DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

DIRECTION DES ÉTUDES

2024-2025

Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05 | 01 44 32 31 72 | education@dma.ens.fr

Le département de mathématiques et applications (DMA) offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure (DENS) ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiant·e·s par an), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec Sorbonne Université, l'Université Paris Cité, l'Université Paris-Dauphine – PSL, l'Université de Paris-Saclay, et l'Université Sorbonne Paris-Nord, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Direction des études du DMA : Djalil Chafaï et Cyril Houdayer
| Secrétariat pédagogique : Yue Teng

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05
01 44 32 31 72 - education@dma.ens.fr
https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION

OBJECTIFS

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématicien·ne·s pur·e·s et appliqué·e·s, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie, …). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

DEBOUCHES

À la sortie de la formation, l'étudiant·e peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il est également possible de prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- Enseignant·e-chercheur·euse à l'université ;
- Chercheur·euse en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- Enseignant·e en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Écoles d'ingénieurs, formations spécialisées…) ;
- Ingénieur·e mathématicien·ne dans l'industrie.

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ÉNS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.

Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

Candidature 2024-2025

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiant·e·s ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent.

Toutes les informations se trouvent sur les sites suivants :

- Site enseignement des mathématiques : https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement
- Site de l'ÉNS : https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours

Le diplome de l'ENS majeure mathematiques

Les normalien·ne·s reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu que les conditions suivantes soient satisfaites :

- L'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- La validation des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- La validation de 72 ECTS en plus des 180 ECTS de la L3 et du Master :
  - Au moins 24 ECTS de cours mathématiques[1]
  - Au moins 24 ECTS dans un ou plusieurs autres départements dont 12 ECTS de cours **scientifiques** non-mathématiques
  - Au moins 24 ECTS libres dont ceux des expériences et des cours de langue
  - Au moins 2 expériences d'ouverture
  - La formation sur les grands enjeux
- La validation d'un cours de langue par année d'inscription au DENS

[1] Les règles du cursus au DMA exigent bien plus que cet attendu minimal de 24 ECTS.

Mineures et doubles majeures du DENS

- Mineures du DENS

Promotion à partir de 2023 :

Un candidat ayant obtenu un minimum de 30 ECTS dans une discipline littéraire ou scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Promotions antérieures à 2023 :

Un candidat ayant obtenu un minimum de 24 ECTS dans une discipline scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire en sciences (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Un candidat ayant obtenu un minimum de 48 ECTS dans une discipline littéraire pourra obtenir une spécialité secondaire en lettres sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

- Doubles majeures du DENS

Les doubles majeures du DENS sont délivrées à titre exceptionnel sous les conditions suivantes :

- Un cursus complet dans une discipline (au sein d'un département de l'ENS)
- Au moins deux années complètes dans la seconde discipline (L3-M1, M1-M2 ou L3-M2 équivalent à 120 ECTS)
- Accord des deux départements

Inscription a l'universite

Après leur admission, les normalien·ne·s s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de ces études, il est en particulier nécessaire d'obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- Pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;

- Pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;

- A l'issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiant·e·s qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un·e directeur·ice de recherche ainsi que des divers·es encadrant·e·s de l'université d'inscription (délégué·e aux thèses, directeur·ice de l'école doctorale de rattachement, directeur·ice du laboratoire d'accueil).

TUTORAT

L'encadrement des étudiant·e·s en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un·e tuteur·ice, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, est affecté·e à chaque étudiant. Choisi·e aléatoirement en première année, le choix sera fait, pour les autres années, en fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année.

Le rôle des tuteur·ice·s est d'aider l'étudiant·e à l'organisation de sa scolarité, de le·a conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études est mis au point par les étudiant·e·s, les tuteur·ice·s et le directeur des études du DMA, signé par ces parties et transmis à la directrice des études sciences de l'ENS. Ce programme régule les conditions de validations de l'année d'étude correspondante. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement les tuteur·ice·s.

STAGE

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant·e à un environnement différent.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiant·e·s pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec les tuteur·ice·s et les directeurs des études du DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrant·e·s potentiel·le·s pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Les étudiant·e·s sont supposé·e·s contacter les encadrant·e·s étranger·e·s proposé·e·s non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Ce stage reste optionnel, et n'est pas obligatoire, bien qu'il aide à remplir la condition d'expérience à l'étranger pour le DENS. Il est possible de le substituer par une plus courte expérience, mais qui ne sera pas forcément rétribuée en crédits ECTS.

Un rapport de stage de 20 pages sera à rendre avant une soutenance de 15 minutes, qui a traditionnellement lieu à la rentrée suivante. Les consignes données par le passé sont les suivantes :

- Brève description de l'expérience à l'étranger
- Fonctionnement du lieu de stage
- Au moins 15 pages de description de vos activités mathématiques, recherches…
- Vous pouvez utiliser du matériel de prépublication, ou rédiger un court mémoire sur les problématiques étudiées pendant le stage

SEMINAIRE « DES MATHEMATIQUES »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois, avant le thé du département de mathématiques, et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches en mathématiques.

PLANNING

Attention, ces dates sont susceptibles de modification, consulter l'agenda en ligne.

Réunion de présentation des cours de première année
Jeudi 12 septembre 2024 à 13h, amphithéâtre Galois

Réunion de présentation des cours de deuxième année
Vendredi 6 septembre 2024 à 14h, salle Cartan

Commission des études – Seconde session 2023-2024
Vendredi 20 septembre 2024 à 15h, salle R3

Premier semestre :

Pré-rentrée thématique « Analyse Harmonique » et « Combinatoire et surfaces »
Matinées du lundi 2 au vendredi 6 septembre 2024

Début des cours
Première année : lundi 16 septembre 2024
Deuxième année : lundi 9 septembre 2024

Vacances

Vacances de la Toussaint : du samedi 26 octobre au dimanche 3 novembre 2024
Vacances de Noël : du samedi 21 décembre 2024 au dimanche 5 janvier 2025

Fin des cours
Vendredi 17 janvier 2025

Examens du premier semestre
Du lundi 20 janvier au vendredi 24 janvier 2025

Réunion de présentation du second semestre
Mercredi 15 janvier 2025 à 13h30, salle Cartan

Deuxième semestre :

Début des cours
Mardi 3 février 2025

Vacances
Vacances d'hiver : du samedi 22 février au dimanche 2 mars 2025
Vacances de printemps : du samedi 19 avril au dimanche 27 avril 2025

Fin des cours
Vendredi 23 mai 2025

Examens du second semestre
Du lundi 2 juin au vendredi 6 juin 2025

Exposés de mathématiques de première année
Du mardi 10 juin au vendredi 13 juin 2025

Commissions des études 2024-2025
1ère session (première et deuxième années) : vendredi 20 juin 2025
2ère session (première et deuxième années) : vendredi 19 septembre 2025

ENSEIGNEMENT

ORGANISATION DE LA FORMATION

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec les tuteur·ice·s, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrant·e·s du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiant·e·s et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur·ice et des directeurs des études pour tous les choix concernant leur programme d'études.

▪ FILIERE MATHEMATIQUES

Première année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en troisième année de licence (L3), mais suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en deuxième année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiant·e·s dont l'avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l'étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L'inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l'élève. Avec le·a tuteur·ice, l'élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiant·e·s composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

▪ FILIERES PLURIDISCIPLINAIRES

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l'ENS. Organisées conjointement entre le département de mathématiques et les départements de physique, d'informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiant·e·s motivé·e·s de poursuivre une double formation ;
- aux étudiant·e·s encore indécis·e·s de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. Ils sont inscrits au département de mathématiques. En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Enseignant-e-s chercheur-euse-s référent-e-s : Cristina Toninelli (CNRS/PSL) et Amir-Kian Kashani Poor (ENS)

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d'informatique. Les élèves entré·e·s par le concours Info s'inscrivent au département d'informatique, les élèves entré·e·s par le concours MPI au département de mathématiques. Les tuteur·ice·s proviennent de leur département d'inscription. En deuxième année, il est possible de s'orienter soit vers les mathématiques soit vers l'informatique, et de rejoindre le département de son choix.

Enseignant chercheur référent : Marc Lelarge (INRIA)

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheur·euse·s capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Enseignant chercheur référent : Amaury Lambert (IBENS)

Objectifs du cursus

Les étudiant·e·s issu·e·s de la filière mathématiques/biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Il y aura été appris à décortiquer la littérature spécialisée, à suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et à initier dialogues et collaborations avec les biologistes dans leurs laboratoires.

Les deux années de cursus permettent aux élèves concerné·e·s de continuer, suivant leur parcours :

- un M2 de mathématiques de la modélisation,
- un M2 de mathématiques pour la biologie,
- un M1/M2 IMaLiS, parcours Ecologie/Evolution, parcours Neurosciences ou parcours Biologie fondamentale pour la Santé.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s’inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de sciences cognitives. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tou·te·s les étudiant·e·s du département de mathématiques ; l’inscription à ces cours n’engage donc pas les étudiant·e·s concerné·e·s à l’exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

REGLES D'OBTENTION

| *Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone.* |

- PREMIERE ANNEE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

Commun pour toutes les filières	4 cours de niveau licence : [1] ○ Algèbre 1 ○ Analyse complexe ○ Intégration et probabilités ○ Topologie et calcul différentiel	12 ECTS x 4 = 48 ECTS
Filière Mathématique	Mémoire et exposé de 1ère année	12 ECTS
Filière Math/Physique	Cours spécifiques du cursus mixte ○ Grande dimension	
Filière Math/Informatique	Cours spécifique du cursus mixte) ○ Initiation à la cryptologie	
Filière Math/Biologie	Mémoire et exposé d'interface math-biologie	
Total		60 ECTS

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental.

