DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

DIRECTION DES ÉTUDES

2025-2026

Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05 | 01 44 32 31 72 | education@dma.ens.fr

Le département de mathématiques et applications (DMA) offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure (DENS) ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiant·e·s par an), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec Sorbonne Université, l'Université Paris Cité, l'Université Paris-Dauphine – PSL, l'Université de Paris-Saclay, et l'Université Sorbonne Paris-Nord, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Direction des études du DMA : Djalil Chafaï et Jimmy Lamboley
| Secrétariat pédagogique : Yue Teng

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05
01 44 32 31 72 - education@dma.ens.fr
https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION

OBJECTIFS

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématicien·ne·s pur·e·s et appliqué·e·s, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie, …). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

DEBOUCHES

À la sortie de la formation, l'étudiant·e peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il est également possible de prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- Enseignant·e-chercheur·euse à l'université ;
- Chercheur·euse en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- Enseignant·e en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Écoles d'ingénieurs, formations spécialisées…) ;
- Ingénieur·e mathématicien·ne dans l'industrie.

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ÉNS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.

Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

Candidature 2025-2026

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiant·e·s ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent.

Toutes les informations se trouvent sur les sites suivants :

- Site enseignement des mathématiques : https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement
- Site de l'ÉNS : https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours

Le diplome de l'ENS majeure mathematiques

Les normalien·ne·s reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu que les conditions suivantes soient satisfaites :

- L'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- La validation des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- La validation de 72 ECTS en plus des 180 ECTS de la L3 et du Master :
  - Au moins 24 ECTS de cours mathématiques[1]
  - Au moins 24 ECTS dans un ou plusieurs autres départements
    dont 12 ECTS de cours **scientifiques** non-mathématiques
  - Au moins 24 ECTS libres dont ceux des expériences et des cours de langue
  - Au moins 2 expériences d'ouverture
  - La formation sur les grands enjeux
- La validation d'un cours de langue par année d'inscription au DENS

[1] Les règles du cursus au DMA exigent bien plus que cet attendu minimal de 24 ECTS.

MINEURES ET DOUBLES MAJEURES DU DENS

- Mineures du DENS

Promotion à partir de 2023 :
Un candidat ayant obtenu un minimum de 30 ECTS dans une discipline littéraire ou scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Promotions antérieures à 2023 :
Un candidat ayant obtenu un minimum de 24 ECTS dans une discipline scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire en sciences (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.
Un candidat ayant obtenu un minimum de 48 ECTS dans une discipline littéraire pourra obtenir une spécialité secondaire en lettres sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

- Doubles majeures du DENS

Les doubles majeures du DENS sont délivrées à titre exceptionnel sous les conditions suivantes :

- Un cursus complet dans une discipline (au sein d'un département de l'ENS)
- Au moins deux années complètes dans la seconde discipline (L3-M1, M1-M2 ou L3-M2 équivalent à 120 ECTS)
- Accord des deux départements

INSCRIPTION A L'UNIVERSITE

Après leur admission, les normalien·ne·s s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de ces études, il est en particulier nécessaire d'obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- Pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;

- Pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;

- A l’issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiant·e·s qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l’accord d’un·e directeur·ice de recherche ainsi que des divers·es encadrant·e·s de l’université d’inscription (délégué·e aux thèses, directeur·ice de l’école doctorale de rattachement, directeur·ice du laboratoire d’accueil).

Tutorat

L'encadrement des étudiant·e·s en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un·e tuteur·ice, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, est affecté·e à chaque étudiant. Choisi·e aléatoirement en première année, le choix sera fait, pour les autres années, en fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année.

Le rôle des tuteur·ice·s est d'aider l'étudiant·e à l'organisation de sa scolarité, de le·a conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études (inscription pédagogique, sur le portail Pegasus) est mis au point par les étudiant·e·s, les tuteur·ice·s et le directeur des études du DMA, validé en ligne par ces parties. Ce programme régule les conditions de validations de l’année d’étude correspondante. Il est vivement recommandé d’aller voir régulièrement les tuteur·ice·s.

Stage

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant·e à un environnement différent.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiant·e·s pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec les tuteur·ice·s et les directeurs des études du DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrant·e·s potentiel·le·s pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l’enseignement du département de mathématiques de l’ENS. Les étudiant·e·s sont supposé·e·s contacter les encadrant·e·s étranger·e·s proposé·e·s non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Ce stage reste optionnel, et n'est pas obligatoire, bien qu'il aide à remplir la condition d'expérience à l'étranger pour le DENS. Il est possible de le substituer par une plus courte expérience, mais qui ne sera pas forcément rétribuée en crédits ECTS.

Un rapport de stage de 20 pages sera à rendre avant une soutenance de 15 minutes, qui a traditionnellement lieu à la rentrée suivante. Les consignes données par le passé sont les suivantes :

- Brève description de l'expérience à l'étranger
- Fonctionnement du lieu de stage
- Au moins 15 pages de description de vos activités mathématiques, recherches…
- Vous pouvez utiliser du matériel de prépublication, ou rédiger un court mémoire sur les problématiques étudiées pendant le stage

SEMINAIRE « DES MATHEMATIQUES »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois, avant le thé du département de mathématiques, et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches en mathématiques.

PLANNING

Attention, ces dates sont susceptibles de modification, consulter l'agenda en ligne.

Réunion de présentation des cours de première année
Jeudi 11 septembre 2025 à 16h, amphithéâtre Galois

Réunion de présentation des cours de deuxième année
Vendredi 5 septembre 2025 à 14h, salle Cartan

Commission des études – Seconde session 2024-2025
Vendredi 19 septembre 2024 à 14h, salle R3

Premier semestre :

Pré-rentrée du M1 « Analyse Harmonique, Combinatoire et surfaces, Introduction à Lean »
Du lundi 1 au vendredi 5 septembre 2025

Début des cours
Première année : lundi 15 septembre 2025
Deuxième année : lundi 8 septembre 2025

Vacances

Vacances de la Toussaint : du samedi 25 octobre au dimanche 2 novembre 2025
Vacances de Noël : du samedi 20 décembre 2025 au dimanche 4 janvier 2026

PSL Week
Du lundi 24 novembre au vendredi 28 novembre 2025

Fin des cours
Vendredi 16 janvier 2026

Examens
Du lundi 19 janvier au vendredi 23 janvier 2026

Réunion de présentation du second semestre
Mercredi 14 janvier 2026 à 13h30, salle Cartan

Deuxième semestre :

Début des cours
Lundi 2 février 2026

Vacances
Vacances d'hiver : du samedi 21 février au dimanche 1 mars 2026
Vacances de printemps : du samedi 25 avril au dimanche 3 mai 2026

Fin des cours
Vendredi 22 mai 2026

Examens
Du lundi 1 juin au vendredi 5 juin 2026

Exposés de mathématiques de première année
Du lundi 8 juin au vendredi 12 juin 2026

Commissions des études 2025-2026
1ère session (première et deuxième années) : lundi 22 juin 2026
2ère session (première et deuxième années) : lundi 21 septembre 2026

ENSEIGNEMENT

ORGANISATION DE LA FORMATION

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec les tuteur·ice·s, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrant·e·s du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiant·e·s et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur·ice et des directeurs des études pour tous les choix concernant leur programme d'études.

- FILIERE MATHEMATIQUES

Première année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en troisième année de licence (L3), mais suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en deuxième année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiant·e·s dont l'avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l'étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L'inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l'élève. Avec le·a tuteur·ice, l'élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiant·e·s composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

■ Filieres pluridisciplinaires

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l'ENS. Organisées conjointement entre le DMA et les départements de physique, d'informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiant·e·s motivé·e·s de poursuivre une double formation ;
- aux étudiant·e·s encore indécis·e·s de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. Ils sont inscrits au département de mathématiques. En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Enseignant-e-s chercheur-euse-s référent-e-s : Cristina Toninelli (CNRS/PSL) et Amir-Kian Kashani Poor (ENS)

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d'informatique. Les élèves entré·e·s par le concours Info s'inscrivent au département d'informatique, les élèves entré·e·s par le concours MPI au département de mathématiques. Les tuteur·ice·s proviennent de leur département d'inscription. En deuxième année, il est possible de s'orienter soit vers les mathématiques soit vers l'informatique, et de rejoindre le département de son choix.

Enseignant chercheur référent : Marc Lelarge (INRIA) et Djalil Chafaï (PSL)

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheur·euse·s capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Enseignant chercheur référent : Amaury Lambert (IBENS)

Objectifs du cursus

Les étudiant·e·s issu·e·s de la filière mathématiques/biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Il y aura été appris à décortiquer la littérature spécialisée, à suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et à initier dialogues et collaborations avec les biologistes dans leurs laboratoires.

