de classe préparatoire ou de L1/L2. Nous travaillons systématiquement sur le corps des nombres complexes.

1. Parties algébriques affines et projectives

On appelle $\mathbb{A}^n := \mathbb{C}^n$ l'espace affine de dimension n sur $\mathbb{C}$. Une partie de $\mathbb{A}^n$ est dite algébrique si c'est l'ensemble des solutions d'un système de la forme:

$$f_1 = \cdots = f_r = 0$$

avec $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$. On la note $V(f_1, \ldots, f_r)$. Si V est une partie algébrique de $\mathbb{A}^n$ et W est une partie algébrique de $\mathbb{A}^m$, une application allant d'une partie non vide de V vers W est dite algébrique si elle est donnée coordonnée par coordonnée par des fractions rationnelles.

Soit maintenant E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n+1$. On appelle l'espace projectif de E, noté $\mathbb{P}(E)$, l'ensemble des droites de E. Lorsque $E = \mathbb{C}^{n+1}$, on note $\mathbb{P}^n$ au lieu de $\mathbb{P}(E)$. On dit que c'est l'espace projectif de dimension n. Ce dernier est muni d'une application surjective:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} &\to \mathbb{P}^n \\ v &\mapsto \mathbb{C} \cdot v. \end{aligned}$$

Si l'on se donne $p \in \mathbb{P}^n$, on note $(x_0 : \cdots : x_n)$ un système de coordonées d'un relèvement de p dans $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$. On a alors $(x_0 : \cdots : x_n) = (y_0 : \cdots : y_n)$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ tel que $(x_0, \ldots, x_n) = \lambda(y_0, \ldots, y_n)$.

Une partie de $\mathbb{P}^n$ est dite algébrique si c'est l'ensemble des solutions d'un système de la forme:

$$f_1 = \cdots = f_r = 0$$

avec $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ des polynômes homogènes. On la note encore $V_p(f_1, \ldots, f_r)$. Un exemple simple et important est donné par les sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}^n$, c'est-à-dire les parties de $\mathbb{P}^n$ de la forme $\mathbb{P}(E)$ avec E sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Si V est une partie algébrique de $\mathbb{P}^n$ et W est une partie algébrique de $\mathbb{P}^m$, une application allant d'une partie non vide de V vers W est dite algébrique si elle est donnée coordonnée par coordonnée par des fractions rationnelles homogènes (c'est-à-dire à numérateur et dénominateur homogènes) et toutes de même degré.

2. Variétés rationnelles

On dira qu'une partie algébrique X de $\mathbb{A}^n$ (resp. $\mathbb{P}^n$) est rationnelle s'il existe une partie algébrique Y de $\mathbb{A}^n$ (resp. $\mathbb{P}^n$) ne contenant pas X, un entier $m \geq 0$, une partie algébrique stricte Z de $\mathbb{A}^m$ (resp. $\mathbb{P}^m$), et des bijections algébriques inverses l'une de l'autre $\varphi : X \setminus Y \to \mathbb{A}^n \setminus Z$ (resp. $\varphi : X \setminus Y \to \mathbb{P}^n \setminus Z$) et $\psi : \mathbb{A}^n \setminus Z \to X \setminus Y$ (resp. $\psi : \mathbb{P}^n \setminus Z \to X \setminus Y$). Cette définition est un peu plus faible que la définition utilisée le plus couramment en géométrie algébrique, mais elle est un peu plus élémentaire.

L'exemple le plus simple mais non trivial de partie algébrique rationnelle est donné par les coniques.

