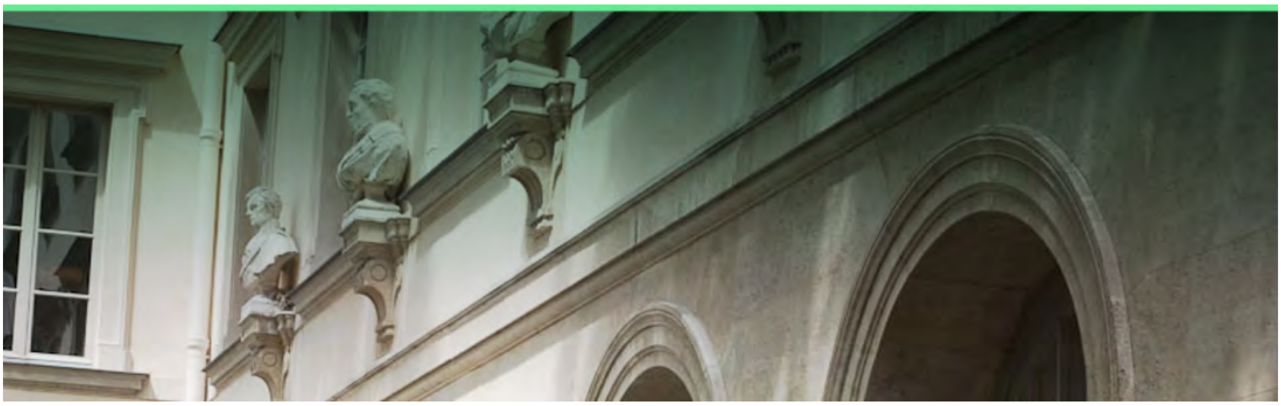
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

ENSEIGNEMENT

2021-2022



Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris cedex 05 | Tél : 01 44 32 31 72 | Mél : education@math.ens.fr

Le département de mathématiques et applications offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiants par an), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec les universités Sorbonne Université, Université de Paris, Université Paris-Dauphine PSL, Université de Paris-Saclay, Université Sorbonne Paris-Nord, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Directeur de l'enseignement des mathématiques : Ariane Mézard
| Directeur des études des mathématiques : Raphaël Cerf
| Secrétariat de l'enseignement : Marion Peres

45 rue d'Ulm 75230 Paris cedex 05 |
Tél : 01 44 32 31 72 |
Page d'accueil : http://www.math.ens.fr/enseignement/|
Mél : education@math.ens.fr|

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION

OBJECTIFS

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématiciens purs et appliqués, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie,…). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

DEBOUCHES

À la sortie de la formation, l'étudiant peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il peut également prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- chercheur en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- enseignant-chercheur à l'université ;
- ingénieur mathématicien dans l'industrie ;
- enseignant en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Ecoles d'ingénieurs, formations spécialisées...).

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ENS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.

Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

Candidature 2022/2023

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiants ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent. Toutes les informations se trouvent sur :

- le site enseignement des mathématiques : http://www.math.ens.fr/enseignement/
- ou sur le site l'École Normale Supérieure : https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours/concours-normalien-etudiant

Le diplome de l'ENS majeure mathematiques

Les normaliens reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu qu'ils aient satisfait les conditions suivantes :

- l'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- la validation de chacune des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- la validation de 72 ECTS en plus des diplômes nationaux de licence et de master, dont :
  - 24 ECTS de cours mathématiques
  - 24 ECTS de cours scientifiques non-mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives) en accord avec le tuteur.
- la validation d'un cours de langue par année d'inscription au DENS.

Inscription a l'universite

Après leur admission, les normaliens s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de leurs études, ils doivent en particulier obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;
- pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;

- à l'issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiants qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un directeur de recherche ainsi que des divers encadrants de l'université d'inscription (délégué aux thèses, directeur de l'école doctorale de rattachement, directeur du laboratoire d'accueil).