L’obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s’il ne compte pas pour la L3) parmi :
  - Algèbre 2
  - Analyse complexe
  - Analyse fonctionnelle
  - Géométrie différentielle
  - Logique
  - Optimisation et transport optimal

- Un groupe de lecture parmi :
  - Arbres, marches et graphes aléatoires, Igor Kortchemski CNRS
  - Des équations différentielles à la géométrie, la correspondance de Riemann-Hilbert, Thomas Serafini SU
  - Graphes expanseurs, Julien Marché SU
  - Introduction à la modélisation mathématique, Corentin Gentil ENS

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d’un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.

| *Il est conseillé de valider un minimum de 6 ECTS en première année et 12 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filières pluridisciplinaires

<u>Mathématiques/Physique</u>

Les élèves s’inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l’obtention de la L3 de physique :

- Des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  - Physique statistique des systèmes en équilibre (9 ECTS, 1er semestre)
  - Introduction à la mécanique quantique (9 ECTS, 1er semestre)

Relativité et électromagnétisme (9 ECTS, 2ème semestre)
Hydrodynamique (9 ECTS, 2ème semestre)
Physique du solide (9 ECTS, 2ème semestre)

- Le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheur·euse·s des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Informatique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- Des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

Semestre 1 :

Algorithmique et programmation (9 ECTS)
Systèmes numériques (9 ECTS)
Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

Semestre 2 :

Apprentissage statistique (9 ECTS)
Systèmes et réseaux (9 ECTS)
Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
Initiation à la cryptologie (**Obligatoire**, 12 ECTS)
Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
Bases de données (9 ECTS)
Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- Le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique.

Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un·e chercheur·euse et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Biologie

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours d'optimisation et transport optimal (2ème semestre).
- Le cours de M1 d'Analyse fonctionnelle (2ème semestre, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2ème année).
- Cours de biologie pour non biologistes :
  Introduction aux Sciences du Vivant (1er semestre, 3 ECTS)
  Biologie moléculaire de la cellule (2ème semestre, 3 ECTS)
  Groupe de lecture en biologie : Mathématiques pour la biologie (2ème semestre, 6 ECTS).
- Deux cours parmi les suivants au 1er semestre :
  Ecologie & Biodiversité (6 ECTS)
  Neurosciences (6 ECTS)
  Biologie Moléculaire et Génétique (6 ECTS)
- Deux cours parmi les suivants au 2ème semestre :
  Biologie cellulaire (6 ECTS)
  Développement (6 ECTS)
  Biologie évolutive (6 ECTS)
- Une école d'été ou un stage en biologie ou en neuroscience.

- DEUXIEME ANNEE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : ○ Algèbre 2 ○ Analyse complexe (1) ○ Analyse fonctionnelle (2) ○ Géométrie différentielle (2) ○ Logique (2) ○ Processus stochastiques (3) ○ Optimisation et transport optimal (2)	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : ○ Analyse des équations aux dérivées partielles ○ Mathématiques des données ○ Spectre des surfaces hyperboliques aléatoires (4) ○ Statistique (2) ○ Systèmes dynamiques ○ Topologie algébrique (2)	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours accessible dès la 1ère année
(3) Cours recommandé pour la filière maths/biologie
(4) Cours au Collège de France du 6 novembre 2024 au 22 janvier 2025.

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)
- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  Analyse rugueuse (probabilité et analyse)

  La régularité elliptique et parabolique (analyse des ÉDP)

  Théorie géométrique des invariants

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail des cours avancés.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du DENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1e année pour les élèves inscrit·e·s directement en 2e année
- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.
- Le DMA propose à nouveau un cours spécial au S2, ne donnant pas lieu à des ECTS, à suivre par pur curiosité et plaisir ! La thématique cette année est celle de la théorie de Yang-Mills plane. Ce cours est proposé par Thibaut Lemoine (Collège de France).

  | *Il est conseillé de valider un minimum de 6 ECTS en première année et 12 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière mathématiques/biologie

- Les détails sont à vérifier auprès du responsable de filière M. Amaury Lambert (amaury.lambert@ens.psl.eu).

Troisieme annee

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)

- La composition du *mémoire de Diplôme*
- Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Introduction au domaine de recherche (IDR),* présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).

- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - Cours de M2 des universités partenaires
  - Dynamique des équations des ondes semi-linéaires, Thomas Duyckaerts
  - Systèmes de particules en interaction, Cristina Toninelli
  - Dimension reduction and manifold learning, Eddie Aamari

- Un groupe de travail auto-organisé *(facultatif).*

- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif).*

  | *Remarque : une expérience à l'étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

Cours de l'annee scolaire 2024-2025

Premiere annee

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 : théorie des groupes (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	A. Mézard SU N. Marquis ENS
• Probas 1 : intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	N. Enriquez UPS B. Laslier UPC
• Analyse 1 : topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	J. Guillod SU C. Gentil ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Arbres, marches et graphes aléatoires	I. Kortchemski CNRS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Des équations différentielles à la géométrie, la correspondance de Riemann-Hilbert	T. Serafini SU
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Graphes expanseurs	J. Marché SU
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Introduction à la modélisation mathématique	C. Gentil ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	 S. Rideau-Kikushi CNRS/ENS P. Wang ENS

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) (Cours de licence - 70h : 42h cours + 28h TD)	F. Charles UPS T. Serafini SU
• Analyse 2 : analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	M. Fathi UPC G. Gomez ENS

• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	E. Giroux CNRS/ENS E. Di Nezza SU
• Optimisation et transport optimal (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Mérigot UPS S. Perrin-Roussel ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Topologie algébrique (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	M. Livernet PC C. Emprin ENS
• *Cours spécifique cursus Info/Maths :* Initiation à la cryptologie (12 ECTS) (48h cours + 24hTD)	D. Pointcheval ENS B. Minaud INRIA P. Nguyen INRIA
• *Cours spécifique cursus Maths/Physique :* Grande dimension (12 ECTS) (42h de cours + 28h de TD)	G. Biroli ENS & D. Chafaï PSL L. Rey ENS
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :* Mathématiques pour la biologie (6 ECTS)	A. Véber CNRS PC

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un·e encadrant·e appartenant le plus souvent au département de mathématiques et applications de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.

Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;
- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiant·e·s réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.

Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Exemples de cours scientifiques non mathématiques

- Physique - http://www.phys.ens.fr/
  - Introduction à la mécanique quantique
  - Physique statistique des systèmes en équilibre
  - Relativité et électromagnétisme
  - Hydrodynamique
  - Physique du solide

- Informatique - http://diplome.di.ens.fr/
    - Langages formels, calculabilité et complexité
    - Algorithmique
    - Langages de programmation et compilation
    - Systèmes numériques
    - Système d'exploitation
    - Lambda calcul et logique informatique
    - Théorie de l'information et codage
    - Initiation à la cryptologie
    - Sémantique et application à la vérification de programmes
    - Bases de données
- Biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/
    - Biologie cellulaire
    - Biologie Moléculaire et Génétique
    - Introduction aux sciences du vivant
    - Introduction to Ecology
    - Neurosciences
- Etudes cognitives - http://cognition.ens.fr
    - Introduction to Cognitive Neuroscience
    - Computational Neuroscience
- Economie - http://www.economie.ens.psl.eu/
    - Economie pour scientifiques
    - Introduction aux théories de la croissance économique
    - Introduction à l'économétrie

- DEUXIEME ANNEE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 : théorie de Galois (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	V. Mehmeti SU C. Chivet ENS
• Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h :42h cours + 28h TD)	S. Rideau-Kikuchi CNRS/ENS P. Wang ENS
• Probas 2 : processus stochastiques (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	D. Chafaï PSL A. Metz-Donnadieu ENS
• Analyse des équations aux dérivées partielles (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	I. Gallagher UPC L.-P. Chaintron ENS
• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	G. Peyré CNRS/ENS V. Castin ENS
• Statistique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	E. Aamari CNRS/ENS O. Rameh ENS
• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	C. Houdayer UPS L. Benedetto ENS

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	M. Fathi UPC G. Gomez ENS
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	E. Giroux CNRS/ENS E. Di Nezza SU
• Optimisation et transport optimal (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Mérigot UPS S. Perrin-Roussel ENS
• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	L. Livernet PC C. Emprin ENS

Cours avancés, deuxième semestre

• Cours avancé : Analyse rugueuse (trajectoires rugueuses et extensions) P. Gassiat PSL
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : La régularité elliptique et parabolique C. Imbert CNRS
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Théorie géométrique des invariants J. Marché SU
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 7 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Groupes de travail, premier semestre

- Autour du modèle d'Ising L. Rey PSL
- Congruence Ciseaux J. Marché SU
- Entropie : entre physique statistique, probabilités et EDPs L.-P. Chaintron ENS
- Fatou, Julia, et les fondements de la dynamique holomorphe N. Tholozan CNRS
- Géométrie spectrale et ergodicité quantique L. Benedetto ENS
- Le polymère dirigé en milieu aléatoire B. Laslier UPC
- Limites locales de cartes planaires et empilement de cercles A. Metz-Donnadieu ENS
- Théorie cinétique et théorème de Lanford F. Fougères ENS
- Théorie spectrale pour la mécanique quantique S. Perrin-Roussel ENS

Cours non mathématiques

Exemples de cours scientifiques non mathématiques disponibles dans la partie présentation des cours de la première année.