Définition 2.1. *Une conique est une partie algébrique de $\mathbb{P}^2$ définie par une forme quadratique non dégénérée.*

Lemme 2.2. *Les coniques sont toutes rationnelles.*

Preuve. Soit C une conique. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que C est donnée par l'équation $x_0^2+x_1^2-x_2^2 = 0$. Soit p le point de coordonnées $(1 : 0 : 1)$ dans C. Pour $q = (q_0 : q_1) \in \mathbb{P}^1$, on note L_q la droite d'équation:

$$q_0(x_0 - x_2) + q_1 x_1 = 0.$$

C'est une droite passant par p et dès que $q \neq (1 : 0)$, elle intersecte C en un unique autre point, que l'on note $f(q)$. On vérifie aisément que les coordonnées de $f(q)$ sont des fractions rationnelles en les coordonnées de q (voir par exemple la remarque 2.3). On définit donc une application algébrique $f : \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0)\} \to C \setminus \{p\}$.

Réciproquement, si $q \in C \setminus \{p\}$, la droite L_q passant par p et q admet une équation de la forme:

$$a_0(x_0 - x_2) + a_1 x_1 = 0,$$

avec a_0 et a_1 qui s'expriment comme fractions rationnelles en les coordonées de q. L'application:

$$\begin{aligned} g : C \setminus \{p\} &\to \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0)\} \\ q &\mapsto (a_0 : a_1) \end{aligned}$$

est alors algébrique et inverse de f. □

Remarque 2.3. En coordonnées, on obtient les bijections réciproques:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0)\} &\to C \setminus \{p\} \\ (x : y) &\mapsto \left(x^2 - y^2 : 2xy : x^2 + y^2\right) \\ C \setminus \{p\} &\to \mathbb{P}^1 \setminus \{(1 : 0)\} \\ (x : y : z) &\mapsto (y : z - x). \end{aligned}$$

Elles s'étendent même en des isomorphismes entre $\mathbb{P}^1$ et C.

3. Le cas des courbes elliptiques

Définition 3.1. *Une courbe elliptique est une partie algébrique de* $\mathbb{P}^2$ *définie par une équation de la forme:*

$$y^2 z = (x - \alpha_1 z)(x - \alpha_2 z)(x - \alpha_3 z)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *deux à deux distincts.*

Théorème 3.2. *Aucune courbe elliptique n'est rationnelle. Plus précisément, si* E *est une courbe elliptique donnée par une équation cubique* $\varphi = 0$ *et si* F, G, H *sont des fractions rationnelles telles que* $\varphi(F, G, H) = 0$*, alors* F, G, H *sont constantes.*

Preuve. Soit E une courbe elliptique donnée par une équation de la forme:

$$y^2 z = (x - \alpha_1 z)(x - \alpha_2 z)(x - \alpha_3 z)$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ deux à deux distincts, et considérons P, Q, R des polynômes tels que $pgcd(P, Q, R) = 1$ et:

$$P^2 R = (Q - \alpha_1 R)(Q - \alpha_2 R)(Q - \alpha_3 R).$$

On remarque immédiatement que P et R sont premiers entre eux.

Maintenant, si l'on pose $D = pgcd(Q, R)$ et l'on écrit $Q = DQ_0$ et $R = DR_0$, on a:

$$P^2 R_0 = D^2 (Q_0 - \alpha_1 R_0)(Q_0 - \alpha_2 R_0)(Q_0 - \alpha_3 R_0),$$

avec Q_0 et R_0 premiers entre eux. Dans cette égalité, P et D sont premiers entre eux, et R_0 et $(Q_0 - \alpha_1 R_0)(Q_0 - \alpha_2 R_0)(Q_0 - \alpha_3 R_0)$ le sont aussi. Cela implique qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ vérifiant:

$$\begin{cases} R_0 = \lambda D^2 \\ (Q_0 - \alpha_1 R_0)(Q_0 - \alpha_2 R_0)(Q_0 - \alpha_3 R_0) = \lambda^{-1} P^2. \end{cases}$$

Comme $Q_0 - \alpha_1 R_0$, $Q_0 - \alpha_2 R_0$ et $Q_0 - \alpha_3 R_0$ sont deux à deux premiers entre eux, on déduit qu'il existe des polynômes A_1, A_2, A_3 tels que:

$$\begin{cases} Q_0 - \alpha_1 R_0 = A_1^2 \\ Q_0 - \alpha_2 R_0 = A_2^2 \\ Q_0 - \alpha_3 R_0 = A_3^2. \end{cases}$$