Les deux années de cursus permettent aux élèves concerné·e·s de continuer, suivant leur parcours :

- un M2 de mathématiques de la modélisation,
- un M2 de mathématiques pour la biologie,
- un M1/M2 IMaLiS, parcours Ecologie/Evolution, parcours Neurosciences ou parcours Biologie fondamentale pour la Santé.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s'inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de sciences cognitives. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tou·te·s les étudiant·e·s du département de mathématiques ; l'inscription à ces cours n'engage donc pas les étudiant·e·s concerné·e·s à l'exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

REGLES D'OBTENTION

| *Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone.* |

PREMIERE ANNEE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

<table>
<tr><td>Commun pour toutes les filières</td><td>4 cours de niveau licence : (1)
○ Algèbre 1
○ Analyse complexe
○ Intégration et probabilités
○ Topologie et calcul différentiel</td><td>12 ECTS x 4 =
48 ECTS</td></tr>
<tr><td>Filière Mathématique</td><td>Mémoire et exposé de 1ère année</td><td rowspan="4">12 ECTS</td></tr>
<tr><td>Filière Math/Physique</td><td>Cours spécifiques du cursus mixte
○ Relativité générale</td></tr>
<tr><td>Filière Math/Informatique</td><td>Cours spécifique du cursus mixte)
○ Initiation à la cryptologie</td></tr>
<tr><td>Filière Math/Biologie</td><td>Mémoire et exposé d'interface math-biologie</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>60 ECTS</td></tr>
</table>

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental.

L'obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s'il ne compte pas pour la L3) parmi :
  - Algèbre 2
  - Analyse complexe
  - Analyse fonctionnelle
  - Géométrie différentielle
  - Logique
  - Optimisation et transport optimal

- Un groupe de lecture parmi :
  - Arbres, marches et graphes aléatoires, Igor Kortchemski CNRS
  - Géométrie grossière et hyperbolicité à la Gromov, Pierre-Antoine Guihéneuf SU
  - La thèse de Tate, Julien Marché SU
  - Lois de conservation scalaires & équations de Hamilton-Jacobi, Corentin Gentil ENS

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.

| *Il est conseillé de valider un minimum de 6 ECTS en première année et 12 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filières pluridisciplinaires

<u>Mathématiques/Physique</u>

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 de physique :

- Des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  - Physique statistique des systèmes en équilibre (9 ECTS, 1er semestre)
  - Introduction à la mécanique quantique (9 ECTS, 1er semestre)
  - Relativité et électromagnétisme (9 ECTS, 2ème semestre)

Hydrodynamique (9 ECTS, 2ème semestre)
Physique du solide (9 ECTS, 2ème semestre)

- Le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheur·euse·s des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Informatique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- Des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

Semestre 1 :

Algorithmique et programmation (9 ECTS)
Systèmes numériques (9 ECTS)
Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

Semestre 2 :

Apprentissage statistique (9 ECTS)
Systèmes et réseaux (9 ECTS)
Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
Initiation à la cryptologie (**Obligatoire**, 12 ECTS)
Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
Bases de données (9 ECTS)
Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- Le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique.

Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un·e chercheur·euse et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Biologie

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours d'optimisation et transport optimal (2ème semestre).
- Le cours de M1 d'Analyse fonctionnelle (2ème semestre, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2ème année).
- Cours de biologie pour non biologistes :
  Introduction aux Sciences du Vivant (1er semestre, 3 ECTS)
  Biologie moléculaire de la cellule (2ème semestre, 3 ECTS)
  Groupe de lecture en biologie : Mathématiques pour la biologie (2ème semestre, 6 ECTS).
- Deux cours parmi les suivants au 1er semestre :
  Ecologie & Biodiversité (6 ECTS)
  Neurosciences (6 ECTS)
  Biologie Moléculaire et Génétique (6 ECTS)
- Deux cours parmi les suivants au 2ème semestre :
  Biologie cellulaire (6 ECTS)
  Développement (6 ECTS)
  Biologie évolutive (6 ECTS)
- Une école d'été ou un stage en biologie ou en neuroscience.

- DEUXIEME ANNEE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : ○ Algèbre 2 ○ Analyse complexe (1) ○ Analyse fonctionnelle (2) ○ Géométrie différentielle (2) ○ Logique (2) ○ Processus stochastiques (3) ○ Optimisation et transport optimal (2)	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : ○ Analyse des EDP ○ Compléments de probabilités (2) ○ Mathématiques des données ○ Statistique ○ Systèmes dynamiques ○ Topologie algébrique (2)	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours accessible dès la 1ère année
(3) Cours recommandé pour la filière maths/biologie

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)
- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  - Analytic group theory
  - Formalisation mathématique
  - Mathematical topics and methods in PDEs from physics and biology
  - Thèmes de dynamique en dimension 1 et 2

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail des cours avancés.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du DENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1e année pour les élèves inscrit·e·s directement en 2e année
- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.
- Des minicours spéciaux sont également proposés durant le S2 par des professeurs invités. Ils ne donnent pas lieu à des ECTS, et sont à suivre par curiosité et plaisir. Cette année : « Local and global convergence of random trees » par Serte Donderwinkel.

  | *Il est conseillé de valider un minimum de 6 ECTS en première année et 12 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière mathématiques/biologie

- Les détails sont à vérifier auprès du responsable de filière M. Amaury Lambert (amaury.lambert@ens.psl.eu).

TROISIEME ANNEE

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)
- La composition du *mémoire de Diplôme*
- Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Introduction au domaine de recherche (IDR),* présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).
- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - Cours de M2 des universités partenaires
  - Dynamique des équations des ondes semi-linéaires, Thomas Duyckaerts
  - Introduction to generative modeling with flows and diffusions, Eric Vanden Eijden
  - Dimension reduction and manifold learning, Eddie Aamari
- Un groupe de travail auto-organisé *(facultatif).*
- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif).*

| *Remarque : une expérience à l'étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

COURS DE L'ANNEE SCOLAIRE 2025-2026

PREMIERE ANNEE

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 : théorie des groupes (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	S. Rideau-Kikushi CNRS/ENS L. Nataf ENS
• Probas 1 : intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	N. Enriquez UPS B. Laslier UPC
• Analyse 1 : topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	J. Guillod SU C. Gentil ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Arbres, marches et graphes aléatoires	I. Kortchemski CNRS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Géométrie grossière et hyperbolicité à la Gromov	P.-A. Guihéneuf SU
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) La thèse de Tate	J. Marché SU
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Lois de conservation scalaires & équations de Hamilton-Jacobi	C. Gentil ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	 T. Servi UPC R. Guénet ENS

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) (Cours de licence - 70h : 42h cours + 28h TD)	F. Charles UPS T. Serafini SU
• Analyse 2 : analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	M. Fathi UPC G. Gomez ENS
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS)	E. Giroux CNRS/ENS

(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	A. Fernandes ENS
• Optimisation et transport optimal (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Mérigot UPS A. Bertolino ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Probas 3/2 : Compléments de probabilités (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	L. Dumaz CNRS/ENS S. Chabredier ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Topologie algébrique (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	J. Marché SU C. Huang ENS
• *Cours spécifique cursus Info/Maths :* Initiation à la cryptologie (12 ECTS) (48h cours + 24hTD)	B. Minaud INRIA P. Nguyen INRIA
• *Cours spécifique cursus Maths/Physique :* Relativité générale (12 ECTS) (42h cours)	C. Huneau CNRS/ENS C. Deffayet LPENS
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :* Mathématiques pour la biologie (6 ECTS)	A. Véber CNRS/UPC

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un·e encadrant·e appartenant le plus souvent au département de mathématiques et applications de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.

Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;
- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiant·e·s réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.

Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Exemples de cours scientifiques non mathématiques

- Physique - http://www.phys.ens.fr/
    - Introduction à la mécanique quantique
    - Physique statistique des systèmes en équilibre
    - Relativité et électromagnétisme
    - Hydrodynamique

- Physique du solide

- Informatique - http://diplome.di.ens.fr/
  - Langages formels, calculabilité et complexité
  - Algorithmique
  - Langages de programmation et compilation
  - Systèmes numériques
  - Système d'exploitation
  - Lambda calcul et logique informatique
  - Théorie de l'information et codage
  - Initiation à la cryptologie
  - Sémantique et application à la vérification de programmes
  - Bases de données

- Biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/
  - Biologie cellulaire
  - Biologie Moléculaire et Génétique
  - Introduction aux sciences du vivant
  - Introduction to Ecology
  - Neurosciences

- Études cognitives - http://cognition.ens.fr
  - Introduction to Cognitive Neuroscience
  - Computational Neuroscience

- Économie - http://www.economie.ens.psl.eu/
  - Economie pour scientifiques
  - Introduction aux théories de la croissance économique
  - Introduction à l'économétrie

- DEUXIEME ANNEE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 : théorie de Galois (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	V. Mehmeti SU O. Sabatin ENS

• Logique (M1, 12 ECTS) — T. Servi UPC
(Cours fondamental - 70h :42h cours + 28h TD) — R. Guénet ENS

• Probas 2 : processus stochastiques (M1, 12 ECTS) — D. Chafaï PSL
(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD) — A. Metz-Donnadieu ENS

• Analyse des équations aux dérivées partielles (M1, 12 ECTS) — J. Lamboley SU
(Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD) — A. Chabert ENS

• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) — J. Delon UPC
(Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD) — G. Peyré CNRS/ENS
S. Boïté ENS

• Statistique (M1, 12 ECTS) — E. Aamari CNRS/ENS
(Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD) — O. Rameh ENS

• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) — C. Houdayer UPS
(Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD) — L. Benedetto ENS

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) — M. Fathi UPC
(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD) — G. Gomez ENS

• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) — E. Giroux CNRS/ENS
(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD) — A. Fernandes ENS