- TROISIEME ANNEE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

L'auto-organisation de groupes de travail est vivement recommandée. Elle peut être encadrée, si besoin, par un·e enseignant·e du DMA.

Deuxième semestre :

Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS (9 ECTS, 24h cours). Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription pour les conditions pédagogiques.

- Dynamique des équations des ondes semi-linéaires — T. Duyckaerts USPN
- Systèmes de particules en interaction — C. Toninelli CNRS/PSL
- Dimension reduction and manifold learning — E. Aamari PSL

ENSEIGNEMENTS HORS DEPARTEMENT

Le DMA offre également un ensemble de cours de mathématiques dans d'autres départements de l'ENS.

- Mathématiques pour littéraires — F. Fougères ENS
- Statistique pour économistes — M. Malvy ENS
- Mathématiques pour économistes — O. Rameh ENS
- Probabilités discrètes pour physicien·ne·s — C. Toninelli CNRS/PSL

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2024-2025

| ***Algèbre 1*** **(L3 S1) |**
(Ariane Mézard et Nataniel Marquis)

Ce cours d'algèbre est une introduction à la théorie des groupes et des modules.

Programme provisoire :

I. Ensembles quotients
- Partitions, fibres et relations d'équivalences, passage au quotient
- Sections, axiome du choix et représentants
- Lemme de Zorn

II. Généralités sur les groupes
- Exemples de groupes
- Morphismes et isomorphismes
- Groupes cycliques
- Théorème de Lagrange
- Groupe multiplicatif d'un corps et (Z/nZ)^*
- Groupes quotients

- Compléments : Groupes usuels, quaternions de Hamilton

III. Groupes abéliens de type fini
- Caractères et y^2=x^3+1 sur Z/pZ
- Décomposition de Fourier finie
- Structure des groupes abéliens finis
- Réseaux et groupes de type finis
- Complément : Courbes elliptiques

IV. Le groupe symétrique et son dévissage
- Actions de groupes
- Groupes symétriques et alternés, les cas $n \leq 5$
- Le langage des suites exactes
- Le dévissage de S_n
- Produits semi-directs
- Compléments : Groupe de Galois d'un polynôme, petits groupes, le théorème de Jordan-Hölder

V. Groupes et symétries
- Sous-groupes finis de O(2) et SO(3)
- Quaternions et géométrie euclidienne en dimensions 3 et 4
- Groupes linéaires et simplicité de PSL_n(k)
- Le groupe PGL_2(k) et quelques (iso)morphismes miraculeux
- Compléments : Polytopes réguliers, le groupe affine et un théorème de Galois, frises et papiers peints

VI. Éléments de structure des groupes finis
- p-groupes
- Théorèmes de Sylow
- Théorème de Schur-Zassenhaus, théorème de Hall
- Extensions et cohomologie
- Compléments : Groupes nilpotents finis

VII. Arithmétique des anneaux
- Anneaux Z[√d]
- Anneaux factoriels, idéaux et anneaux principaux

- L'anneau Z[i] et sommes de deux carrés
- Une équation diophantienne
- Complément : Anneaux quotients

VIII. Modules sur les anneaux principaux

- Modules sur un anneau
- Équivalence des matrices sur un anneau principal
- Modules de type fini sur un anneau principal

IX. Représentations linéaires des groupes finis

- Représentations et modules sur l'algèbre du groupe
- Décomposition en irréductibles
- Théorie des caractères, exemples de tables de caractères
- Retour sur le déterminant d'un groupe
- Propriétés d'intégralité des caractères
- Compléments : Des théorèmes de Burnside et P. Hall, décomposition de L^2(G)

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Algèbre 2* (M1 S1) |

(Vlerë Mehmeti et Clément Chivet)

Le but de ce cours est d'introduire les bases de l'algèbre commutative, dont les objets principaux sont rencontrés dans de nombreux domaines mathématiques. Le cours se concentrera sur la théorie des extensions de corps et des propriétés des anneaux commutatifs. Les thèmes abordés seront :

- Extensions de corps (en commençant par quelques rappels de base sur les anneaux)
- Théorie de Galois et applications
- Anneaux commutatifs

  - modules, produit tensoriel, localisations
  - anneaux factoriels, euclidiens, principaux
  - Nullstellensatz et normalisation de Noether
  - anneaux de valuations, dimension de Krull
  - spectre d'un anneau et quelques propriétés géométriques

Bibliographie :

- Introduction to Commutative Algebra, M.F. Atiyah, I.G. MacDonald
- Algèbre 2 (ENS 2012-2013), O. Debarre
- A course in Galois Theory, D. Garling
- Algebra, S. Lang
- Commutative Algebra (Volumes I et II), O. Zariski, P. Samuel

▪▪▪▪▪

| *Analyse complexe* **(L3/M1 S2)** |
(François Charles et Thomas Serafini)

L'analyse complexe étudie les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globalement. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globalement, leur étude nécessite la mise en œuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Nous concluons par quelques exemples d'applications à des domaines variés.

La théorie de Cauchy donne les premières propriétés des fonctions analytiques complexes et révèle l'importance de la topologie des ensembles de définition de ces fonctions. Après avoir démontré l'analycité des fonctions holomorphes, nous donnons les premières propriétés (Théorème de l'application ouverte, Lemme de Schwarz) et les grands théorèmes (Théorème de Runge, Théorème de Weierstrass, Théorème de Riemann, Théorème de Picard...). L'étude des singularités conduit à la notion de fonctions méromorphes avec de nombreuses applications au calcul d'intégrales via la théorie des résidus et aux problèmes d'approximation (méthode du col). Nous concluons par plusieurs incursions en théorie des nombres : études des fonctions elliptiques et modulaires et des séries de Dirichlet.

▪▪▪▪▪

| *Analyse fonctionnelle* **(M1 S2)** |

(Max Fathi et Gaspard Gomez)

Dans ce cours, on étudiera les bases de l'analyse fonctionnelle abstraite et les principaux espaces de fonctions utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Le cours commencera par l'analyse abstraite des espaces vectoriels topologiques (localement convexes) et de leurs topologies classiques, avec une attention particulière pour les topologies faibles sur les espaces de Banach. Nous verrons les théorèmes classiques d'analyse linéaire (Hahn-Banach, Banach-Alaoglu...), quelques sous-cadres classiques (espaces réflexifs, espaces uniformément convexes), ainsi que la topologie des espaces de mesures et des applications en probabilités.

Nous aborderons ensuite la théorie des distributions, ainsi que la transformée de Fourier, qui sera illustrée par des applications aux EDP et en traitement du signal.

Enfin, nous aborderons les espaces de Sobolev, leurs propriétés (injections de Sobolev notamment), et leur utilisation pour l'étude d'EDP elliptiques.

Si le temps le permet, on consacrera les dernières heures de cours à la dualité convexe.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse des Equations aux Dérivées Partielles* (M1 S1) |

(Isabelle Gallagher et Louis-Pierre Chaintron)

Le but du cours est de présenter quelques méthodes classiques de résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Après une introduction aux outils (analyse fonctionnelle et harmonique) nécessaires à leur étude, nous présenterons quelques EDP linéaires importantes (transport, ondes, chaleur, Schrödinger) et les analyserons en variant les approches (méthode des caractéristiques, solutions faibles, solutions fortes). Nous nous orienterons ensuite vers l'étude d'EDP non linéaires, en nous appuyant principalement sur les équations de la mécanique des fluides (Euler et de Navier-Stokes).

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Analyse rugueuse (trajectoires rugueuses et extensions)* **(M1 S2)** |
(Paul Gassiat)

On désigne sous le nom d'analyse rugueuse un ensemble de méthodes analytiques, développées dans les deux dernières décennies, qui permettent de traiter les fonctions à faible régularité qui apparaissent naturellement quand on considère des objets stochastiques continus. L'étape cruciale est typiquement d'identifier un espace métrique naturel sur lequel l'application "bruit-vers-solution" est continue.

Ces méthodes offrent d'une part un point de vue nouveau (et souvent plus naturel et robuste) sur des objets classiques (comme les EDS définies par le calcul d'Itô), et d'autre part permettent de considérer des objets qui étaient jusqu'alors hors de portée (comme des EDO conduites par des mouvements Browniens fractionnaires, ou des EDP stochastiques singulières).