On conclut alors via le lemme qui suit. □

Lemme 3.3. *Soient* Q *et* R *deux polynômes premiers entre eux dans* $\mathbb{C}[T]$ *(ou même dans* $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$*). On suppose qu'il existe au moins quatre combinaisons linéaires de* Q *et* R *qui sont des carrés dans* $\mathbb{C}[T]$ *(ou dans* $\mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$*). Alors* Q *et* R *sont constants.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que Q, R sont des polynômes vérifiant les conditions du lemme et tels que l'entier $\max\{\deg Q, \deg R\}$ est strictement positif et minimal. Quitte à remplacer Q et R par $aQ + bR$ et par $cQ + dR$ respectivement pour certains $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$ bien choisis, on peut supposer que Q, R, $Q - R$ et $Q - \lambda R$ sont des carrés pour un certain $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On écrit $Q = U^2$ et $R = V^2$. En choisissant $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = \lambda$, les polynômes:

$$Q - R = (U + V)(U - V), \qquad Q - \lambda R = (U + \mu V)(U - \mu V)$$

sont des carrés. Comme U et V sont premiers entre eux, on déduit que $U + V$, $U - V$, $U + \mu V$ et $U - \mu V$ sont tous des carrés. Mais $\max\{\deg U, \deg V\} < \max\{\deg Q, \deg R\}$. Par minimalité de $\max\{\deg Q, \deg R\}$, les polynômes U et V sont constants. Il en est donc de même de Q et R: absurde! □

Remarque 3.4. La proposition 3.2 montre qu'aucune cubique lisse n'est rationnelle, puisque les cubiques lisses sur $\mathbb{C}$ sont précisément les courbes elliptiques.

4. Le cas des surfaces cubiques

Définition 4.1. *Une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3$ est une partie algébrique S de $\mathbb{P}^3$ définie par une équation de la forme $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ avec φ polynôme homogène de degré 3 tel que, pour tout $q \in S$, les nombres complexes $\frac{\partial\varphi}{\partial X_0}(q)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}(q)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}(q)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial X_3}(q)$ ne sont pas tous nuls. Le plan tangent $T_q(S)$ à S en un point $q \in S$ est alors le plan de $\mathbb{P}^3$ défini par l'équation:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X_0}(q)x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_1}(q)x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_2}(q)x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial X_3}(q)x_3 = 0.$$

Théorème 4.2. *Soit S une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3$. On suppose qu'elle contient une droite. Alors elle est rationnelle.*

On commence par deux lemmes préliminaires portant sur la géométrie de l'espace projectif.

Lemme 4.3. *Deux droites dans $\mathbb{P}^2$ s'intersectent toujours.*

Preuve. Soient L_1 et L_2 deux droites dans $\mathbb{P}^2$. Soit $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ la projection naturelle. Soient $\Pi_1 = \pi^{-1}(L_1)$ et $\Pi_1 = \pi^{-1}(L_1)$. Les espaces $\Pi_1 \cup \{0\}$ et $\Pi_2 \cup \{0\}$ sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{C}^3$. Leur intersection est donc de dimension au moins 1. On déduit que $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$, et donc que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. □

Lemme 4.4. *Soient L une droite et Π un plan dans $\mathbb{P}^3$. Si l'intersection $L \cap \Pi$ a au moins deux éléments, alors L est contenue dans Π.*