• Optimisation et transport optimal (M1, 12 ECTS) — Q. Mérigot UPS
(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD) — A. Bertolino ENS

• Compléments de probabilités (M1, 12 ECTS) — L. Dumaz CNRS/ENS
(Cours complémentaire – 63h : 35h cours + 28 TD) — S. Chabredier ENS

• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) — J. Marché SU
(Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD) — C. Huang ENS

Cours avancés, deuxième semestre

• Cours avancé : Analytic group theory — S. Chakraborty ENS
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail) — M. Donvil ENS
C. Le Bars ENS

B. Morando ENS

• Cours avancé : Formalisation mathématiques en Lean (6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail) — F. Nuccio U. Saint-Etienne

• Cours avancé : Thèmes de dynamique en dimension 1 et 2 (6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail) — P.-A. Guihéneuf SU

• Cours avancé : Mathematical topics and methods in PDEs from physics and biology (6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail) — E. Bouin PSL

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 7 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Groupes de travail, premier semestre

- Domaines d'holomorphie et variétés de Stein — O. Benoist CNRS/ENS
- Introduction à la géométrie sous-riemannienne — L. Benedetto ENS
- Limites locales de cartes planaires et empilement de cercles — A. Metz-Donnadieu ENS
- Représentations l-adiques et la fonction tau de Ramanujan — G. Chenevier CNRS/ENS
- Théorie algébrique des équa. diff. en caractéristiques ≥ 0 — T. Serafini ENS
- Théorie cinétique et théorème de Lanford — F. Fougères ENS
- Transport optimal et applications — J. Delon UPC
- Le polymère dirigé en milieu aléatoire — B. Laslier

Cours non mathématiques

Des exemples de cours scientifiques non mathématiques sont disponibles dans la partie présentation des cours de la première année.

- TROISIEME ANNEE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

L'auto-organisation de groupes de travail est vivement recommandée. Elle peut être encadrée, si besoin, par un·e enseignant·e du DMA.

Deuxième semestre :

Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS (9 ECTS, 24h cours). Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription pour les conditions pédagogiques.

- Dynamique des équations des ondes semi-linéaires — T. Duyckaerts USPN
- Introduction to generative modeling with flows and diffusions — E. Vanden-Eijden PSL
- Dimension reduction and manifold learning — E. Aamari PSL

ENSEIGNEMENTS HORS DEPARTEMENT

Le DMA offre également un ensemble de cours de mathématiques dans d'autres départements de l'ENS.

- Mathématiques pour littéraires — F. Fougères ENS
- Statistique pour économistes — M. Laoufi ENS
- Mathématiques pour économistes — O. Rameh ENS
- Probabilités discrètes pour physicien·ne·s — C. Toninelli CNRS/PSL

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2025-2026

| *Algèbre 1* **(L3 S1) |**
(Silvain Rideau- Kikuchi et Louise Nataf)

On étudiera dans ce cours les groupes, principalement à travers leurs actions sur des ensembles ou des espaces vectoriels.

Le plan général sera le suivant

- Généralités sur les groupes et leurs quotients
- Actions de groupe et groupe symétrique
- Éléments de structure des groupes finis
- Groupes abéliens et modules sur les anneaux principaux
- Représentations des groupes finis.

Bibliographie :
http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/AlgebreI.html

■ ■ ■ ■ ■

| *Algèbre 2* (M1 S1) |

(Vlerë Mehmeti et Owen Sabatin)

Le but de ce cours est d'introduire les bases de l'algèbre commutative, dont les objets principaux sont rencontrés dans de nombreux domaines mathématiques. Le cours se concentrera sur des propriétés des anneaux commutatifs et sur la théorie des extensions de corps.

Les thèmes abordés seront :

- Anneaux (commutatifs)

  - modules, produit tensoriel, localisations
  - anneaux factoriels, euclidiens, principaux
  - Nullstellensatz et normalisation de Noether
  - anneaux de valuations, dimension de Krull
  - spectre d'un anneau et quelques propriétés géométriques

- Extensions de corps
- Théorie de Galois et applications

Bibliographie provisoire

- Introduction to Commutative Algebra, M.F. Atiyah, I.G. MacDonald
- Introduction à la théorie des schémas, A. Ducros
- A course in Galois Theory, D. Garling
- Algebra, S. Lang
- Commutative Algebra (Volumes I et II), O. Zariski, P. Samuel

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse complexe* **(L3/M1 S2)** |
(François Charles et Thomas Serafini)

L'analyse complexe étudie les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globalement. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globalement, leur étude nécessite la mise en œuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Nous concluons par quelques exemples d'applications à des domaines variés.

La théorie de Cauchy donne les premières propriétés des fonctions analytiques complexes et révèle l'importance de la topologie des ensembles de définition de ces fonctions. Après avoir démontré l'analycité des fonctions holomorphes, nous donnons les premières propriétés (Théorème de l'application ouverte, Lemme de Schwarz) et les grands théorèmes (Théorème de Runge, Théorème de Weierstrass, Théorème de Riemann, Théorème de Picard...). L'étude des singularités conduit à la notion de fonctions méromorphes avec de nombreuses applications au calcul d'intégrales via la théorie des résidus et aux problèmes d'approximation (méthode du col). Nous concluons par plusieurs incursions en théorie des nombres : études des fonctions elliptiques et modulaires et des séries de Dirichlet.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse fonctionnelle* **(M1 S2)** |
(Max Fathi et Gaspard Gomez)

Dans ce cours, on étudiera les bases de l'analyse fonctionnelle abstraite et les principaux espaces de fonctions utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Le cours commencera par l'analyse abstraite des espaces vectoriels topologiques (localement convexes) et de leurs topologies classiques, avec une attention particulière pour les topologies faibles sur les espaces de Banach. Nous verrons les théorèmes classiques d'analyse linéaire (Hahn-Banach, Banach-Alaoglu...), quelques sous-cadres classiques (espaces réflexifs, espaces uniformément convexes), ainsi que la topologie des espaces de mesures et des applications en probabilités.

Nous aborderons ensuite la théorie des distributions, ainsi que la transformée de Fourier, qui sera illustrée par des applications aux EDP et en traitement du signal.

Enfin, nous aborderons les espaces de Sobolev, leurs propriétés (injections de Sobolev notamment), et leur utilisation pour l'étude d'EDP elliptiques.

Si le temps le permet, on consacrera les dernières heures de cours à la dualité convexe.

▪▪▪▪▪

| *Analyse des Equations aux Dérivées Partielles* **(M1 S1)** |

(Jimmy Lamboley et Ambre Chabert)

L'histoire des équations aux dérivées partielles (EDP) commence au 18e siècle par des équations venant de la physique (Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace...). Au cours du 19e siècle, l'étude des EDP devient également un outil essentiel dans de nombreuses branches des mathématiques, par exemple avec le travail de Riemann en analyse complexe.

Cette dualité (étude des équations venant des autres sciences d'une part, interaction avec divers domaines mathématiques d'autre part) restera centrale au cours du 20e siècle, et aujourd'hui encore.

Le premier objectif de ce cours est d'acquérir un peu de culture générale sur les équations classiques (équations de la chaleur, équation de Laplace, équation des ondes, équation de transport…) et sur certaines de leurs généralisations, linéaires ou non-linéaires.

Le second objectif est d'utiliser, découvrir et développer de multiples outils de l'analyse qui sont utilisés dans le cadre des EDP, mais dont l'importance va bien au-delà : on abordera notamment l'analyse de Fourier, l'analyse complexe, l'analyse fonctionnelle, la théorie des distributions, le calcul de variation, et de possibles extensions.

Bibliographie :

- L. C. Evans, Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics), Second Ed.
- C. Zuily, Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles
- H. Brézis, Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations, Springer

Plus secondaire :

- L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis (2008)
- L. Hörmander - The Analysis of Linear Partial Differential Operators II_ Differential Operators with Constant Coefficients (2005, Springer)
- L. Hörmander - The Analysis of Linear Partial Differential Operators III_ Pseudo-Differential Operators (2007)

▪▪▪▪▪

| *Compléments de probabilités* **(M1 S2)** |

(Laure Dumaz et Sylvain Chabredier)

Ce cours est un complément au cours d'intégration et probabilités.

Il est destiné aux normaliens de première année, second semestre.

Il ne nécessite pas d'avoir suivi le cours de processus stochastiques.

Les thèmes abordés sont les suivants, entre autres :

- Percolation
- Modèle d'Ising
- Graphes aléatoires
- Matrices aléatoires

Bibliographie :

- Cours IHES sur la percolation de Hugo Duminil-Copin
- Cours sur les graphes aléatoires de Charles Bordenave
- Livre sur les matrices aléatoires de Terence Tao
- Livre sur la mécanique statistique de Sacha Friedli et Yvan Velenik

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Analytic group theory* **(M1 S2)** |

(Soham Chakraborty, Milan Donvil, Corentin Le Bars et Basile Morando)

The rich theory of infinite groups and dynamical/algebraic objects associated to them intertwines techniques and ideas from various areas of mathematics such as representation theory of groups, harmonic analysis, dynamical systems and operator algebras. A striking example of this phenomenon is the resolution to the longstanding problem in 2014-15 to determine when the C*-algebra associated to a such a group is simple.