Le but de ce cours sera de présenter ces différentes techniques, en se concentrant principalement sur le cas simple des EDO, c'est-à-dire de la théorie des trajectoires rugueuses de T. Lyons. Suivant le temps restant, nous pourrons ensuite considérer des extensions (structures de régularité pour EDPS singulières, couture stochastique et régularisation par le bruit d'EDO).

Aucun pré-requis d'analyse stochastique n'est requis (il suffira de connaître la définition du mouvement brownien).

Bibliographie :
Friz, P. K., & Hairer, M. (2020). A course on rough paths. Springer International Publishing.
(disponible au téléchargement https://www.hairer.org/Teaching.html)

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : EDP - régularité elliptique et parabolique* **(M1 S2)** |
(Cyril Imbert)

Le but de ce cours est de présenter des outils et des idées qui interviennent dans la résolution de problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires. Plus précisément, des outils et idées utiles à l'étude de la régularité des solutions de telles équations, qu'il s'agisse de leur continuité ou leur différentiabilité (au premier ordre ou à tout ordre). Voici deux exemples emblématiques : les équations de Navier-Stokes incompressibles (NSI) et l'équation de Landau. Dans le cas de NSI, le meilleur résultat de régularité est celui de Caffarelli, Kohn et Nirenberg (1982). Dans le second cas (Landau), il a été montré il y a moins d'un an que les solutions ne développent pas de singularité en temps fini (Guillen et Silvestre, 2023).

Suivant le nombre et l'intérêt des élèves inscrit.es, nous pourrons nous intéresser à quelques sujets parmi les suivants :
- Théorie de Schauder
- Inégalité de Harnack
- Théorie de Krylov et Safonov
- Théorie de De Giorgi, Nash et Moser

Les exposés viendront prolonger des notions introduites ou des résultats démontrés lors des séances de cours.

Bibliographie :

- Elliptic partial differential equations
  Han, Qing; Lin, Fanghua
  Courant Lect. Notes Math., 1
  Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, x+147 pp.
  ISBN: 978-0-8218-5313-9

- Fully nonlinear elliptic equations
  Caffarelli, Luis A.; Cabré, Xavier
  Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 43
  American Mathematical Society, Providence, RI, 1995, vi+104 pp.
  ISBN: 0-8218-0437-5

▪▪▪▪▪

| *Cours avancé : Théorie géométrique des invariants* **(M1 S2)** |
(Julien Marché)

À travers des exemples issus de la géométrie projective classique, ce cours développera la théorie des quotients en géométrie algébrique. On construira de nombreux espaces de modules que l'on étudiera avec le critère de Hilbert-Mumford: grassmaniennes, formes binaires, courbes planes de degré fixé, etc.

Bibliographie :

- An introduction to invariants and moduli, S. Mukai
- Lectures on invariant theory, I. Dolgachev
- Introduction to actions of algebraic groups, M. Brion
- Linear algebraic groups, J. Humphreys

▪▪▪▪▪

| *Cours de mathématiques pour les littéraires* **(PT)** |
(Florent Fougères)

Ce cours est un véritable cours de mathématiques, adapté à des élèves partant sans bagage mathématique spécifique. Il est destiné à chaque élève littéraire souhaitant expérimenter concrètement ce que sont les mathématiques, dans leur logique propre et leur cadre formel particulier, et comment s'y confronter pour qu'elles deviennent un outil naturel. Il est donc idéal pour les personnes qui veulent découvrir un nouveau point de vue complémentaire sur le monde ! On essaiera ainsi de dégager des notions mathématiques pouvant apporter un éclairage différent sur la vie du quotidien, le fonctionnement de l'univers ou les prédictions scientifiques, en établissant des liens avec d'autres disciplines et points de vue.

La présentation des notions sera donc adaptée au public convié, sans vulgarisation néanmoins : peu de notions seront abordées mais elles seront pleinement traitées. Les séances alterneront entre cours et exercices, comme cela se fait généralement en mathématiques, la pratique personnelle et l'habitude permettant une bonne assimilation des notions et une aisance à la fois essentielle et profondément satisfaisante !

Le cours aura lieu au second semestre, les mercredis de 17h à 19h en salle Bourbaki (Bâtiment Rataud, Étage -2).

Les thèmes traités seront les suivants :

- Logique mathématique : Dans un premier temps, on commencera par donner un cadre logique formel à nos raisonnements, qui servira de langage de base pour le dialogue mathématique. On exposera alors de premières applications à ce formalisme à travers l'étude des ensembles infinis, qui nous consuira à la notion de fonction, véritable pierre angulaire des mathématiques.

- Suites et limites : Nous étudierons comment se résout naturellement le paradoxe de Zénon après introduction des bonnes notions mathématiques : les suites numériques et leurs limites. Autrement dit, nous verrons comment donner un sens à la convergence d'une succession de phénomènes vers une certaine limite et nous aborderons de nombreuses applications de ces théories à d'autres domaines des sciences.

- Étude de fonctions : Les fonctions et leur étude sont l'outil mathématique le plus utilisé dans toutes les sciences et pour toute entreprise de compréhension quantitative du monde. On donnera donc les instruments nécessaires pour mettre en équations ce qui nous entoure, et leur application fondamentale à la prédiction de phénomènes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours de statistique pour économistes* **(PT)** |
(Martin Malvy)

Nous nous appliquerons dans ce cours à construire et étudier rigoureusement l'univers probabiliste afin de formaliser dans un second temps les principaux outils des Statistiques. Le cours s'adresse aux étudiants dont le bagage mathématique est semblable à celui de la filière B/L, et leur permettra de suivre les enseignements nécessitant des prérequis dans ces domaines. Nous nous intéresserons notamment à la définition de l'univers probabiliste au travers de la théorie de la mesure, aux variables aléatoires et à leur loi, aux grands résultats de convergence (Loi des Grands Nombres, Théorème Central Limite), aux concepts fondamentaux de Statistique (estimateurs, intervalles de confiance, méthode des moments), aux tests d'hypothèse, vecteurs gaussiens, test du khi deux, information de Fisher…

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécial : Construction et étude asymptotique de la mesure de Yang-Mills en deux dimensions* **(L3 S2)** |
(Thibaut Lemoine)

La théorie de Yang-Mills est une théorie de jauge non abélienne développée dans les années 50 par les physiciens C. N. Yang et R. Mills. La théorie quantique des champs associée permet de décrire trois des quatre interactions fondamentales et sous-tend le modèle standard de la physique des particules. Bien qu'une formalisation mathématique complète de cette théorie reste un problème ouvert en quatre dimensions, un modèle probabiliste sur un espace-temps à deux dimensions a été construit rigoureusement à la fin des années 90 par Driver, Sengupta et Lévy, appelé champ d'holonomie de Yang-Mills. Dans ce cours, nous étudierons la loi de ce champ d'holonomie, appelée mesure de Yang-Mills, sur une surface fermée orientable. Après avoir construit explicitement cette mesure, nous nous pencherons sur le comportement de sa fonction de partition lorsque le groupe en question est le groupe U(N), en faisant tendre N vers l'infini.

Ce mini-cours sera l'occasion d'introduire et combiner des sujets variés : topologie en basse dimension, géométrie des fibrés principaux, partitions aléatoires, fonctions thêta de Jacobi, matrices aléatoires, représentations des groupes de Lie. Les seuls prérequis sont de bonnes notions d'analyse fonctionnelle et de probabilités ; une familiarité avec la géométrie différentielle est souhaitable mais tous les rappels nécessaires seront donnés.

Ce cours ne fait pas l'objet d'une évaluation et ne procure pas d'ECTS.

Bibliographie :

- Dahlqvist, Antoine; Lemoine, Thibaut. Large N limit of Yang-Mills partition function and Wilson loops on compact surfaces. Probab. Math. Phys. 4 (2023), no. 4, 849–890.
- Faraut, Jacques. Analysis on Lie groups. An introduction. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 110. Cambridge University Press, Cambridge (2008)
- Lemoine, Thibaut. Large N behaviour of the two-dimensional Yang-Mills partition function. Combin. Probab. Comput. 31 (2022)
- Lévy, Thierry. Two-dimensional Markovian holonomy fields. Astérisque No. 329, (2010)

- Lévy, Thierry; Sengupta, Ambar. Four chapters on low-dimensional gauge theories. Stochastic geometric mechanics, 115–167, Springer Proc. Math. Stat., 202, Springer, Cham (2017)
- Lévy, Thierry. Two-dimensional quantum Yang-Mills theory and the Makeenko-Migdal equations. Frontiers in analysis and probability, 275–325, Springer, Cham, (2020)
- Sengupta, Ambar. Gauge theory in two dimensions: topological, geometric and probabilistic aspects. Stochastic analysis in mathematical physics, 109–129, Worlds Sci. Publ., Hackensack, NJ (2008)

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Biologie : Groupe de lecture – Mathématiques pour la biologie* **(L3 S2)** |
(Amandine Véber)

Le but est de discuter à travers des présentations d'articles des questions biologiques auxquelles la modélisation peut contribuer et différents outils mathématiques que l'on peut utiliser dans ce but. 3 thèmes différents seront abordés, chacun sur 4 séances.