Preuve. Soit $\pi : \mathbb{C}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ la projection naturelle. Soient $\tilde{L} = \pi^{-1}(L)$ et $\tilde{\Pi} = \pi^{-1}(\Pi)$. Les espaces $\tilde{L} \cup \{0\}$ et $\tilde{\Pi} \cup \{0\}$ sont des sous-espaces vectoriels $\mathbb{C}^4$ de dimensions respectives 2 et 3. De plus, comme $L \cap \Pi$ a au moins deux éléments, l'intersection $(\tilde{L} \cup \{0\}) \cap (\tilde{\Pi} \cup \{0\})$ contient au moins deux droites distinctes. On déduit que cette intersection est de dimension au moins 2. Comme elle contient $\tilde{L} \cup \{0\}$, elle est égale à $\tilde{L} \cup \{0\}$. Donc $\tilde{L} \cup \{0\}$ est contenu dans $\tilde{\Pi} \cup \{0\}$, et L est bien contenue dans Π. □

La preuve du théorème 4.2 se fait en deux grandes étapes: on montre d'abord qu'une surface cubique lisse contenant une droite contient en fait deux droites disjointes, puis on utilise ces deux droites disjointes pour montrer qu'elle est rationnelle.

Proposition 4.5. *Soit S une surface cubique lisse dans $\mathbb{P}^3$. On suppose qu'elle contient une droite L. Alors elle contient deux droites disjointes L' et L''.*

Preuve. Quitte à changer de coordonnées, on peut supposer que L est définie par les équations $x_2 = x_3 = 0$. Si $\varphi = 0$ est une équation cubique homogène définissant S, l'hypothèse que S contient L signifie que le polynôme φ est de la forme:

$$\varphi(X_0, X_1, X_2, X_3) = AX_0^2 + BX_0X_1 + CX_1^2 + DX_0 + EX_1 + F,$$

avec $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{C}[X_2, X_3]$ homogènes de degrés respectifs 1, 1, 1, 2, 2 et 3.

Intéressons-nous maintenant à un plan Π contenant la droite L. Un tel plan est donné par une équation de la forme:

$$\lambda x_2 + \mu x_3 = 0,$$

avec λ, μ non tous deux nuls. Supposons que $\mu \neq 0$. On peut alors même supposer que $\mu = 1$. L'intersection $S \cap \Pi$ est du coup donnée par les équations:

$$\begin{cases} x_3 = -\lambda x_2, \\ x_2(a(\lambda)x_0^2 + b(\lambda)x_0x_1 + c(\lambda)x_1^2 + d(\lambda)x_0x_2 + e(\lambda)x_1x_2 + f(\lambda)x_2^2) = 0, \end{cases}$$

avec $a(\lambda) = A(1, -\lambda), \ldots, f(\lambda) = F(1, -\lambda)$. La conique d'équation

$$a(\lambda)x_0^2 + b(\lambda)x_0x_1 + c(\lambda)x_1^2 + d(\lambda)x_0x_2 + e(\lambda)x_1x_2 + f(\lambda)x_2^2 = 0$$

est dégénérée si, et seulement si:

$$\Delta(\lambda) := \begin{vmatrix} a(\lambda) & b(\lambda)/2 & d(\lambda)/2 \\ b(\lambda)/2 & c(\lambda) & e(\lambda)/2 \\ d(\lambda)/2 & e(\lambda)/2 & f(\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant le même raisonnement dans le cas $\lambda \neq 0$, on voit que $S \cap \Pi$ est la réunion de la droite L et d'une conique Q, qui est dégénérée si, et seulement si, $\Delta(\mu, -\lambda) = 0$, avec:

$$\Delta(X_2, X_3) := \begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} = 0.$$

On remarque que Δ est soit le polynôme nul, soit un polynôme homogène en X_2 et X_3 de degré 5. Montrons que Δ n'a pas de racines multiples dans $\mathbb{P}^1$, de sorte que Δ a exactement 5 racines distinctes dans $\mathbb{P}^1$.