This course consists of an introduction to some of these concepts and their interactions. It will roughly consist of three parts:

1. Unitary representations of groups: locally compact groups, unitary representations, amenability, Property (T)

2. Dynamical systems on groups: proximality, minimality, stationary measures, amenable actions, Furstenberg and Poisson boundaries

3. Operator algebras: Banach algebras, C*-algebras, von Neumann algebras, Gelfand Theory, C*-algebras of amenable groups, Crossed products.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Formalisation mathématique* **(M1 S2)** |

(Filippo Nuccio)

Le but du cours est de fournir une introduction à la formalisation mathématique : il s'agit de la discipline qui s'occupe de rendre définitions et démonstrations mathématiques accessibles à un ordinateur, ce qui permet de les vérifier rigoureusement et d'obtenir en même temps un point de vue nouveau sur les théories qu'on formalise.

Pour ce faire, on s'appuie d'une part sur des fondements mathématiques souvent différents de la théorie des ensembles ; et, d'autre part, sur des logiciels qui permettent de formaliser les définitions, les énoncés, et les preuves à l'ordinateur. Dans notre cours, on choisira comme fondements la théorie des types dépendants et le calcul des constructions inductives ; et on utilisera le logiciel Lean, avec sa bibliothèque Mathlib.

Il y aura une alternance de cours théoriques, de cours d'utilisation de Lean, et de travaux pratiques à l'ordinateur.

Ce cours aura lieu de 13h30 à 16h30 aux 3, 5, 10, 17, 19 février, 2, 24, 31 mars, 7 et 14 avril 2026. L'examen est prévu le 10 mars.

Il est nécessaire de venir en cours avec son ordinateur portable.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Mathematical topics and methods in PDEs from physics and biology* **(M1 S2)** |

(Emeric Bouin)

In this course, we will present and discuss various types of models inspired by gas dynamics, evolution of species, fluid mechanics, among others, that consists in partial differential equations. Modelling, qualitative behaviour, quantitative analysis and numerical approaches will be the core of the course. The exact content can be adapted to the audience, but it is plan to review basics on evolution equations, elliptic and hypo elliptic operators and basic numerical schemes.

A tentative bibliography includes

- Tranport equations in biology, by B. Perthame.
- Partial Differential Equations, by L.C. Evans.
- Parabolic equations in biology, by B. Perthame.
- Applied Partial Differential Equations: A Visual Approach, by P. Markowich.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Thèmes de dynamique en dimension 1 et 2* **(M1 S2)** |

(Pierre-Antoine Guihéneuf)

La dynamique en petite dimension est un sujet offrant de nombreux exemples à la fois riches et éclairants. Voici des exemples de sujets qui pourront être abordés dans ce cours :

* La théorie de la rotation pour les homéomorphismes du cercle, avec les théorèmes de Denjoy sur la (semi)-conjugaison à la rotation et éventuellement des résultats de conjugaison lisse.

* La théorie de Sharkovski pour les dynamiques de la droite et le théorème "3-cycle implique chaos".

* La théorie ergodique des applications dilatantes du cercle et en particulier l'existence d'une unique mesure absolument continue par rapport à Lebesgue "la plupart des orbites se répartit uniformément".

* Le théorème de Poincaré-Bendixson pour les flots du plan "la dynamique de ces flots est prévisible".

* L'étude des automorphismes linéaires du tore et de leurs diverses propriétés : ergodicité, mélange, etc.

* La théorie de Brouwer des homéomorphismes du plan : si un homéo possède un point périodique, alors il a un point fixe.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Cours de mathématiques pour les littéraires* **(PT)** |
(Florent Fougères)

Ce cours est un véritable cours de mathématiques, adapté à des élèves partant sans bagage mathématique spécifique. Il est destiné à chaque élève littéraire souhaitant expérimenter concrètement ce que sont les mathématiques, dans leur logique propre et leur cadre formel particulier, et comment s'y confronter pour qu'elles deviennent un outil naturel. Il est donc idéal pour les personnes qui veulent découvrir un nouveau point de vue complémentaire sur le monde ! On essaiera ainsi de dégager des notions mathématiques pouvant apporter un éclairage différent sur la vie du quotidien, le fonctionnement de l'univers ou les prédictions scientifiques, en établissant des liens avec d'autres disciplines et points de vue.

La présentation des notions sera donc adaptée au public convié, sans vulgarisation néanmoins : peu de notions seront abordées mais elles seront pleinement traitées. Les séances alterneront entre cours et exercices, comme cela se fait généralement en mathématiques, la pratique personnelle et l'habitude permettant une bonne assimilation des notions et une aisance à la fois essentielle et profondément satisfaisante !

Le cours aura lieu au second semestre, les mercredis de 17h à 19h en salle Cartan (Bâtiment Rataud, Étage -2).

Les thèmes traités seront les suivants :

- Logique mathématique : Dans un premier temps, on commencera par donner un cadre logique formel à nos raisonnements, qui servira de langage de base pour le dialogue mathématique. On exposera alors de premières applications à ce formalisme à travers l'étude des ensembles infinis, qui nous consuira à la notion de fonction, véritable pierre angulaire des mathématiques.

- Suites et limites : Nous étudierons comment se résout naturellement le paradoxe de Zénon après introduction des bonnes notions mathématiques : les suites numériques et leurs limites. Autrement dit, nous verrons comment donner un sens à la convergence d'une succession de phénomènes vers une certaine limite et nous aborderons de nombreuses applications de ces théories à d'autres domaines des sciences.

- Étude de fonctions : Les fonctions et leur étude sont l'outil mathématique le plus utilisé dans toutes les sciences et pour toute entreprise de compréhension quantitative du monde. On donnera donc les instruments nécessaires pour mettre en équations ce qui nous entoure, et leur application fondamentale à la prédiction de phénomènes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours de statistique pour économistes* **(PT)** |

(Maël Laoufi)

Nous nous appliquerons dans ce cours à construire et étudier rigoureusement l'univers probabiliste afin de formaliser dans un second temps les principaux outils des Statistiques. Le cours s'adresse aux étudiants dont le bagage mathématique est semblable à celui de la filière B/L, et leur permettra de suivre les enseignements nécessitant des prérequis dans ces domaines. Nous nous intéresserons notamment à la définition de l'univers probabiliste au travers de la théorie de la mesure, aux variables aléatoires et à leur loi, aux grands résultats de convergence (Loi des Grands Nombres, Théorème Central Limite), aux concepts fondamentaux de Statistique (estimateurs, intervalles de confiance, méthode des moments), aux tests d'hypothèse, vecteurs gaussiens, test du khi deux, information de Fisher…

■■■■■

| *Cours spécial : Local and global convergence of random trees* **(L3 S2)** |

(Serte Donderwinkel)

Random trees arise naturally in a wide range of contexts, from the analysis of algorithms and data structures to models in statistical physics and evolutionary biology. Understanding their large-scale behavior not only reveals connections between combinatorics, probability, and geometry but also sheds light on universal structures emerging in complex systems.

This mini-course explores the limiting properties of random trees. We begin by developing combinatorial techniques for sampling random trees. From there, we investigate their asymptotic structure using two powerful frameworks: global convergence in the Gromov–Hausdorff topology, capturing the tree's macroscopic shape, and local convergence in the Benjamini–Schramm topology, describing the limiting neighborhood structure around a typical node.

Students will gain experience with combinatorial constructions, probabilistic analysis, and geometric concepts, and get a glimpse at the active research on how discrete structures behave in the large-scale limit.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Biologie : Groupe de lecture – Mathématiques pour la biologie* **(L3 S2)** |

(Amandine Véber)

Le but est de discuter à travers des présentations d'articles des questions biologiques auxquelles la modélisation peut contribuer et différents outils mathématiques que l'on peut utiliser dans ce but. 3 thèmes différents seront abordés, chacun sur 4 séances.

Les présentations des étudiants seront supervisées par des chercheurs en mathématiques et en biologie, spécialistes de ces domaines.

La validation se fait par la présentation d'au moins 2 exposés en groupe, la rédaction de 3 comptes-rendus (un pour chaque thème abordé en 4 séances) et une participation raisonnable en classe.

Le groupe de lecture aura lieu le jeudi de 14h à 16h, en salle 305 au département de biologie, 46 Rue d'Ulm.

Pré-requis : Aucun. Avoir suivi le module « Introduction aux sciences du vivant » au premier semestre est bien sûr un plus pour la compréhension des questions biologiques, mais n'est pas indispensable.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Initiation à la cryptologie* **(L3 S2)** |
(Phuong Nguyen et Brice Minaud)

Ce cours s'adresse aux étudiants ayant un goût pour l'algorithmique, à la fois dans ses aspects mathématiques et dans ses aspects pratiques. Son but est d'enseigner la problématique de la cryptologie, et les principaux outils utilisés par la cryptologie pour proposer des solutions aux problèmes de sécurité. Il sert d'introduction et de préparation aux cours de cryptologie proposés au MPRI.