TUTORAT

L'encadrement des étudiants en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un tuteur, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, est affecté à chaque étudiant. Choisi aléatoirement en première année, il sera, pour les autres années, fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année. Le rôle du tuteur est d'aider l'étudiant à l'organisation de sa scolarité, de le conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études est mis au point par l'étudiant, son tuteur et le directeur des études du DMA, signé par ces parties et transmis à la directrice des études sciences de l'ENS. Ce programme régule les conditions de validations de l'année d'étude correspondante. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement son tuteur.

STAGE

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant à un environnement différent.
La plus grande souplesse est laissée aux étudiants pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec son tuteur et les directeurs des études et de l'enseignement du DMA.
Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrants potentiels pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Les étudiants sont supposés contacter les encadrants étrangers proposés non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Seminaire « des mathematiques »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois après le thé du département de mathématiques et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches mathématiques.

Planning

Attention, ces dates sont susceptibles de modification, consulter l'agenda en ligne.

Réunion de présentation des cours de première année
Jeudi 16 septembre 2021 à 15h30, Amphithéâtre Galois

Réunion de présentation des cours de deuxième année
Vendredi 3 septembre 2021 à 14h, Amphithéâtre Galois

Commission des études 2021, seconde session, lundi 20 Septembre 2021

Premier semeste:

Début des cours
Première année : lundi 20 septembre 2021
Deuxième année : lundi 6 septembre 2021

Vacances et jours fériés
Vacances de la Toussaint : du samedi 30 octobre au dimanche 7 novembre 2021
Vacances de Noël : du samedi 18 décembre au dimanche 2 janvier 2022

Fin des cours
Première année : vendredi 14 janvier 2022
Deuxième année : vendredi 7 janvier 2022

Examens du premier semestre

Première année : du lundi 17 janvier au vendredi 21 janvier 2022
Deuxième année : du lundi 10 janvier au vendredi 14 janvier 2022

Réunion de présentation du second semestre
Mercredi 26 janvier 2022 à 14h, Amphithéâtre Galois

<u>Deuxième semestre</u>

Début des cours
Jeudi 27 janvier 2022

Vacances d'hiver : samedi 26 février au dimanche 6 mars 2022
Vacances de printemps : samedi 25 avril au dimanche 9 mai 2022

Fin des cours
Mercredi 25 mai 2022

Examens du second semestre
Mercredi 1 juin au mardi 7 juin 2022

Semaine d'exposés de mathématiques de première année : lundi 13 juin au vendredi 17 juin 2022

Commissions des études 2022:
1ère session (première et deuxième années) : mercredi 22 juin 2022

2ère session (première et deuxième années) : mardi 20 septembre 2022

ENSEIGNEMENT

ORGANISATION DE LA FORMATION

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec le tuteur, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrants du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie.

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiants et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur et du directeur des études ou de l'enseignement pour tous les choix concernant leur programme d'études.

FILIERE MATHEMATIQUES

Première année

Les étudiants sont inscrits en troisième année de licence (L3). Ils suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en seconde année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiants sont inscrits en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiants dont l'avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l'étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L'inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l'élève. Avec son tuteur, l'élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiants composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

■ FILIERES PLURIDISCIPLINAIRES

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l'ENS. Organisées conjointement entre le département de mathématiques et les départements de physique, d'informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiants motivés de poursuivre une double formation ;
- aux étudiants encore indécis de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. Ils sont inscrits au département de mathématiques. En deuxième année, ils s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Une mention double majeure de Mathématiques/Physique du DENS est en cours de création. Son obtention nécessite la validation du cours spécifique de double majeure Maths/Physique.

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d'informatique. Les élèves entrés par le concours Info s'inscrivent au département d'informatique, les élèves entrés par le concours MPI au département de mathématiques. Ils ont un tuteur dans leur département d'inscription. En deuxième année, ils s’orientent soit vers les mathématiques soit vers l’informatique et rejoignent le département de leur choix.