Pour ce faire, on fixe une racine $(\mu_0 : -\lambda_0) \in \mathbb{P}^1$. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que $(\mu_0 = -\lambda_0) = (0 : 1)$, de sorte que X_2 divise Δ. L'intersection $\Pi \cap S$ est alors décrite par l'équation $\varphi(x_0, x_1, 0, x_3) = 0$, où $\varphi(X_0, X_1, 0, X_3)$ se factorise comme produit de 3 polynômes homogènes de degré 1. Si deux de ces polynômes s'obtiennent l'un de l'autre par multiplication par une constante, alors il existe un polynôme $\varphi_0 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_3]$ homogène de degré 1, un polynôme $\psi \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_3]$ homogène de degré 1 et un polynôme $\varphi_1 \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$ homogène de degré 2 tels que:

$$\varphi = \varphi_0^2\psi + X_2\varphi_1.$$

Du coup, S est singulière en tout point où les polynômes X_2, φ_0 et φ_1 s'annulent simultanément. Mais un tel point existe toujours: absurde!

On déduit que $\Pi \cap S$ est la réunion de 3 droites distinctes, qui doivent s'intersecter deux à deux par le lemme 4.3. Deux cas se présentent:

- Les trois droites ne sont pas concourantes. Dans ce cas, on peut effectuer un changement de coordonnées pour que les trois droites soient définies par les équations $X_0 = 0$, $X_1 = 0$ et $X_3 = 0$. Le polynôme φ s'écrit donc:

  $$\varphi = \lambda X_0 X_1 X_3 + X_2 \varphi_1,$$

  avec $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Cela implique que X_2 divise A, C, D, E et F et que le point $P = (0 : 0 : 0 : 1)$ appartient à S. La non-singularité de S en P signifie que le coefficient de $X_2 X_3^2$ dans φ est non nul. En particulier, X_2^2 ne divise pas F, et donc X_2^2 ne divise pas Δ non plus.

- Les trois droites sont concourantes. Dans ce cas, on peut effectuer un changement de coordonnées pour que les trois droites soient définies par les équations $X_0 = 0$, $X_3 = 0$ et $X_0 - X_3 = 0$. Le polynôme φ s'écrit donc:

  $$\varphi = \lambda X_0 X_3 (X_0 - X_3) + X_2 \varphi_1.$$

  On déduit que X_2 divise B, C, E et F mais pas D. De plus, le point $P = (0 : 1 : 0 : 0)$ appartient à S et la non-singularité de S en P implique que $C = cX_2$ avec $c \neq 0$. On déduit que X_2^2 ne divise pas Δ.

Dans tous les cas, on a prouvé que X_2^2 ne divise pas Δ, ce qui signifie que Δ est homogène de degré 5 et a exactement 5 racines distinctes dans $\mathbb{P}^1$.

Il existe donc 5 plans distincts $\Pi_1, \ldots, \Pi_5$ tels que, pour chaque i, l'intersection $\Pi_i \cap S$ est la réunion de la droite L et d'une conique dégénérée. On peut donc choisir des droites L' et L'' différentes de L contenues respectivement dans $\Pi_1 \cap S$ et dans $\Pi_2 \cap S$. Comme les droites L, L' et L'' ne sont pas coplanaires, L' et L'' ne peuvent pas s'intersecter. $\square$

Afin de montrer la rationalité des surfaces cubiques contenant deux droites disjointes, le lemme clé est le suivant:

Lemme 4.6. *Soient L_1 et L_2 deux droites disjointes dans $\mathbb{P}^3$. Pour chaque point $p \in \mathbb{P}^3 \setminus (L_1 \cup L_2)$, il existe une unique droite L_p de $\mathbb{P}^3$ passant par p et intersectant L_1 et L_2. De plus, l'application:*

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{P}^3 \setminus (L_1 \cup L_2) &\to L_1 \times L_2 \\ p &\mapsto (L_p \cap L_1, L_p \cap L_2) \end{aligned}$$

est algébrique.