Les présentations des étudiants seront supervisées par des chercheurs en mathématiques et en biologie, spécialistes de ces domaines.

La validation se fait par la présentation d'au moins 2 exposés en groupe, la rédaction de 3 comptes-rendus (un pour chaque thème abordé en 4 séances) et une participation raisonnable en classe.

Le groupe de lecture aura lieu le jeudi de 14h à 16h, en salle 305 au département de biologie, 46 Rue d'Ulm.

Pré-requis : Aucun. Avoir suivi le module « Introduction aux sciences du vivant » au premier semestre est bien sûr un plus pour la compréhension des questions biologiques, mais n'est pas indispensable.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Initiation à la cryptologie* **(L3 S2)** |
(David Pointcheval, Phuong Nguyen et Brice Minaud)

Ce cours s'adresse aux étudiants ayant un goût pour l'algorithmique, à la fois dans ses aspects mathématiques et dans ses aspects pratiques. Son but est d'enseigner la problématique de la cryptologie, et les principaux outils utilisés par la cryptologie pour proposer des solutions aux problèmes de sécurité. Il sert d'introduction et de préparation aux cours de cryptologie proposés au MPRI.

Ce cours commence par les notions de base de cryptographie symétrique (chiffrement par blocs et par flot, fonctions de hachage, et cryptanalyse) et asymétrique (RSA, Diffie-Hellman et ElGamal), puis présente de façon informelle plusieurs techniques plus avancées :

- Preuves zero-knowledge
- Cryptographie distribuée
- Cryptographie à base de couplages sur courbes elliptiques
- Cryptographie à base de réseaux euclidiens (cryptographie post-quantique)
- La Blockchain et bitcoin

Prérequis : Ce cours fera essentiellement appel aux notions de classes de complexité, de machine de Turing et de problèmes NP. Un minimum de connaissances en algèbre et en probabilité sera aussi requis. Enfin les outils algorithmiques de base devront être maîtrisés. Certains TDs conduiront à de la programmation en langage C ou Python.

Lien du cours : https://diplome.di.ens.fr/catalog_fr.html#INFO-L3-MPRI113-S2

▪▪▪▪▪

| *Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Grande dimension* **(L3 S2)** |
(Giulio Biroli, Djalil Chafaï et Lucas Rey)

Ce cours est centré autour de phénomènes de grande dimension de nature probabiliste. Il s'agit au départ du comportement des vecteurs, matrices, et tenseurs aléatoires en grande dimension, à commencer par les théorèmes limites pour les variables indépendantes. Les notions théoriques et les méthodes introduites seront illustrées à l'aide d'exemples issus de la physique statistique, des sciences des données et de l'apprentissage automatique (machine learning).

Ce cours est donné à la fois par un physicien théoricien (Giulio Biroli) et par un mathématicien probabiliste (Djalil Chafaï). La dernière séance est donnée par Jean-Philippe Bouchaud, physicien théoricien et membre de l'Académie des sciences.

Prérequis : intégration et probabilités, physique statistique.

Plan du cours :

- Loi des grands nombres, théorème de la limite centrale, Monte-Carlo
- Phénomène de concentration de la mesure
- Principe de grandes déviations de Cramér
- Principe de grandes déviations de Sanov
- Phénomène d'universalité des sommes et lois stables
- Phénomène d'universalité des extrêmes et lois max-stables
- Matrices aléatoires : théorème de Wigner
- Matrices aléatoires : théorème de Marchenko-Pastur
- Limite thermodynamique et transitions de phase
- Des équations déterministes de Newton à l'équation stochastique de Langevin
- Equilibration et thermalisation en physique statistique
- Transition BBP des matrices aléatoires : un exemple de transition de phase en science des données
- La malédiction de la grande dimension en apprentissage automatique (machine learning)
- La bénédiction de la grande dimension en apprentissage automatique
- Exposé de mise en perspective : Grandeur et misère des théorèmes en modélisation (pas de TD cette semaine)

■ ■ ■ ■ ■

| *Dimension reduction and manifold learning* **(M2 S1)** |
(Eddie Aamari)

Modern machine learning typically deals with high-dimensional data. The fields concerned are very varied and include genomics, image, text, time series, or even socioeconomic data where more and more unstructured features are routinely collected. As a counterpart of this tendency towards exhaustiveness, understanding these data raises challenges in terms of computational resources and human understandability. Manifold Learning refers to a family of methods aiming at reducing the dimension of data while preserving certain of its geometric and structural characteristics. It is widely used in machine learning and experimental science to compress, visualize and interpret high-dimensional data. This course will provide a global overview of the methodology of the field, while focusing on the mathematical aspects underlying the techniques used in practice.

Program:

- Manifold hypothesis and intrinsic dimension(s)
- Multidimensional scaling
- Linear dimension reduction (random projections, principal component analysis)
- Non-linear spectral methods (kernel PCA, ISOMAP, MVU, Laplacian eigenmaps)
- Ad-hoc distance-preserving methods (diffusion maps, LLE)
- Probabilistic dimension reduction and clustering (SNE, UMAP)
- Neural network-based dimensionality reduction

Bibliography:

- Ghojogh, B., M. Crowley, F. Karray, and A. Ghodsi (2023). Elements of dimensionality reduction and manifold learning
- Lee, J. A., M. Verleysen, et al. (2007). Nonlinear dimensionality reduction

Horaires :

Le cours se tiendra les mercredis matin de 9h à 12h15 sur 8 semaines à Paris Santé Campus. Les dates s'étalent du 02/10 (inclus) au 20/11 (inclus) : 02/10, 09/10, 16/10, 04/11, 06/11, 13/11, 18/11, 20/11

■ ■ ■ ■ ■

| *Dynamique des équations des ondes semi-linéaires* **(M2 S2)** |
(Thomas Duyckaerts)

Le but de ce cours est de présenter des développements récents sur la dynamique des équations des ondes non-linéaires. Dans la première partie du cours, je présenterai quelques propriétés classiques des équations des ondes linéaires (cf [3, Chapitre 5]) : représentation des solutions, vitesse finie de propagation, comportement asymptotique, dispersion et inégalités de Strichartz ([7], [5]), ainsi qu'un outil de concentration-compacité, la décomposition en profils [1].

La deuxième partie du cours concernera les équations d'ondes semi-linéaires proprement dites. Après une présentation des propriétés de base de ces équations (cf e.g. [5], [6]) : existence locale et unicité des solutions, lois de conservation, transformations), je donnerai plusieurs exemples de dynamiques : solutions asymptotiquement linéaires (scattering), comportement auto-similaire et ondes solitaires.

J'esquisserai enfin la preuve de la résolution en ondes solitaires pour l'équation des ondes critique [2], [4]. Les prérequis du cours sont les bases d'analyse réelle classique et d'analyse harmonique (transformation de Fourier). Ce cours s'inscrit dans la continuité des cours fondamentaux "Introduction aux équations aux dérivées partielles non-linéaires" et "Introduction aux équations aux dérivées partielles d'évolution", mais peut être suivi indépendamment de ces deux cours.

Horaires :
Lundi de 13h30 à 15h30 ; mercredi de 15h15 à 17h15.

Bibliographie :

[1] Bahouri, H., and Gérard, P. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. Amer. J. Math. 121, 1 (1999), 131–175.
[2] Duyckaerts, T., Kenig, C., and Merle, F. Classification of radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation. Camb. J. Math. 1, 1 (2013), 75–144.
[3] Folland, G. B. Introduction to partial differential equations., 2nd ed. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.
[4] Kenig, C. E. Lectures on the energy critical nonlinear wave equation, vol. 122 of CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2015.

[5] Sogge, C. D. Lectures on nonlinear wave equations. Monographs in Analysis, II. International Press, Boston, MA, 1995.
[6] Strauss, W. A. Nonlinear wave equations, vol. 73 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.
[7] Tao, T. Nonlinear dispersive equations, vol. 106 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2006. Local and global analysis.

■ ■ ■ ■ ■

| *Géométrie différentielle* **(M1 S2)** |

(Emmanuel Giroux et Eleonora Di Nezza)

Variétés différentielles : Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes

Formes différentielles

Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle

Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces

Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie :

- J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
- J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013. Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
- J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
- M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Arbres, marches et graphes aléatoires* **(L3 S1)** |
(Igor Kortchemski)

Les graphes aléatoires sont un sujet fascinant à l'intersection des probabilités, de la combinatoire et de la physique statistique, avec de nombreuses applications. En effet, les graphes aléatoires jouent un rôle essentiel dans l'étude des réseaux du monde réel. Ce groupe de lecture étudiera d'abord les arbres aléatoires de Bienaymé-Galton-Watson (qui décrivent la généalogie d'une population se reproduisant de manière asexuée) en utilisant leur codage par des marches aléatoires. Ensuite, on s'intéressera aux graphes d'Erdős–Rényi, obtenus à partir d'un nombre fixés de sommets et en ajoutant indépendamment chaque arête possible avec une certaine probabilité.

Il n'y a pas de prérequis particuliers : les outils mathématiques vus au niveau bac+1/bac+2 suffisent.

L'objectif principal est d'apprendre à communiquer et à présenter les mathématiques oralement. L'objectif secondaire est d'étudier un sujet en profondeur en binôme et le structurer de manière appropriée pour un exposé.