Ce cours commence par les notions de base de cryptographie symétrique (chiffrement par blocs et par flot, fonctions de hachage, et cryptanalyse) et asymétrique (RSA, Diffie-Hellman et ElGamal), puis présente de façon informelle plusieurs techniques plus avancées :

- Preuves zero-knowledge
- Cryptographie distribuée
- Cryptographie à base de couplages sur courbes elliptiques
- Cryptographie à base de réseaux euclidiens (cryptographie post-quantique)
- La Blockchain et bitcoin

Prérequis : Ce cours fera essentiellement appel aux notions de classes de complexité, de machine de Turing et de problèmes NP. Un minimum de connaissances en algèbre et en probabilité sera aussi requis. Enfin les outils algorithmiques de base devront être maîtrisés. Certains TDs conduiront à de la programmation en langage C ou Python.

Lien du cours : https://diplome.di.ens.fr/catalog_fr.html#INFO-L3-MPRI113-S2

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Relativité générale* **(L3 S2)** |
(Cécile Huneau et Cédric Deffayet)

La relativité générale est une théorie physique formulée par Einstein en 1915 en se basant sur les travaux de mathématiciens : Riemann et Lévi-Civita pour les objets géométriques, ainsi que Poincaré et Hilbert.

Le but de ce cours, dispensé à la fois par un physicien théoricien (Cédric Deffayet), et une mathématicienne (Cécile Huneau), est de donner une introduction à la relativité générale en alternant les points de vue.

Plan du cours :

- Relativité restreinte
- Géométrie Lorentzienne
- Équations d'Einstein
- Solution de Schwarzschild
- Solutions cosmologiques

Bibliographie :

- O'Neill : Semi-Riemannian geometry with applications to relativity
- Wald : General Relativity
- Choquet-Bruhat : Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology

▪▪▪▪▪

| *Dimension reduction and manifold learning* **(M2 S2)** |

(Eddie Aamari)

Modern machine learning typically deals with high-dimensional data. The fields concerned are very varied and include genomics, image, text, time series, or even socioeconomic data where more and more unstructured features are routinely collected. As a counterpart of this tendency towards exhaustiveness, understanding these data raises challenges in terms of computational resources and human understandability. Manifold Learning refers to a family of methods aiming at reducing the dimension of data while preserving certain of its geometric and structural characteristics. It is widely used in machine learning and experimental science to compress, visualize and interpret high-dimensional data. This course will provide a global overview of the methodology of the field, while focusing on the mathematical aspects underlying the techniques used in practice.

Le cours se tiendra au 16bis Rue de l'Estrapade, en février et mars 2026.

Program:

- Manifold hypothesis and intrinsic dimension(s)

- Multidimensional scaling

- Linear dimension reduction (random projections, principal component analysis)

- Non-linear spectral methods (kernel PCA, ISOMAP, MVU, Laplacian eigenmaps)

- Ad-hoc distance-preserving methods (diffusion maps, LLE)

- Probabilistic dimension reduction and clustering (SNE, UMAP)

- Neural network-based dimensionality reduction

Bibliography:

- Ghojogh, B., M. Crowley, F. Karray, and A. Ghodsi (2023). Elements of dimensionality reduction and manifold learning

- Lee, J. A., M. Verleysen, et al. (2007). Nonlinear dimensionality reduction

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Dynamique des équations des ondes semi-linéaires* **(M2 S2)** |

(Thomas Duyckaerts)

Le but de ce cours est de présenter des développements récents sur la dynamique des équations des ondes non-linéaires. Dans la première partie du cours, je présenterai quelques propriétés classiques des équations des ondes linéaires (cf [3, Chapitre 5]) : représentation des solutions, vitesse finie de propagation, comportement asymptotique, dispersion et inégalités de Strichartz ([7], [5]), ainsi qu'un outil de concentration-compacité, la décomposition en profils [1].

La deuxième partie du cours concernera les équations d'ondes semi-linéaires proprement dites. Après une présentation des propriétés de base de ces équations (cf e.g. [5], [6]) : existence locale et unicité des solutions, lois de conservation, transformations), je donnerai plusieurs exemples de dynamiques : solutions asymptotiquement linéaires (scattering), comportement auto-similaire et ondes solitaires.

J'esquisserai enfin la preuve de la résolution en ondes solitaires pour l'équation des ondes critique [2], [4]. Les prérequis du cours sont les bases d'analyse réelle classique et d'analyse harmonique (transformation de Fourier). Ce cours s'inscrit dans la continuité des cours fondamentaux "Introduction aux équations aux dérivées partielles non-linéaires" et "Introduction aux équations aux dérivées partielles d'évolution", mais peut être suivi indépendamment de ces deux cours.

Horaires :
Mercredi 10h15 – 12h15 et vendredi 9h – 11h, à partir du lundi 2 mars 2026.

Bibliographie :

[1] Bahouri, H., and Gérard, P. High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations. Amer. J. Math. 121, 1 (1999), 131–175.
[2] Duyckaerts, T., Kenig, C., and Merle, F. Classification of radial solutions of the focusing, energy-critical wave equation. Camb. J. Math. 1, 1 (2013), 75–144.
[3] Folland, G. B. Introduction to partial differential equations., 2nd ed. ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1995.
[4] Kenig, C. E. Lectures on the energy critical nonlinear wave equation, vol. 122 of CBMS Reg. Conf. Ser. Math. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2015.

[5] Sogge, C. D. Lectures on nonlinear wave equations. Monographs in Analysis, II. International Press, Boston, MA, 1995.
[6] Strauss, W. A. Nonlinear wave equations, vol. 73 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.
[7] Tao, T. Nonlinear dispersive equations, vol. 106 of CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2006. Local and global analysis.

■ ■ ■ ■ ■

| *Géométrie différentielle* (M1 S2) |

(Emmanuel Giroux et Alex Fernandes)

Variétés différentielles : Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes

Formes différentielles

Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle

Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces

Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie :

- J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
- J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013. Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
- J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
- M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Arbres, marches et graphes aléatoires* **(L3 S1)** |

(Igor Kortchemski)

Les graphes aléatoires sont un sujet fascinant à l'intersection des probabilités, de la combinatoire et de la physique statistique, avec de nombreuses applications. En effet, les graphes aléatoires jouent un rôle essentiel dans l'étude des réseaux du monde réel. Ce groupe de lecture étudiera d'abord les arbres aléatoires de Bienaymé-Galton-Watson (qui décrivent la généalogie d'une population se reproduisant de manière asexuée) en utilisant leur codage par des marches aléatoires. Ensuite, on s'intéressera aux graphes d'Erdős–Rényi, obtenus à partir d'un nombre fixés de sommets et en ajoutant indépendamment chaque arête possible avec une certaine probabilité.

Il n'y a pas de prérequis particuliers : les outils mathématiques vus au niveau bac+1/bac+2 suffisent.

L'objectif principal est d'apprendre à communiquer et à présenter les mathématiques oralement. L'objectif secondaire est d'étudier un sujet en profondeur en binôme et le structurer de manière appropriée pour un exposé.

Bibliographie (disponible en ligne) :

- I. Kortchemski, Arbres et marches aléatoires,

  https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/enseignement/XUPS/xups16-01.pdf

- N. Curien, A random Walk among random Graphs, https://www.dropbox.com/scl/fi/xgb6yed67rzwynauuuagy/cours-GA-online.pdf?rlkey=e10jhac0y9s49ly331il4ydjq&dl=0

- S. Roch, Modern Discrete Probability,

  https://people.math.wisc.edu/~roch/mdp/roch-mdp-full.pdf

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Géométrie grossière et hyperbolicité à la Gromov* **(L3 S1)** |
(Pierre-Antoine Guihéneuf)

La géométrie grossière consiste à considérer les espaces "vus de très loin" ; en pratique on y fait tous les calculs à une constante près. Le gros avantage de ce point de vue est qu'il permet de s'affranchir de la machinerie de la géométrie riemannienne pour n'utiliser qu'une distance sur l'espace. Des exemples particulièrement intéressants sont ceux qui ont la propriété dite de "delta-hyperbolicité", introduite par Gromov dans les années 80 et issue de l'idée "vu de loin, l'espace ressemble à un arbre". À partir d'un seul axiome, élémentaire, émerge toute une série de résultats frappants pouvant conduire par exemple, en les faisant agir correctement, à des théorèmes d'existence de sous-groupes libres.

Le début du groupe de lecture sera consacré à l'étude d'un exemple géométrique d'espace delta-hyperbolique : le plan hyperbolique, dont on étudiera en particulier les isométries.

Bibliographie :

- Pierre de la Harpe et Étienne Ghys, Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov
- Mikhaïl Gromov, Hyperbolic groups
- Ricardo Sa Earp et Eric Toubiana, Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann
- Marcel Berger, Géométrie 2

| *Groupe de lecture : La thèse de Tate* **(L3 S1)** |

(Julien Marché)

On étudiera comment, en 1950, Tate a utilisé l'analyse de Fourier sur les groupes topologiques abéliens localement compacts (incluant les corps p-adiques, adèles et idèles) pour redémontrer les équations fonctionnelles des certaines fonctions (dites L) généralisant la fonction zeta de Riemann.

Référence :
Fourier Analysis on Number Fields (Ramakrishnan et Valenza)

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Lois de conservation scalaires & équations de Hamilton-Jacobi* **(L3 S1)** |
(Corentin Gentil)

D'une part, les lois de conservation scalaires correspondent à une classe d'équations qui modélisent la conservation locale d'une grandeur physique dans l'espace, qui sont pour la plupart des équations d'évolution non-linéaires que l'on obtient grâce à des bilans de masse sur des parcelles d'espace. D'autre part, les équations de Hamilton-Jacobi sont une classe d'équations qui décrivent des mouvements en mécanique classique ou quantique.