Preuve. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que L_1 est la droite d'équation $x_0 = x_1 = 0$ et que la droite L_2 est celle d'équation $x_2 = x_3 = 0$. On écrit $p = (p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$. Soit maintenant L une droite intersectant L_1 et L_2. Cela signifie qu'elle peut être paramétrisée via:

$$s(a_0 : a_1 : 0 : 0) + t(0 : 0 : a_2 : a_3)$$

pour certains $(a_0 : a_1)$ et $(a_2 : a_3)$ dans $\mathbb{P}^1$. Le point p appartient à L si, et seulement si, $(a_0 : a_1) = (p_0 : p_1)$ et $(a_2 : a_3) = (p_2 : p_3)$. Il existe donc bien une unique droite L_p de $\mathbb{P}^3$ passant par p et intersectant L_1 et L_2. L'application θ est bien algébrique puisqu'elle s'écrit en coordonées homogènes:

$$(p_0 : p_1 : p_2 : p_3) \mapsto ((p_0 : p_1), (p_2 : p_3)).$$

□

Nous sommes finalement prêts à démontrer le théorème 4.2.

Preuve. Soient L_1 et L_2 deux droites disjointes dans S. Soit p un point dans $\mathbb{P}^3 \setminus (L_1 \cup L_2)$. D'après le lemme 4.6, il existe une unique droite L_p qui passe par p et qui intersecte L_1 et L_2, et l'application

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{P}^3 \setminus (L_1 \cup L_2) &\to L_1 \times L_2 \\ p &\mapsto (L_p \cap L_1, L_p \cap L_2) \end{aligned}$$

est algébrique. On considère la restriction:

$$\begin{aligned} f := \theta|_{S \setminus (L_1 \cup L_2)} : S \setminus (L_1 \cup L_2) &\to L_1 \times L_2 \\ p &\mapsto (L_p \cap L_1, L_p \cap L_2). \end{aligned}$$

Réciproquement, considérons deux points q_1 et q_2 de L_1 et L_2 respectivement, ainsi que la droite L_{q_1,q_2} passant par q_1 et q_2, et supposons que L_{q_1,q_2} n'est tangente à S ni en q_1 ni en q_2. La droite L_{q_1,q_2} peut être décrite par $\{sq_1 + tq_2 : s, t \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}\}$. L'intersection $L_{q_1,q_2} \cap S$ est alors décrite par:

$$\{sq_1 + tq_2 : \varphi(sq_1 + tq_2) = 0\},$$

où φ est un polynôme cubique définissant S. Le polynôme $\varphi(Sq_1 + Tq_2)$ est homogène de degré 3, il admet donc trois racines $(s : t)$ dans $\mathbb{P}^1$ comptées avec multiplicité. Deux d'entre elles doivent être $(1 : 0)$ et $(0 : 1)$, et comme L_{q_1,q_2} n'est tangente à S ni en q_1 ni en q_2, ces racines sont simples. On déduit que $\varphi(Sq_1 + Tq_2)$ admet une troisième racine dans $\mathbb{P}^1$, et donc que L_{q_1,q_2} intersecte $S \setminus (L_1 \cup L_2)$ en un unique point. On peut alors définir $g(q_1, q_2) := (S \setminus (L_1 \cup L_2)) \cap L_{q_1,q_2}$. Les relations coefficients-racines pour le polynôme $\varphi(Sq_1 + Tq_2)$ montrent que les coordonnées de $g(q_1, q_2)$ s'expriment en fonction des coordonnées de q_1 et q_2 via des fractions rationnelles. Autrement dit, g est une fonction algébrique.
Ainsi, f et g induisent des bijections réciproques et algébriques entre $S \setminus (L_1 \cup L_2)$ et l'ensemble Σ des couples $(q_1, q_2) \in L_1 \times L_2$ tels que la droite L_{q_1,q_2} n'est tangente à S ni en q_1 ni en q_2. Reste à vérifier que $\Lambda := (L_1 \times L_2) \setminus \Sigma$ est une partie algébrique stricte de $L_1 \times L_2$. Mais cela vient de l'égalité:

$$(L_1 \times L_2) \setminus \Sigma = \{(q_1, q_2) : q_2 \in T_{q_1}(S)\} \cup \{(q_1, q_2) : q_1 \in T_{q_2}(S)\}.$$