Bibliographie (disponible en ligne) :

- Kortchemski, Arbres et marches aléatoires,

  https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/enseignement/XUPS/xups16-01.pdf

- N. Curien, A random Walk among random Graphs,
  https://www.dropbox.com/scl/fi/xgb6yed67rzwynauuuagy/cours-GA-online.pdf?rlkey=e10jhac0y9s49ly331il4ydjq&dl=0

- S. Roch, Modern Discrete Probability,

  https://people.math.wisc.edu/~roch/mdp/roch-mdp-full.pdf

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de lecture : Des équations différentielles à la géométrie, la correspondance de Riemann-Hilbert* **(L3 S1)** |
(Thomas Serafini)

Le but de ce groupe de lecture sera d'appréhender les outils nécessaires à la compréhension de la correspondance de Riemann-Hilbert sur la sphère de Riemann P^1(C), qui énonce une équivalence entre une classe d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients dans C(z) et les représentations du groupe fondamental de P^1 privé des points singuliers de l'équation.

Notre première étape sera la correspondance de Riemann-Hilbert locale, qui traite le cas autour d'une singularité. On ira ensuite vers une compréhension de la correspondance globale, le tout en suivant essentiellement le livre de Jacques Sauloy. Si on a le temps, on détaillera particulièrement le cas de l'équation hypergéométrique et on s'intéressera à la géométrie cachée derrière certaines équations différentielles.

Sur le chemin, on rencontrera et étudiera des objets d'analyse complexe, de topologie algébrique et de géométrie analytique et algébrique.

Bibliographie :
Differential Galois Theory through Riemann-Hilbert Correspondance - An elementary introduction, de Jacques Sauloy.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Graphes expanseurs* **(L3 S1)** |

(Julien Marché)

Les graphes expanseurs sont des familles de graphes finis (mais arbitrairement grands), possédant des propriétés de connectivité exceptionnelles. Un exemple explicite est fourni par le graphe de Cayley du groupe fini SL_2(F_p). On essaiera de comprendre pourquoi, ce qui nécessitera des arguments de théorie des nombres, groupes algébriques et arithmétiques et théorie des représentations.

Bibliographie:

- Elementary Number theory, Group theory and Ramanujan graphs, Davidoff, Sarnak, Valette
- An introduction to expander graphs, E. Kowalski
- Discrete groups, Expanding graphs and Invariant measures, A. Lubotzky

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Introduction à la modélisation mathématique* (L3 S1) |
(Corentin Gentil)

Ce groupe de lecture aura comme objectifs d'une part de découvrir des modèles simples, et d'autre part de découvrir des outils théoriques qui permettent de les étudier. Différents modèles directement en lien avec des questions scientifiques actuelles seront étudiés (propagation d'une épidémie, trafic routier, propagation d'opinions sur des réseaux sociaux, courants océaniques, etc.).

Ce groupe de lecture sera plutôt tourné vers l'analyse, avec une composante dominante d'équations différentielles ordinaires et d'équations aux dérivées partielles, mais nous explorerons d'autres méthodes de modélisation, qui font par exemple intervenir les graphes.

Selon le goût des élèves, nous pourrons éventuellement consacrer une ou deux séances aux simulations numériques pour voir comment implémenter un modèle avec un langage de programmation comme Python.

Bibliographie :

Cours "Modélisation mathématique" de Bertrand Maury

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Autour du modèle d'Ising* **(M1 S1)** |
(Lucas Rey)

Le modèle d'Ising est un modèle probabiliste issu de la physique statistique décrivant l'interaction de spins disposés aux sommets d'un graphe, le plus souvent Z^d. Depuis son introduction en 1925, ce modèle a suscité un grand nombre de travaux en mathématiques et physique statistique, notamment car il permet de modéliser le phénomène de transition de phase et présente des comportements différents et riches dans les différentes phases. C'est un champ de recherche encore très actif (cf la médaille fields de Hugo Duminil-Copin en 2022), et la description précise de ces différentes phases pose encore de nombreux problèmes ouverts.
Dans ce groupe de travail, nous travaillerons dans un premier temps sur le formalisme mathématique qui permet de définir rigoureusement les mesures de Gibbs en volume infini. Nous étudierons ensuite des aspects variés du modèle, parmi : le calcul exact de l'énergie libre en passant par le modèle de dimères, le cristal de Wulff, la simulation informatique.

Ce groupe de travail ne nécessite comme prérequis que le cours d'Intégration et Probabilités de L3, mais il serait bénéfique de suivre en parallèle le cours de Processus stochastiques de M1.

Bibliographie :

- Le modèle d'Ising, Yvan Velenik (2009), notes de cours
- Statistical mechanics of lattice systems: a concrete mathematical introduction, Sasha Friedli et Yvan Velenik

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Congruence Ciseaux* **(M1 S1)** |

(Julien Marché)

Le 3ème problème de Hilbert demande si étant donnés deux polyèdres dans R^3, on peut découper l'un en un nombre fini de morceaux polyédraux pour reconstituer l'autre. La réponse complète est un théorème de Sydler qui utilise des techniques de cohomologie des groupes. On explorera ce thème en variant les géométries (euclidienne, sphérique et hyperbolique), ce qui nous connectera à des questions de K-théorie algébrique.

Bibliographie:

- Scissors congruences, group homology and characteristic classes, J. Dupont.
- Notes on scissors congruences, D. Calegari

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Entropie - entre physique statistique, probabilités et EDPs* **(M1 S1)** |
(Louis Pierre Chaintron)

La notion d'entropie est omniprésente, en physique statistique ou en théorie de l'information, en thermochimie, dans l'étude des équations de transport ou de diffusion, dans la théorie probabiliste des grandes déviations... Introduite par Clausius au dix-neuvième siècle dans l'étude des machines thermiques, cette notion a pris un essor considérable avec les travaux fondateurs de Boltzmann en mécanique statistique, puis de Shannon en théorie du signal.

Ce GT proposera une démarche illustratrice, suivant les notes de cours de L.C. Evans (librement accessibles en ligne : https://math.berkeley.edu/~evans/entropy.and.PDE.pdf). Après une introduction présentant différentes axiomatisations rigoureuses de la thermodynamique, nous verrons comment l'entropie s'étend à la mécanique des milieux continus et facilite l'étude mathématique de certaines familles d'EDPs : les lois de conservation et les équations de Hamilton-Jacobi. Ce sera l'occasion d'introduire des résultats classiques de régularité parabolique, de solutions entropiques et de solutions de viscosité. Nous ferons ensuite un retour sur les définitions de l'entropie suivant Boltzmann et Gibbs en physique statistique, puis Shannon en théorie de l'information, ainsi qu'une présentation de l'équation de Boltzmann et du théorème H. Ces définitions seront illustrées par un résultat rigoureux de limite hydrodynamique pour une version simplifiée de l'équation de Boltzmann d'une part, et par quelques résultats classiques en théorie des grandes déviations d'autre part.

Dans le temps qu'il restera, nous nous tournerons vers une vision plus probabiliste de l'entropie autour du problème du pont de Schrödinger, en s'inspirant des notes de M. Nutz (https://www.math.columbia.edu/~mnutz/docs/EOT_lecture_notes.pdf).

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Fatou, Julia, et les fondements de la dynamique holomorphe* **(M1 S1) |**
(Nicolas Tholozan)

En 1918, Fatou et Julia, en conpétition pour le grand prix de l'Académie des sciences, établissent les fondements de la dynamique holomorphe, un domaine encore très actif de nos jours.

Le but de ce groupe de travail sera de découvrir ce domaine par la lecture des mémoires fondateurs de ces deux auteurs. Ce sera aussi l'occasion de porter un regard historique et critique sur ces travaux, dont le style et la rigueur "pré-bourbakiste" peuvent surprendre le mathématicien et la mathématicienne contemporaine.

Ce groupe de travail ne nécessite comme prérequis que le cours d'Intégration et Probabilités de L3, mais il serait bénéfique de suivre en parallèle le cours de Processus stochastiques de M1.

Bibliographie :

- Michèle Audin, Fatou, Julia, Montel : le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après..., Springer Paris, 2009
- Pierre Fatou, « Sur les équations fonctionnelles », Bull. Soc. Math. Fr., vol. 47, 1919, p. 161-271
- Gaston Julia, « Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles », J. Math. Pures Appl., vol. 8, 1918, p. 47-245

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Géométrie spectrale et ergodicité quantique* **(M1 S1)** |
(Lino Benedetto)

Introduite au début du XXème siècle, la mécanique quantique décrit les propriétés d'un système physique à partir du spectre et des fonctions propres d'opérateurs qui le décrivent.

Il est cependant naturel de se demander dans quel mesure la mécanique classique est une approximation de la mécanique quantique : ceci est observable dans l'approximation des hautes fréquences ou encore dans la limite où la constante de Planck tend vers zéro.

Historiquement les systèmes classiques complétement intégrables se sont le mieux prêtés à cette analyse, tandis que les systèmes chaotiques ont davantage résisté aux mathématiciens.