Les objectifs de ce groupe de lecture seront doubles :
- construire des solutions à ces deux types d'équations d'équations en utilisant différents outils mathématiques (transformée de Legendre, méthode des caractéristiques, problème de Riemann, lagrangien et hamiltonien, formule de Hopf-Lax, etc.) et étudier les propriétés de ces solutions,
- comprendre l'intrication entre ces deux classes d'équations : comment associer un système de type Hamilton-Jacobi à une loi de conservation scalaire et vice-versa ?

Une grande partie de ce qui sera étudié dans ce groupe de lecture se base sur la section 3 du livre « Partial Differential Equations » de Lawrence C. Evans. Cela donnera un panorama de plusieurs techniques modernes d'analyse.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Domaines d'holomorphie et variétés de Stein* **(M1 S1)** |
(Olivier Benoist)

Soit O un ouvert de C^n. Une fonction f de O dans C est dite holomorphe si elle est holomorphe séparément en chacune des variables ou bien, de manière équivalente, si elle est localement développable en série entière. Bien que la théorie locale des fonctions holomorphes en plusieurs variables soit entièrement similaire au cas d'une seule variable, la dimension supérieure fait apparaître des différences essentielles. Par exemple, si n>1, toute fonction holomorphe sur C^n privé de la boule unité fermée s'étend automatiquement en une fonction holomorphe sur C^n tout entier. Autrement dit, cet ouvert n'est jamais le domaine de définition naturel (en un sens à rendre précis) d'une fonction holomorphe. C'est le phénomène de Hartogs.

Les ouverts de C^n qui peuvent être réalisés comme domaine de définition naturel d'une fonction holomorphe s'appellent domaines d'holomorphie. Plus généralement, on appelle variété de Stein une variété complexe qui est le domaine de définition naturel d'une fonction holomorphe.

L'objectif de ce groupe de travail est de définir rigoureusement domaines d'holomorphie et variétés de Stein, d'en donner des exemples significatifs, d'étudier leur propriétés (analytiques, topologiques...), et d'en présenter des applications. On expliquera notamment une solution du problème de Levi, qui caractérise domaines d'holomorphie et variétés de Stein par une propriété de convexité.

Prérequis : Analyse complexe ; avoir suivi les cours d'analyse fonctionnelle, de géométrie différentielle et/ou de topologie algébrique pourra être utile sans être nécessaire.

Bibliographie :

- L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, North-Holland Publishing Co. (1990).
- R. Gunning and H. Rossi, Analytic functions of several variables, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (2009).

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Introduction à la géométrie sous-riemannienne* **(M1 S1)** |
(Lino Benedetto)

Dans une variété riemannienne, toutes les directions de l'espace sont accessibles. Il est possible de se déplacer en un temps fini le long de n'importe quelle courbe et de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs quelconques dans chaque espace tangent. Cela rend les variétés riemanniennes similaires aux espaces euclidiens, ces derniers offrant d'excellentes approximations locales. Dans une variété sous-riemannienne cependant, il est seulement possible de mesurer des distances le long de certaines directions, ce qui nous oblige à ne considérer que des courbes particulières, dites horizontales. En conséquence, la géométrie sous-riemanniennes présente un certain nombre de phénomènes absents dans la géométrie riemannienne. Par exemple, les fronts d'onde des variétés sous-riemanniennes ne sont pas compacts et les géodésiques peuvent perdre leur optimalité en un temps arbitrairement petit, il peut exister des courbes anormales qui sont des courbes minimisantes pour n'importe quelle métrique possible. Enfin, la meilleure approximation locale d'une variété sous-riemannienne est un n'est plus un espace euclidien, mais un groupe de Lie nilpotent.

Ce groupe de travail se proposera de donner une introduction à la géométrie sous-riemannienne et, si le temps le permet, d'étudier le noyau de la chaleur dans une telle géométrie.

Référence :
A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. From the Hamiltonian viewpoint, par Andrei Agrachev, Davide Barilari, et Ugo Boscain

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Le polymère dirigé en milieu aléatoire* **(M1 S1)** |
(Benoist Laslier)

La modélisation mathématique de systèmes physiques a largement aidé à la compréhension de phénomènes tels que les transitions de phases et l'apparition d'équation au dérivées partielles pour décrire la limite des fluides. Cependant, par nature, les modèles associés décrivent une réalité idéalisée et simplifiée. Il est donc naturel de s'interroger sur la robustesse de ces modèles et on peut distinguer en un sens deux sortes d'erreurs à étudier. D'une part que deviennent nos résultats si (notamment à cause des simplifications nécessaires à l'étude mathématiques) les détails du modèle ne correspondent pas exactement à la réalité, c'est la question de l'universalité des limites d'échelles. Et d'autre part, que se passe t'il en présence d'impureté, de défauts dans une structure cristalline, ... C'est la question de la sensibilité au bruit.

Pour étudier cette question du bruit, nous allons nous concentrer sur un modèle de base très simple, le polymère dirigé qui n'est autre qu'un nom savant pour la marche aléatoire simple. Nous verrons que le bruit peut changer significativement le comportement du modèle mais pas toujours, c'est à dire que nous montrerons l'existence de transitions de phases crée par la présence de bruit. Nous verrons aussi apparaître des liens avec d'autres modèles, en particulier liés à la croissance de domaines du plan.

Bibliographie :

Francis Comets, "Directed Polymers in random environments", École d'été de Probabilité de Saint-Four XLVI - 2016

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Limites locales de cartes planaires et empilement de cercles* **(M1 S1)** |
(Alexis Metz-Donnadieu)

Les cartes planaires infinis sont des modèles de graphes aléatoires infinis plongés dans le plan. Ils apparaissent comme limite en loi de certains modèles de graphes aléatoires finis lorsque l'on munit l'ensemble des graphes localement finis d'une topologie adéquate (dite topologie de la convergence locale). Lorsque le graphe est une triangulation, un théorème de He et Schramm montre qu'il existe une façon naturelle de le plonger soit sur la sphère de Riemann soit sur le plan hyperbolique en le voyant comme graphe d'intersection d'un empilement de cercles. Ces plongements sont uniques à réflexions et automorphismes conformes près.

De façon remarquable, certaines caractéristiques géométriques de ce plongement sont reliées à des informations probabilistes sur notre modèle aléatoire. Par exemple, on peut relier le nombre de points d'accumulations de l'empilement au caractère récurent/transient d'une marche aléatoire sur le graphe. Dans un premier temps l'objectif de ce GT va être de définir la topologie de la convergence locale et d'introduire rigoureusement certains modèles de cartes planaires aléatoires infinies. Nous nous pencherons dans un second temps sur le lien avec la théorie des empilements de cercles. Si le temps le permet, nous regarderons également une autre manière de construire une limite en loi pour des modèles de graphes aléatoires, les limites d'échelles.

Références :

- Notes de cours de Asaf Nachmias : « Planar Maps, Random Walks and Circle Packing » de l'école d'été de Saint-Flour 2018.
- Notes de cours de Christina Goldschmidt : « Scaling limits of random trees and random graphs ».

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Groupe de travail : Représentations l-adiques et la fonction tau de Ramanujan* **(M1 S1)** |
(Gaëtan Chenevier)

Notons tau(n) le coefficient en q^n de la série formelle

f = q produit_{m>0}(1-q^m)^24 = q - 24 q^2 + 252 q^3 - 1472 q^4 + 4830 q^5 - 6048 q^6 + ...

Ramanujan avait conjecturé en 1916 les identités suivantes, dans lesquelles m et n sont des entiers, et p est un nombre premier, arbitraires :

(i) tau(mn) = tau(m) tau(n) si m et n sont premiers entre eux,

(ii) tau(p^{n+1}) = tau(p) tau(p^n)- p^{11} tau(p^{n-1}),

(iii) |tau(p)|^2 < 4 p^{11}.

Ramanujan y prouve aussi la congruence tau(p) = 1 + p^{11} modulo 691, pour tout premier p. Les propriétés (i) et (ii) ont été rapidement démontrées par Mordell, et la dernière, longtemps désignée comme "la conjecture de Ramanujan", ne l'a été que beaucoup plus tard par Deligne, comme conséquence de sa résolution des conjectures de Weil en géométrie algébrique.

Une propriété clé satisfaite par tau est que la série f est le q-développement d'une forme modulaire pour le groupe SL_2(Z). Le premier but de ce groupe de travail sera d'introduire ces objets, et d'en déduire (i) et (ii). Dans une seconde partie, mélange de théorie algébrique des nombres et de théorie de Galois, nous introduirons les représentations Galoisiennes dites ``d'Artin". Enfin, nous introduirons les nombres p-adiques et les représentations Galoisiennes associées à f, et nous essaierons de comprendre les congruences portant sur tau de ce point de vue, suivant Serre 1967-1968 et Swinnerton-Dyer 1973.

Prérequis : Algèbre 1, analyse complexe, algèbre 2 (idéalement, l'avoir suivi en première année, ou sinon, le suivre en seconde année et accepter de prendre éventuellement un peu d'avance sur certaines parties du cours).