En effet, les conditions $q_1 \in T_{q_2}(S)$ et $q_2 \in T_{q_1}(S)$ sont algébriques. De plus, si l'on suppose que $\Lambda = L_1 \times L_2$, alors il existe $q_2 \in L_2$ tel que $L_1 \cap T_{q_2}(S)$ a au moins deux éléments ou il existe $q_1 \in L_1$ tel que $L_2 \cap T_{q_1}(S)$ a au moins deux éléments. Supposons sans perte de généralité qu'il existe $q_2 \in L_2$ tel que $L_1 \cap T_{q_2}(S)$ a au moins deux éléments. Par le lemme 4.4, on déduit que L_1 est contenue dans $T_{q_2}(S)$. Or il en est de même de L_2. Donc, par le lemme 4.3, les droites L_1 et L_2 doivent s'intersecter: absurde! On déduit que $\Lambda \neq L_1 \times L_2$. □

Corollaire 4.7. *La surface cubique de Fermat:*

$$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

est rationnelle.

Preuve. Elle contient la droite suivante:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

□

Remarque 4.8. En fait, on peut montrer que toute surface cubique lisse contient une droite. Ce résultat est non trivial et trop long pour être présenté ici, mais il peut être démontré via des techniques élémentaires (voir le chapitre 7 du livre *Undergraduate Algebraic Geometry* de Miles Reid). Ce résultat, combiné au théorème 4.2, montre que toute surface cubique lisse est rationnelle.

Remarque 4.9. Encore mieux que dans la remarque précédente, on peut montrer que toute surface cubique lisse contient exactement 27 droites. La figure suivante montre les 27 droites sur la surface de Clebsch, d'équation $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3$.

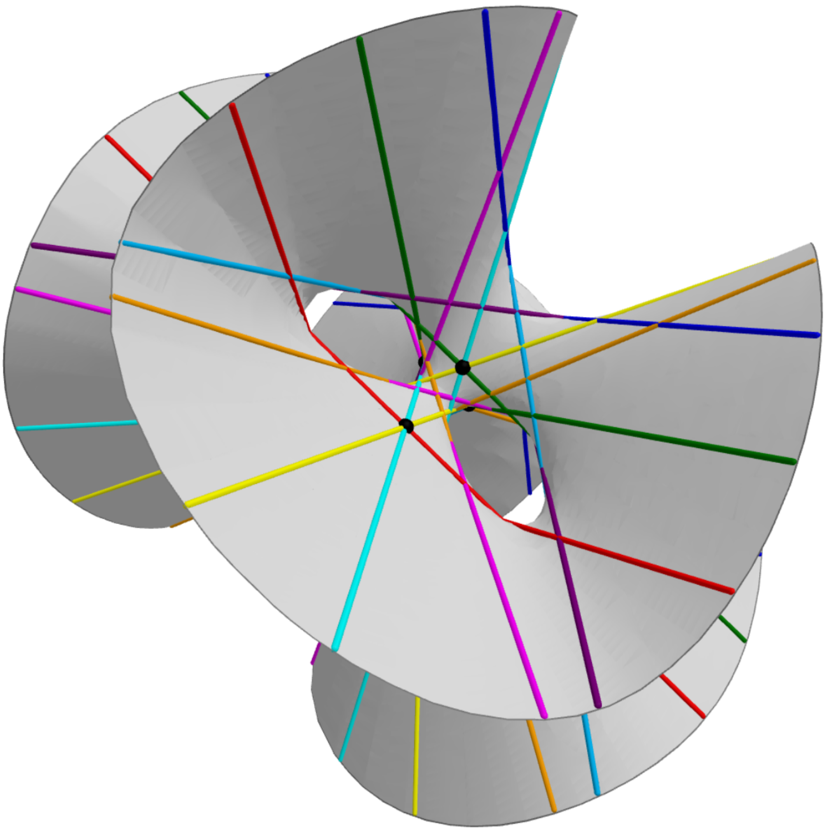

Image extraite de Wikipedia:
`https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Clebsch_diagonal_cubic_surface.png`