Ce groupe de travail propose ainsi une introduction à la géométrie spectrale, c'est-à-dire l'étude des liens entre géométrie d'un objet et spectre d'opérateurs, en se concentrant sur le chaos quantique. En particulier nous présenterons des outils de la géométrie symplectique, des systèmes dynamiques et de l'analyse semi-classique. L'objectif sera de démontrer le théorème de Schnirelman portant sur la délocalisation de la plupart des fonctions propres associées à un système hamiltonien ergodique.

Ce groupe de travail pourra servir d'introduction aux cours de Nalini Anantharaman au collège de France, traitant de nombreux problèmes ouverts autour de ces questions.

Référence :

- Maciej Zworski, « Semi-classical analysis »
- Steve Zelditch, « Eigenfunctions of the Laplacian on a riemannian manifold »

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Le polymère dirigé en milieu aléatoire* **(M1 S1)** |
(Benoît Laslier)

La modélisation mathématique de systèmes physiques a largement aidé à la compréhension de phénomènes tels que les transitions de phases et l'apparition d'équation au dérivées partielles pour décrire la limite des fluides. Cependant, par nature, les modèles associés décrivent une réalité idéalisée et simplifiée. Il est donc naturel de s'interroger sur la robustesse de ces modèles et on peut distinguer en un sens deux sortes d'erreurs à étudier. D'une part que deviennent nos résultats si (notamment à cause des simplifications nécessaires à l'étude mathématiques) les détails du modèle ne correspondent pas exactement à la réalité, c'est la question de l'universalité des limites d'échelles. Et d'autre part, que se passe t'il en présence d'impureté, de défauts dans une structure cristalline, ... C'est la question de la sensibilité au bruit.

Pour étudier cette question du bruit, nous allons nous concentrer sur un modèle de base très simple, le polymère dirigé qui n'est autre qu'un nom savant pour la marche aléatoire simple. Nous verrons que le bruit peut changer significativement le comportement du modèle mais pas toujours, c'est à dire que nous montrerons l'existence de transitions de phases crée par la présence de bruit. Nous verrons aussi apparaître des liens avec d'autres modèles, en particulier liés à la croissance de domaines du plan.

Référence :

Francis Comets, "Directed Polymers in random environments", École d'été de Probabilité de Saint-Four XLVI - 2016

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Limites locales de cartes planaires et empilement de cercles* **(M1 S1)** |
(Alexis Metz-Donnadieu)

Les modèles de triangulations planaires infinis sont des modèles de graphes aléatoires infinis plongés dans le plan dont toutes les faces sont des triangles. Ils apparaissent comme limite en loi de certains modèles naturels de graphes aléatoires finis lorsque l'on munit l'ensemble des graphes localement finis d'une topologie adéquate (dite topologie de la convergence locale). Un théorème de He et Schramm montre qu'il existe une façon naturelle de plonger ces graphes soit sur la sphère de Riemann soit sur le plan hyperbolique en les voyant comme graphe d'intersection d'un empilement de cercles. Ces plongements sont uniques à réflexions et automorphismes conformes près.

De façon remarquable, certaines caractéristiques géométriques de ce plongement sont reliées à des informations probabilistes sur notre modèle aléatoire. Par exemple, on peut relier le nombre de points d'accumulations de l'empilement au caractère récurent/transient d'une marche aléatoire sur le graphe. Dans un premier temps l'objectif de ce GT va être de définir la topologie de la convergence locale et d'introduire rigoureusement certains modèles de cartes planaires aléatoires infinies. Nous nous pencherons dans un second temps sur le lien avec la théorie des empilements de cercles.

On se référera en partie aux notes de lectures de Asaf Nachmias : « Planar Maps, Random Walks and Circle Packing » de l'école d'été de Saint-Flour 2018.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie cinétique et théorème de Lanford* **(M1 S1)** |

(Florent Fougères)

Ce groupe de travail a pour but d'éudier une classe particulière d'équations aux dérivées partielles de physique statistique, servant notamment de modèle intermédiaire entre les équations de Newton microscopiques et les équations macroscopiques de la mécanique des fluides. L'ensemble des techniques déployées dans l'étude de ces équations et des façons de les relier aux différentes échelles physiques est regroupé sous le nom de théorie cinétique, se basant sur des densités évoluant dans l'espace des phases espace-vitesse.

La plus célèbre de ces équations est l'équation de Boltzmann, laquelle est la première à avoir fait apparaître l'entropie comme quantité irréversible, ouvrant la porte à une myriade de nouvelles techniques en analyse et probabilités. La dérivation de cette équation mésoscopique à partir des équations microscopiques des gaz est connue sous le nom de théorème de Lanford, et constituera l'axe principal de ce groupe de travail.

Bibliographie :

- C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. The mathematical theory of dilute gases, 1994.
- Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier. From Newton to Boltzmann: hard spheres and short-range potentials, 2013.
- R. Glassey. The Cauchy problem in kinetic theory, 1996.
- C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics, 1, 2002.

| *Groupe de travail : Théorie spectrale pour la mécanique quantique* **(M1 S1)** |
(Solal Perrin-Roussel)

La théorie spectrale a été développée à partir des années 1920 pour proposer un cadre mathématique rigoureux à la physique quantique émergente. Nous étudierons dans ce groupe de travail les outils mathématiques de la théorie spectrale en les illustrant dans le cadre de la mécanique quantique. Nous verrons le modèle quantique de l'atome d'hydrogène, avant de se concentrer sur la théorie des opérateurs auto-adjoints. Le but est d'établir un "théorème spectral" pour poser les bases du calcul fonctionnel, et d'étudier le spectre des opérateurs auto-adjoints.

Le groupe de travail s'appuiera sur le livre « Théorie spectrale et mécanique quantique » de Mathieu Lewin.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Intégration et Probabilités* **(L3 S1)** |

(Nathanaël Enriquez et Benoît Laslier)

Nous présenterons dans un premier temps la théorie de Lebesgue qui propose une construction de l'intégrale plus souple, plus générale et mieux adaptée aux passages à la limite, que l'intégrale de Riemann.

Dans cette théorie, la notion de mesure et d'espace mesuré y joue un rôle central. Kolmogorov remarque en 1930, que ces notions peuvent être utilisées pour donner une bonne axiomatique de la théorie des probabilités.

Ainsi, les probabilités pourraient être formellement vues comme un appendice de la théorie de l'intégration, mais nous verrons dans la deuxième partie de ce cours, que cette discipline développe ses propres questions et ses propres intuitions, notamment avec la notion d'indépendance d'événements, et l'étude des suites de variables aléatoires indépendantes (ou pas...).

Les fameux théorèmes limites que sont la loi des grands nombres et le théorème central limite seront le point d'orgue du cours.

Programme :

A - Théorie de l'intégration

1 - Espace mesuré

2 - Intégration sur un espace mesuré : définition et théorèmes limites

3 - Le cas de R et la mesure de Lebesgue : cohérence avec l'intégrale de Riemann

4 - Mesure produit, Théorème de Fubini et Formule de changement de variables

B - Probabilités

1 - Axiomatique de Kolmogorov : espace probabilisé, variable aléatoire, espérance.

2 - Loi d'une variable/vecteur aléatoire, fonction de répartition, génératrice, caractéristique. Lois classiques.

3 - Indépendance : d'événements, de variables aléatoires, de tribu. Calculs de lois de vecteur aléatoire.

4 - Convergence de variables aléatoires : en loi, en probabilité, presque sûre, dans L^p.

5 - Théorèmes limites : la loi des grands nombres, le théorème central limite.

Bibliographie :

- Richard Durrett : "Probability, theory and examples"
- Jean-François Le Gall : "Measure theory, Probability, Stochastic processes"

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Logique* **(M1 S1)** |

(Silvain Rideau-Kikuchi et Paul Wang)

Née des questionnements du début du 20ème siècle sur les « fondements des mathématiques », la logique mathématique est encore relativement jeune à l'échelle des mathématiques. Et bien qu'elle fournisse en effet les outils d'analyse de ces fondements, elle a largement dépassé cette seule question, mise à mal par l'impossibilité de ce programme fondationnel, mise en avant par Gödel entre autres.

La logique s'intéresse aux liens entre les structures mathématiques en mettant l'accent sur les phénomènes de définissabilité (par des formules) : axiomatisation de certaines classes, définissabilité ou non de certains ensembles, interprétations de structures les unes dans les autres, complexité combinatoire et géométrique des ensembles définissables... Par sa nature transverse, la logique mathématique a trouvé des applications à de nombreux autres sujets mathématiques : de la combinatoire à la théorie des nombres en passant par la dynamique. Ses liens avec la théorie des ensembles sont une coïncidence historique ; mais comme elle permet d'en clarifier les indécidabilités, le semestre terminera sur un peu de combinatoire transfinie. Il doit pourtant être pris comme une invitation au point de vue modèle-théorique.