Bibliographie :

- S. Ramanujan, On certain arithmetical functions, Trans. Cambridge Philos. Soc. 22 (1916).

- K. Ireland & M. Rosen, A classical introduction to modern number theory, Springer GTM 84 (1992).
- L. J. Mordell, On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions, Proc. Camb. Philos. Soc. 19 (1917).
- J. P. Serre, Une interprétation des congruences relatives à la fonction tau de Ramanujan, Séminaire Delange-Pisot-Poitou 9 (1967-1968).
- J. P. Serre, Cours d'arithmétique, P. U. F.(1970).
- H. P. F. Swinnerton-Dyer, On l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms, in the Antwerp conference Modular fonctions of One variable III, Springer lecture notes 350 (1973).
- P. Deligne, Formes modulaires et représentations l-adiques, séminaire Bourbaki (1968).

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie algébrique des équations différentielles en caractéristiques nulle et positive* **(M1 S1)** |

(Thomas Serafini)

La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients polynomiaux sur C se ramène souvent à l'étude de solutions dans des anneaux de séries entières et à des considérations de géométrie analytique complexe et de topologie. On peut vouloir étudier des propriétés arithmétiques des solutions d'équations différentielles à coefficients dans Q ou sa clôture algébrique, et il est pour cela utile d'étudier les équations différentielles en caractéristique positive.

En caractéristique p > 0, xp a une dérivée nulle et l'espace des solutions d'une équation différentielle à coefficients dans Fp(x) est donc un Fp(xp)-espace vectoriel. Un nouvel objet qui contrôle les solutions apparaît : la p-courbure d'une équation différentielle, qui est un opérateur linéaire.

Le but de ce groupe de travail sera tout d'abord d'introduire les participant.e.s à la théorie algébrique des équations différentielles en caractéristique 0, puis en caractéristique positive p. On démontrera le théorème de Katz-Honda, qui est une forme de principe local-global pour les équations différentielles, et on parlera selon le temps disponible et l'envie des participant.e.s de fonctions G et/ou d'équations différentielles p-adiques. On suivra principalement les livres de Singer--Van der Put et celui de Dwork--Gerotto--Sullivan, et éventuellement celui de Kedlaya, en complémentant d'articles et de notes au besoin.

Prérequis : Algèbre 1, Analyse complexe. Algèbre 2 doit être suivi en même temps ou avoir été suivi en première année. Il sera utile mais pas obligatoire d'avoir suivi Géométrie différentielle.

Références :

- M. F. Singer et M. Van der Put. Galois Theory of Linear Differential Equations.
- B. Dwork, G. Gerotto et F. J. Sullivan. An introduction to G-functions.
- K. Kedlaya. p-adic Differential Equations.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Théorie cinétique et théorème de Lanford* **(M1 S1)** |

(Florent Fougères)

Les équations cinétiques sont des équations aux dérivées partielles décrivant l'évolution de densités de particules dans l'espace des positions et des vitesses. Elles apparaissent en physique statistique comme modèle intermédiaire entre les équations de Newton à l'échelle microscopique et les équations macroscopiques de la mécanique des fluides. La théorie cinétique étudie ces équations et la façon dont elles interagissent avec les différentes échelles physiques.

La plus célèbre de ces équations est l'équation de Boltzmann, qui la première a permis de mettre en évidence l'entropie comme quantité irréversible, ouvrant la porte à une myriade de nouvelles techniques en analyse et en probabilités. La dérivation de cette équation mésoscopique à partir des équations microscopiques des gaz est connue sous le nom de théorème de Lanford, et constitue l'axe principal de ce groupe de travail.

Bibliographie :

- C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. The mathematical theory of dilute gases, 1994.
- I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier. From Newton to Boltzmann: hard spheres and short-range potentials, 2013.
- R. Glassey. The Cauchy problem in kinetic theory, 1996.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Transport optimal et applications* **(M1 S1)** |

(Julie Delon)

En 1781, Gaspard Monge publie son Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, dans lequel il étudie comment déplacer un tas de sable d'un lieu à un autre de manière « optimale ». Presque deux siècles plus tard, dans les années 1940, Leonid Kantorovitch reformule le problème, cette fois pour allouer de manière optimale des ressources en économie. Il prouve l'existence de solutions et le prix Nobel d'économie lui est décerné en 1975 pour ces travaux. Le « transport optimal » était né.

Offrant un cadre idéal pour comparer des mesures de probabilité, le transport optimal est aujourd'hui l'objet de nombreux travaux aussi bien théoriques qu'appliqués, aussi bien en analyse qu'en probabilités, et trouve des applications importantes dans des domaines inattendus. Depuis une quinzaine d'années, des progrès cruciaux ont également été établis dans le calcul numérique des solutions du transport optimal, le rendant utilisable pour comparer, interpoler ou aligner des distributions de probabilité.

Dans ce groupe de travail, on se concentrera d'abord sur la lecture du livre « Optimal Transport for Applied Mathematicians », de Filippo Santambrogio, qui propose une introduction approfondie et accessible à la théorie du transport optimal pour un lectorat de niveau M1. On introduira les formulations de Monge et de Kantorovich, leurs versions duales, l'existence et l'unicité de solutions, le théorème de Brenier, et les propriétés des solutions. On étudiera en détail certains cas particuliers, comme la dimension 1 ou le transport entre mesures Gaussiennes. On se concentrera ensuite sur les distances de Wasserstein, leurs propriétés topologiques, et sur des problèmes dérivés comme la définition de barycentres pour ces distances, ou la minimisation de fonctionnelles sur les espaces de Wasserstein. Dans une dernière partie on pourra s'intéresser aux approches numériques de calcul des solutions du transport optimal et à des applications récentes dans le domaine de la science des données.

Bibliographie :

- Optimal Transport for Applied Mathematicians, Filippo Santambrogio, Springer, 2015 (https://math.univ-lyon1.fr/~santambrogio/OTAM-cvgmt.pdf)
- Topics in optimal transportation, Cédric Villani, American Mathematical Society, 2003.
- Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science, Gabriel Peyré and Marco Cuturi, Foundations and Trends in Machine Learning, 2019 (https://optimaltransport.github.io/)

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Intégration et Probabilités* **(L3 S1)** |

(Nathanaël Enriquez et Benoît Laslier)

Nous présenterons dans un premier temps la théorie de Lebesgue qui propose une construction de l'intégrale plus souple, plus générale et mieux adaptée aux passages à la limite, que l'intégrale de Riemann. Dans cette théorie, la notion de mesure et d'espace mesuré y joue un rôle central. Kolmogorov remarque en 1930, que ces notions peuvent être utilisées pour donner une bonne axiomatique de la théorie des probabilités.

Ainsi, les probabilités pourraient être formellement vues comme un appendice de la théorie de l'intégration, mais nous verrons dans la deuxième partie de ce cours, que cette discipline développe ses propres questions et ses propres intuitions, notamment avec la notion d'indépendance d'événements, et l'étude des suites de variables aléatoires indépendantes (ou pas...).

Les fameux théorèmes limites que sont la loi des grands nombres et le théorème central limite seront le point d'orgue du cours.

Programme :

A - Théorie de l'intégration
1 - Espace mesuré
2 - Intégration sur un espace mesuré : définition et théorèmes limites
3 - Le cas de R et la mesure de Lebesgue : cohérence avec l'intégrale de Riemann
4 - Mesure produit, Théorème de Fubini et Formule de changement de variables
B - Probabilités
1 - Axiomatique de Kolmogorov : espace probabilisé, variable aléatoire, espérance.
2 - Loi d'une variable/vecteur aléatoire, fonction de répartition, génératrice, caractéristique. Lois classiques.
3 - Indépendance : d'événements, de v.a., de tribu. Calculs de lois de vecteur aléatoire.
4 - Convergence de variables aléatoires : en loi, en probabilité, presque sûre, dans L^p.
5 - Théorèmes limites : la loi des grands nombres, le théorème central limite.

Bibliographie :

- Richard Durrett : "Probability, theory and examples"
- Jean-François Le Gall : "Measure theory, Probability, Stochastic processes"

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Logique* (M1 S1) |

(Tamara Servi et Rémi Guénet)

La logique s'intéresse aux liens entre les structures mathématiques en mettant l'accent sur les phénomènes de définissabilité (par des formules): axiomatisation de certaines classes, définissabilité ou non de certains ensembles, interprétations de structures les unes dans les autres, complexité combinatoire et géométrique des ensembles définissables… Par sa nature transverse, la logique mathématique a trouvé des applications à de nombreux autres sujets mathématiques : de la combinatoire à la théorie des nombres, de la géométrie algébrique à l'analyse asymptotique. La partie centrale du cours sera une introduction à la théorie des modèles et à ses applications. La partie finale sera dédiée aux phénomènes d'incomplétude et à quelques éléments de théorie des ensembles.

Programme provisoire :

- Logique élémentaire : dualité de Boole-Stone, sémantique du premier ordre, ultraproduits, complétude et compacité, espaces de types.
- Théorie des modèles : constructions de modèles, définissabilité, plongements, catégoricité, va et vient, théorèmes d'élimination
- Preuves formelles, fonctions récursives et théorèmes d'incomplétude.
- Théorie des ensembles : axiomatisation, ordinaux, cardinaux, axiome du choix, hypothèse du continu.