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l’étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l’ENS, en partenariat avec le département de biologie de l’ENS, vise à former des chercheurs capables d’exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l’analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Objectifs du cursus

Les étudiants issus de la filière mathématiques/biologie de l’ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Ils auront appris à décortiquer la littérature spécialisée, suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et initier dialogue et collaboration avec les biologistes dans leurs laboratoires. Les deux années de cursus permettent aux élèves concernés de continuer, suivant leur parcours,

- ou bien en suivant un M2 de mathématiques de la modélisation,
- ou bien en suivant un M2 de biologie ou de sciences cognitives.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s’inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de neurosciences. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tous les étudiants du département de mathématiques ; l’inscription à ces cours n’engage donc pas les étudiants concernés à l’exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

REGLES D'OBTENTION

| Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone. |

- PREMIÈRE ANNÉE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

Commun pour toutes les filières	4 cours de niveau licence : (1) o Algèbre 1 o Analyse complexe o Intégration et probabilités o Topologie et calcul différentiel	12 ECTS x 4 = 48 ECTS
Filière Mathématique	Mémoire et exposé de 1ère année	6 ECTS x 2 = 12 ECTS
Filière Math/Physique	Cours spécifiques du cursus mixte o Information, inférence et physique statistique (2) o Physique des particules	
Filière Math/Informatique	Cours spécifique du cursus mixte) o Apprentissage statistique	
Filière Math/Biologie	Mémoire et exposé d'interface math-biologie	
Total		60 ECTS

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental.

(2) Ce cours peut-etre remplacé, après accord avec les responsables du parcours mixte, par un cours de l'un des deux départements d'accueil.

L'obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s'il ne compte pas pour la L3) parmi :
  Algèbre 2
  Analyse complexe
  Analyse fonctionnelle
  Géométrie différentielle
  Logique

- Un groupe de lecture parmi :
  Marches et graphes aléatoires, Remy Mahfouf ENS
  Outils probabilistes pour l'étude de matrices aléatoires, Laure Dumas CNRS/ENS
  Problèmes variationnels, optimisation et contrôle, Cyril Letrouit ENS

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filières pluridisciplinaires

Mathématiques/physique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 de physique :

- des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  Physique statistique des systèmes en équilibre (1er sem) (9 ECTS)
  Introduction à la mécanique quantique (1er sem) (9 ECTS)
  Relativité et électromagnétisme (2ème sem) (9 ECTS)
  Hydrodynamique (2ème sem) (9 ECTS)
  Physique du solide (2ème sem) (9 ECTS)

- le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheurs des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

<u>Mathématiques/informatique</u>

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

  Semestre 1 :

  Algorithmique et programmation (9 ECTS)
  Systèmes numériques (9 ECTS)
  Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
  Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
  Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

  Semestre 2 :

  Systèmes et réseaux (**obligatoire**, 9 ECTS)
  Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
  Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
  Initiation à la cryptologie (9 ECTS)
  Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
  Bases de données (9 ECTS)
  Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique :

  Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un chercheur et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/biologie

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours d'Introduction aux sciences du vivant (S1)
- Le cours de M1 d'Analyse fonctionnelle (S2, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2^{nde} année)
- Le cours de Mathématiques pour l'environnement et la société (S2)
- Le groupe de lecture en biologie : Modélisation des systèmes biologiques (S2)
- L'école d'été de biologie de Marseille-Luminy ou bien un stage de neurosciences

▪ DEUXIÈME ANNÉE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : o Algèbre 2 o Analyse complexe (1) o Analyse fonctionnelle (3) o Géométrie différentielle (3) o Logique (3) o Processus stochastiques (2)	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : o Mathématiques des données o Mathématiques pour l'environnement et la société (3) o Statistiques (2) o Systèmes dynamiques o Topologie algébrique (3)	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours recommandé pour la filière maths/biologie
(3) Cours accessible dès la 1ère année

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)
- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  - Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles,
  - Mouvements Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux,
  - Probabilités en grande dimension
  - EDP de la mécanique quantique