Programme provisoire :

- Logique élémentaire : dualité de Boole-Stone, sémantique du premier ordre, ultraproduits, complétude et compacité, espaces de types.
- Éléments de théorie des modèles : constructions de modèles, catégoricité, va et vient, élimination des quantificateurs.
- Phénomènes d'incomplétude : problèmes d'internalisation et théorèmes d'incomplétude.
- Théorie des ensembles : axiomatisation, ordinaux, cardinaux, modèles intérieurs classiques, axiome du choix, hypothèse du continu.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Mathématiques des données* **(M1 S1) |**
(Gabriel Peyré et Valérie Castin)

Ce cours passe en revue les méthodes mathématiques et numériques fondamentales en sciences des données. La première partie du cours couvre les bases de la représentation et du traitement des données, en particulier la théorie de

Shannon, le filtrage et les ondelettes. La deuxième partie présente l'optimisation convexe et non-convexe, dans la perspective de son utilisation en apprentissage automatique et en particulier pour les réseaux de neurones. Le cours est validé par un petit projet et un examen.

Références :

- Pour la théorie : https://mathematical-tours.github.io/book/
- Pour le numérique et les TPs : www.numerical-tours.com

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Mathématiques pour économistes* **(PT)|**
(Ons Rameh)

Le but de ce cours est de fournir aux étudiants les outils d’analyse nécessaires pour suivre des cours d’économie s’appuyant sur un formalisme mathématique. La première partie du cours visera à introduire les notions de topologie et d’algèbre linéaire nécessaires, tandis que la deuxième fournira les bases de calcul différentiel requises afin d’aborder l’optimisation sous contraintes et la convexité en dimension arbitraire.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Optimisation et transport optimal* **(M1 S2)** |
(Quentin Mérigot et Solal Perrin-Roussel)

L'objectif de ce cours est de fournir une introduction approfondie à l'optimisation convexe et au transport optimal. La première partie se concentrera sur la convexité en dimensions finie et infinie, abordant des propriétés classiques des ensembles et des fonctions convexes, telles que les points extrémaux, les cônes normaux, la différentiabilité et la sous-différentiabilité des fonctions convexes, etc. Cette partie se terminera par une introduction à la dualité en optimisation convexe et certaines de ses applications.

La deuxième partie du cours portera sur l'optimisation numérique. Nous explorerons d'abord des approches classiques telles que la descente de gradient et la méthode de Newton, avant de nous tourner vers quelques méthodes plus modernes adaptées aux problèmes de grande dimension.

Enfin, la troisième partie sera dédiée à la théorie du transport optimal. Nous introduirons les problèmes de Monge et de Kantorovich, ainsi que la dualité de Kantorovich et les théorèmes d'existence et d'unicité. Nous examinerons ensuite l'espace de Wasserstein, la notion de flot-gradient dans cet espace, la version "entropisée" du transport optimal, et enfin certaines applications pratiques du transport optimal.

Bibliographie :

- Classical and modern optimization, Guillaume Carlier, 2022
- Optimal Transport for Applied Mathematicians, Filippo Santambrogio, 2015

■ ■ ■ ■ ■

| *Probabilités discrètes pour physiciens* **(PT)** |
(Cristina Toninelli)

Abstract: This course will present the probabilistic model and the fundamental limit theorems for sums of independent real-valued random variables. The central object of the course is the heads or tails game or the symmetric random walk on the integers.

Résumé : Ce cours présentera le modèle probabiliste et les théorèmes limites fondamentaux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles. L'objet central du cours est le jeu de pile ou face ou la marche aléatoire symétrique sur les entiers.

■ ■ ■ ■ ■

| *Processus stochastiques* **(M1 S1)** |
(Djalil Chafaï et Alexis Metz-Donnadieu)

Ce cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques à temps et espace discrets, avec quelques excursions dans le cas continu :

- Révisions sur les convergences, théorèmes limites, et intégrabilité uniforme
- Vecteurs gaussiens
- Espérance conditionnelle
- Martingales à temps discret
- Chaînes de Markov à temps et espace discrets
- Processus de Poisson, et chaînes de Markov à temps continu et à espace discret
- Mouvement brownien
- Quelques modèles emblématiques issus de la physique, de la biologie, et de l'informatique.

Des notes de cours spécifiques seront disponibles sur Moodle.

Bibliographie :

- P. Barbe, M. Ledoux. Probabilité, 2007
- J.-F. Le Gall. Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, notes de cours, 2006
- J. R. Norris. Markov chains, 1997
- D. Williams. Probability with martingales, 1991

■ ■ ■ ■ ■

| *Spectre des surfaces hyperboliques aléatoires* **(M1 S1)** |
(Nalini Anantharaman et Thibaut Lemoine)

Ce cours destiné aux normaliens de 2A a lieu au Collège de France du 6 novembre 2024 au 22 janvier 2025.

Lien du cours : https://www.college-de-france.fr/fr/chaire/nalini-anantharaman-geometrie-spectrale-chaire-statutaire/events

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Statistique* **(M1 S1)** |

(Eddie Aamari et Ons Rameh)

La statistique s'intéresse aux méthodes permettant d'ajuster un modèle probabiliste aux observations issues d'un phénomène aléatoire. Une fois ajusté, ce modèle peut être utilisé pour expliquer (sciences expérimentales), déterminer des causes (santé), évaluer des risques (assurance, environnement), ou prédire (décision). Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

Menu :

- Modèles et expériences statistiques
- Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
- Régression linéaire : estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussien
- Méthodes d'estimation : méthode des moments, modèles exponentiels, maximum de vraisemblance, tests du chi-deux
- Outils bayésiens : risque bayésien, estimateur bayésien, optimalité minimax
- Grande dimension et données massives : parcimonie, descente de gradient
- Introduction à la statistique non-paramétrique : test de Kolmogorov-Smirnov, estimation de densité

Bibliographie :

- Benoît Cadre & Céline Vial (2012). Statistique mathématique, cours et exercices corrigés
- Didier Dacunha-Castelle & Marie Duflo (1986). Probability and statistics Vol II
- Aad van der Vaart (1998). Asymptotic statistics

▪▪▪▪▪

| *Systèmes de particules en interaction* **(M2 S2)** |
(Cristina Toninelli)

Ce cours est une introduction aux systèmes de particules en interaction (IPS), un domaine des probabilités très fécond et qui a des applications dans nombreuses disciplines. Les IPS ont été introduits dans les années 1960 pour étudier des modèles issus de la physique statistique. La classe de modèles a été vite agrandi pour étudier de phénomènes divers issus de la physique, de la biologie ou de sciences sociales : la transition ferromagnétique/paramagnétique, la croissance des cristaux, la diffusion d'infections, la dynamique d'opinions, les dynamiques vitreuses, … D'un point de vue mathématique il s'agit de processus de Markov à temps continue avec espace d'état infini et discret, typiquement $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. L'enjeu principal est celui de déterminer le comportement de temps longue, notamment caractériser les mesures invariantes, leur bassin d'attraction et les échelles de temps typiques.

Après avoir construit le processus on analysera en détail deux modèles : le modèle d'Ising stochastique et le processus de contact. Cela nous permettra d'introduire plusieurs outils classiques tels que les techniques de couplage, la dualité, les arguments de contour, et les inégalités de Poincaré.

Horaires :

Lundi de 10h30 à 12h30 ; vendredi de 9h à 11h.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Systèmes dynamiques* **(M1 S1) |**

(Cyril Houdayer et Lino Benedetto)

Dans ce cours, nous allons donner une introduction aux systèmes dynamiques topologiques et mesurés en illustrant la théorie par des exemples provenant de la théorie des groupes, de la géométrie, de la dynamique symbolique et des espaces homogènes et en présentant quelques applications à d'autres domaines.

Le cours sera composé de trois parties :

- Dynamique topologique : Récurrence, transitivité, mélange, unique ergodicité, entropie topologique, applications à la théorie de Ramsey.
- Dynamique mesurée : Ergodicité, mélange faible, théorèmes ergodiques, entropie mesurée et principe variationnel, exposant de Lyapunov de marches aléatoires dans SL_d(R)
- Dynamique homogène : Réseaux des groupes localement compacts, exemple de SL_d(Z) < SL_d(R), propriété de Howe-Moore pour SL_d(R), théorème d'ergodicité de Moore.

Des notes de cours (en anglais) seront disponibles sur la page web de l'enseignant.

▪▪▪▪▪

| *Topologie algébrique* **(M1 S2)** |
(Muriel Livernet et Coline Emprin)

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique. On associera aux espaces topologiques des invariants algébriques (groupe fondamental, groupes d'homologie, anneau de cohomologie, groupes d'homotopie supérieurs), et on donnera des applications de l'étude et du calcul de ces invariants à des problèmes de topologie.

1. **Groupe fondamental**
   Revêtements
   Théorème de Van Kampen
   CW-complexes

2. **Homologie singulière**
   Théorème de Hurewicz
   Homologie cellulaire
   Cohomologie et cup-produit

3. **Groupes d'homotopie supérieurs**
   Fibrations
   Théorème de Freudenthal

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Topologie et calcul différentiel* **(L3 S1)** |

(Julien Guillod et Corentin Gentil)

1. Topologie générale et espaces métriques :
   Espaces métriques et espaces topologiques.
   Complétude, compacité, connexité.
   Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2. Espaces de Banach :
   Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
   Théorème de Hahn-Banach.
   Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3. Calcul différentiel :
   Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
   Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4. Équations différentielles ordinaires :
   Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
   Lemme de Gronwall et estimations