Bibliographie :

- R. Cori et D. Lascar. Logique mathématique. Cours et exercices. II : Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles. Préface de J.-L. Krivine. Paris : Masson, 1993.
- M. Hils et F. Loeser. A first journey through logic. T. 89. Stud. Math. Libr. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2019.

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques des données* (M1 S1) |

(Julie Delon, Gabriel Peyré et Samuel Boïté)

Ce cours passe en revue les méthodes mathématiques et numériques fondamentales en sciences des données. La première partie du cours couvre les bases de la représentation et du traitement des données, en particulier la théorie de

Shannon, le filtrage et les ondelettes. La deuxième partie présente l'optimisation convexe et non-convexe, dans la perspective de son utilisation en apprentissage automatique et en particulier pour les réseaux de neurones. Le cours est validé par un petit projet et un examen.

Références :

- Pour la théorie : https://mathematical-tours.github.io/book/
- Pour le numérique et les TPs : www.numerical-tours.com

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Mathématiques pour économistes* **(PT)**|

(Ons Rameh)

Le but de ce cours est de fournir aux étudiants les outils d'analyse nécessaires pour suivre des cours d'économie s'appuyant sur un formalisme mathématique. La première partie du cours visera à introduire les notions de topologie et d'algèbre linéaire nécessaires, tandis que la deuxième fournira les bases de calcul différentiel requises afin d'aborder l'optimisation sous contraintes et la convexité en dimension arbitraire.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Optimisation et transport optimal* **(M1 S2)** |
(Quentin Mérigot et Alexandre Bertolino)

L'objectif de ce cours est de fournir une introduction approfondie à l'optimisation convexe et au transport optimal. La première partie se concentrera sur la convexité en dimensions finie et infinie, abordant des propriétés classiques des ensembles et des fonctions convexes, telles que les points extrémaux, les cônes normaux, la différentiabilité et la sous-différentiabilité des fonctions convexes, etc. Cette partie se terminera par une introduction à la dualité en optimisation convexe et certaines de ses applications.

La deuxième partie du cours portera sur l'optimisation numérique. Nous explorerons d'abord des approches classiques telles que la descente de gradient et la méthode de Newton, avant de nous tourner vers quelques méthodes plus modernes adaptées aux problèmes de grande dimension.

Enfin, la troisième partie sera dédiée à la théorie du transport optimal. Nous introduirons les problèmes de Monge et de Kantorovich, ainsi que la dualité de Kantorovich et les théorèmes d'existence et d'unicité. Nous examinerons ensuite l'espace de Wasserstein, la notion de flot-gradient dans cet espace, la version "entropisée" du transport optimal, et enfin certaines applications pratiques du transport optimal.

Bibliographie :

- Classical and modern optimization, Guillaume Carlier, 2022
- Optimal Transport for Applied Mathematicians, Filippo Santambrogio, 2015

■ ■ ■ ■ ■

| *Probabilités discrètes pour physiciens* **(PT)** |
(Cristina Toninelli)

Abstract: This course will present the probabilistic model and the fundamental limit theorems for sums of independent real-valued random variables. The central object of the course is the heads or tails game or the symmetric random walk on the integers.

Résumé : Ce cours présentera le modèle probabiliste et les théorèmes limites fondamentaux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles. L'objet central du cours est le jeu de pile ou face ou la marche aléatoire symétrique sur les entiers.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Processus stochastiques* (M1 S1) |

(Djalil Chafaï et Alexis Metz-Donnadieu)

Ce cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques à temps et espace discrets, avec quelques excursions dans le cas continu :

- Révisions sur les convergences, théorèmes limites, et intégrabilité uniforme
- Vecteurs gaussiens
- Espérance conditionnelle
- Martingales à temps discret
- Chaînes de Markov à temps et espace discrets
- Processus de Poisson, et chaînes de Markov à temps continu et à espace discret
- Mouvement brownien
- Quelques modèles emblématiques issus de la physique, de la biologie, et de l'informatique.

Des notes de cours spécifiques sont disponibles sur Moodle.

Bibliographie :

- P. Barbe, M. Ledoux. Probabilité, 2007
- J.-F. Le Gall. Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, notes de cours, 2006
- J. R. Norris. Markov chains, 1997
- D. Williams. Probability with martingales, 1991

■ ■ ■ ■ ■

| *Statistique* **(M1 S1)** |

(Eddie Aamari et Ons Rameh)

La statistique s'intéresse aux méthodes permettant d'ajuster un modèle probabiliste aux observations issues d'un phénomène aléatoire. Une fois ajusté, ce modèle peut être utilisé pour expliquer (sciences expérimentales), déterminer des causes (santé), évaluer des risques (assurance, environnement), ou prédire (décision). Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

Menu :

- Modèles et expériences statistiques
- Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
- Régression linéaire : estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussien
- Méthodes d'estimation : méthode des moments, modèles exponentiels, maximum de vraisemblance, tests du chi-deux
- Outils bayésiens : risque bayésien, estimateur bayésien, optimalité minimax
- Grande dimension et données massives : parcimonie, descente de gradient
- Introduction à la statistique non-paramétrique : test de Kolmogorov-Smirnov, estimation de densité

Bibliographie :

- Benoît Cadre & Céline Vial (2012). Statistique mathématique, cours et exercices corrigés
- Didier Dacunha-Castelle & Marie Duflo (1986). Probability and statistics Vol II
- Aad van der Vaart (1998). Asymptotic statistics

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Introduction to generative modeling with flows and diffusions* **(M2 S2)** |
(Eric Vanden Eijden)

Generative models based on dynamical transport have recently led to significant advances in unsupervised learning. At mathematical level, these models are primarily designed around the construction of a map between two probability distributions that transform samples from the first into samples from the second. While these methods were first introduced in the context of image generation, they have found a wide range of applications, including in scientific computing where they offer interesting ways to reconsider complex problems once thought intractable because of the curse of dimensionality. In this class, we will discuss the mathematical underpinning of generative models based on flows and diffusions, with special focus on understanding how to structure the transport to best reach complex target distributions while maintaining computational efficiency, both at learning and sampling stages. We will also discuss applications of generative AI in scientific computing, in particular in the context of Monte Carlo sampling, with applications to the statistical mechanics and Bayesian inference, as well as probabilistic forecasting, with application to fluid dynamics and atmosphere/ocean science.

Fundamentals of measure transport theory
Flow matching with stochastic interpolants
Diffusive Transport with stochastic interpolants
Link with normalizing flows and score-based diffusion models
Link with probabilistic denoising methods
Connections to optimal transport theory and Schrödinger bridges
Algorithmic aspects
Training strategies for flow-based models
Efficient sampling techniques for diffusion models
Balancing expressivity and computational tractability
Recent algorithmic innovations and efficiency improvements
Evaluation metrics for generative models (likelihood measures, FID, Inception Score)
Challenges and limitations of current models
Applications in Scientific Computing
Monte Carlo sampling applications: Statistical mechanics simulations, Bayesian inference and uncertainty quantification

Probabilistic forecasting: Fluid dynamics predictions, Climate and atmospheric/oceanic modeling, Domain-specific adaptations and constraints, Key breakthrough papers and state-of-the-art applications, Future research directions and open problems

Prerequisites

Probability theory and statistics

Basics of ordinary and stochastic differential equations

Elements of partial differential equations

Machine learning fundamentals

Programming experience (Python recommended)

Horaires :

Lundi 13h30 - 15h30 et mercredi 10h15 - 12h15 au S2.

■ ■ ■ ■ ■

| *Systèmes dynamiques* **(M1 S1)** |
(Cyril Houdayer et Lino Benedetto)

Dans ce cours, nous allons donner une introduction aux systèmes dynamiques topologiques et mesurés en illustrant la théorie par des exemples provenant de la théorie des groupes, de la géométrie, de la dynamique symbolique et des espaces homogènes et en présentant quelques applications à d'autres domaines.

Le cours sera composé de trois parties :

- Dynamique topologique : Récurrence, transitivité, mélange, unique ergodicité, entropie topologique, applications à la théorie de Ramsey.
- Dynamique mesurée : Ergodicité, mélange faible, théorèmes ergodiques, entropie mesurée et principe variationnel, exposant de Lyapunov de marches aléatoires dans SL_d(R)
- Dynamique homogène : Réseaux des groupes localement compacts, exemple de SL_d(Z) < SL_d(R), propriété de Howe-Moore pour SL_d(R), théorème d'ergodicité de Moore.

Des notes de cours en anglais sont disponibles sur la page web de l'enseignant.

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie algébrique* **(M1 S2)** |

(Julien Marché et Chuhao Huang)

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique. On étudiera le groupe fondamental et la théorie des revêtements avant de définir l'homologie et d'étudier ses propriétés. Tout au long du cours on verra des applications de ces outils.

Bibliographie :

- Algebraic Topology, Allen Hatcher
- Topology and geometry, Glen Bredon

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie et calcul différentiel* **(L3 S1) |**

(Julien Guillod et Corentin Gentil)

1. Topologie générale et espaces métriques :
   Espaces métriques et espaces topologiques.
   Complétude, compacité, connexité.
   Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2. Espaces de Banach :
   Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
   Théorème de Hahn-Banach.
   Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3. Calcul différentiel :
   Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
   Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4. Équations différentielles ordinaires :
   Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
   Lemme de Gronwall et estimations