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail des cours avancés.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1e année pour les élèves inscrits directement en 2e année
- Un cours dans une discipline autre que les mathématiques, à choisir dans la liste des cours non mathématiques proposés par le département de mathématiques ou dans la maquette d'un autre département scientifique (physique, informatique, biologie…) en accord avec le tuteur.

  | *Remarque : Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière Mathématiques/physique

Une mention double majeure Maths/Physique du DENS est actuellement en cours de création. Sa validation nécessitera la validation du cours spécifique de double majeure

- EDPs : de la modélisation à la résolution (S1)

Filière mathématiques/biologie

- Trois cours à valider parmi :
  - Écologie/évolution (S1)
  - Biologie cellulaire (S1)
  - Neurosciences du Cogmaster (S1)
  - Machine learning du Cogmaster (S2)
- Un projet long en biologie ou en neurosciences

- TROISIÈME ANNÉE

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)
- La composition du *mémoire de Diplôme*
  Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Présentation du domaine de recherche*, présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).
- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - cours de M2 des universités partenaires
  - Fibrés de Higgs et représentations de groupes de surfaces, Nicolas Tholozan
  - Numerical methods for fluid dynamics, Emmanuel Dormy
  - Opérateurs aléatoires, Laure Dumaz
  - Analyse des EDP non linéaires issues de la géométrie, Paul Laurain
  - Systèmes à diffusion croisée, Ayman Moussa

- Un groupe de travail auto-organisé *(facultatif)*.
- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif)*.

| *Remarque : une expérience à l’étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l’ENS.* |

COURS DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2021/2022

PREMIÈRE ANNÉE

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 (L3, 12 ECTS) — G. Chenevier CNRS/ENS
(70h : 42h cours + 28h TD) — A. Vanhaecke ENS

• Cours spécifique cursus Informatique/Maths/Physique — M. Mézard ENS
Information, inférence et physique statistique (L3, 6 ECTS)
(24h cours)

• Intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) — A.-L. Dalibard SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — B. Mallein USPN

• Topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) — D. Chelkak ENS
(70h : 42h cours + 28h TD) — L. Vacossin ENS

• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) : — L. Dumaz CNRS/ENS
Outils probabilistes pour l'étude de matrices aléatoires

• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) : — R. Mahfouf ENS
Marches et graphes aléaloires

• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) : — C. Letrouit ENS
Problèmes variationnels, optimisation et contrôle

• *Cours de 2^nde^ année accessible en 1^ère^ année :* Logique (M1, 12 ECTS) — A. Deloro SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — G. Sebilet-Deloge UP

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) — A. Mézard SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — O. de Gaay Fortman ENS

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) — L. Moonens PS
(70h : 42h cours + 28h TD) — S. Bronstein ENS

• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) — N. Bergeron SU
(70h : 42h cours + 28h TD) — P. Laurain UP

• Mathématiques pour l'environnement et la société (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS)
(56h cours) — B. Maury PS

• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :*	
Topologie algébrique (12 ECTS)	O. Benoist ENS
(63h : 35h cours + 28h TD)	C. Emprin ENS
• *Cours spécifique cursus Info/Maths:*	F. Bach ENS
Apprentissage statistique (12 ECTS)	A. Rudi ENS
(35h cours + 24hTD)	
• *Cours spécifique cursus Maths/Physique:*	A.-K. Kashani-Poor ENS
Physique des particules (6 ECTS)	G. Ferrando ENS
(48h : 24h de cours+24h de TD)	
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :*	A. Véber Polytechnique
Modélisation des systèmes biologiques (12 ECTS)	R. Ferrière ENS
	D. Thieffry ENS

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un encadrant appartenant le plus souvent au département de mathématiques et applications de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.
Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un enseignant de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un enseignant de mathématiques et/ou d'un enseignant d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;
- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiants réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.
Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Cours non mathématiques

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques. Toute autre proposition pourra être étudiée avec le tuteur.* |

- économie - http://www.economie.ens.psl.eu/
  - Introduction aux théories de la croissance économique
  - Introduction à l'économétrie
  - Economie pour scientifiques
- biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/
  - Frontiers in biology
  - Génétique et Biologie Moléculaire
  - Neurosciences
  - Océanographie
  - Biologie cellulaire

– physique - http://www.phys.ens.fr/

- Physique statistique des systèmes en équilibre
- Introduction à la mécanique quantique
- Éléments de mécanique analytique
- Relativité et électromagnétisme
- Hydrodynamique
- Mécanique des milieux continus
- Introduction à l’astrophysique
- Physique du solide
- Optique
- Physique des particules
- Ordres de grandeur, lois d’échelles et méthodes perturbatives

– informatique - http://diplome.di.ens.fr/

- Langages formels, calculabilité et complexité
- Algorithmique et programmation
- Langages de programmation et de compilation
- Systèmes numériques
- Système d’exploitation
- Lambda calcul et logique informatique (à l’ENS Paris Saclay)
- Théorie de l’information et codage
- Initiation à la cryptologie
- Sémantique et application à la vérification de programmes
- Bases de données

– études cognitives - http://cognition.ens.fr

- Introduction to Cognitive Neuroscience
- Introduction to Cognitive and Computational Neuroscience

■ SECONDE ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 (M1, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	F. Charles PS A. Etève ENS
• *Cours spécifique de la double majeure Maths/Physique* EDPs : de la modélisation à la résolution (12 ECTS) (56h cours/TD)	E. Dormy CNRS/ENS et I. Gallagher UP
• Logique (M1, 12 ECTS) (70h :42h cours + 28h TD)	A. Deloro SU G. Sébilet Deloge UP
• Processus stochastiques (M1, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	G. Giacomin UP R. Mahfouf ENS
• Statistique (M1, 12 ECTS) (63h : 35h cours + 28h TD)	S. Gaïffas UP A. Ben Hamou SU
• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) *(63h : 35h cours + 28h TD)*	R. Cerf PS Y. Chaubet PS
• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) (63h : 35h cours + 28h TD)	G. Peyré CNRS/ENS G.-J Huizing, P. Albin, ENS
• Ateliers Maths/Entreprise (6 ECTS)	B. Maury PS C. Letrouit ENS

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	L. Moonens PS S. Bronstein ENS
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	N. Bergeron SU P. Laurain SU
• Mathématiques pour l'environnement et la société (M1, 12 ECTS) (56h : 56h cours/TP)	B. Maury PS
• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) (63h : 35h cours + 28h TD)	O. Benoist CNRS/ENS C. Emprin ENS
• Cours avancé : EDP de la mécanique quantique (6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)	D. Gontier PSL

• Cours avancé : Mouvement Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail) M. Bauer ENS/CEA

• Cours avancé : Probabilités en grande dimension D. Chafai PSL
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

• Cours avancé : Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles E. Giroux CNRS/ENS
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

Groupes de travail, premier semestre

Autour des conjectures de Kazhdan-Lusztig	A. Etève ENS
Cartes aléatoires, circle packing et limites locales	T. Lenoir ENS
Classification des fibrés vectoriels et les classes caractéristiques	V. Lebovici ENS
Courbes elliptiques	R. Branchereau ENS
Équations de transport et champs de vecteurs de faible régularité	A. Moussa PSL
Probabilités libres et matrices aléatoires	D. Chafai PSL
Les sphères exotiques	C. Emprin ENS
Lois de Weyl	L. Vacossin ENS
Théorie spectrale et mécanique quantique	D. Gontier PSL

Cours spécifique de la double majeure Maths/Physique, premier semestre

EDPs : de la modélisation à la résolution E. Dormy CNRS/ENS et I. Gallagher UP

Cours avancés, deuxième semestre

EDP de la mécanique quantique	D. Gontier PSL
Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles	E. Giroux CNRS/ENS
Mouvements Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux.	M. Bauer ENS/CEA
Probabilités en grande dimension	D. Chafai PSL

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 7 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Cours non mathématiques

| *Il est nécessaire de valider un minimum de 12 ECTS en première année et 24 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques. Toute autre proposition pourra être étudiée avec le tuteur.* |

Voir la liste des cours proposés par le département de mathématiques. On peut choisir aussi, en accord avec le tuteur, d'autres cours des départements scientifiques de l'ENS.

- TROISIÈME ANNÉE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

L'auto-organisation de groupes de travail est vivement recommandée. Elle peut être encadrée, si besoin, par un enseignant du DMA.

Deuxième semestre :

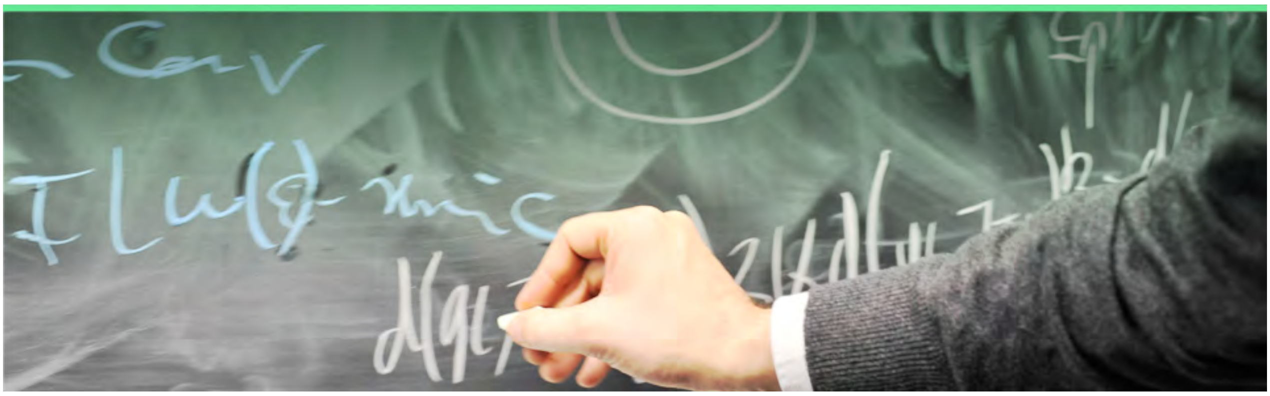
Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS (9ECTS, 24h cours). Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription pour les conditions pédagogiques.

• Analyse d'EDP non-linéaires issues de la géométrie	P. Laurain UP
• Fibrés de Higgs et représentations de groupes de surfaces	N. Tholozan ENS
• Numerical methods for fluid dynamics	E. Dormy ENS
• Opérateurs aléatoires	L. Dumaz ENS
• Systèmes à diffusion croisée	A. Moussa PSL

ENSEIGNEMENTS HORS DEPARTEMENT

Le DMA offre également un ensemble de cours de mathématiques dans d'autres départements de l'ENS.

- Cours de mathématiques pour les littéraires	*V. Lebovici ENS*
- Cours de probabilités et statistiques pour économistes	*M. Sander ENS*
- Mathématiques pour économistes	*L. Pille-Schneider ENS*
- Probability	*R. Cerf PS et G. Smerljian ENS*



PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2021/2022

▪▪▪▪▪

| Algèbre 1 (L3)|
(Gaetan Chenevier et Arnaud Vanhaecke)

Ce cours d'algèbre est une introduction à la théorie des groupes et des modules.

Les groupes sont nés avec les travaux de Lagrange et de Galois sur la résolubilité par radicaux des équations polynomiales à une variable (groupes de permutations). Ils apparaissent également en filigrane, et jouent un rôle important, dans les recherches arithmétiques de Gauss (arithmétique modulaire, groupes de classes).
La notion abstraite de groupe, dégagée par Cayley et Cauchy, est remarquable par le peu d'axiomes nécessaire à la définir et la richesse de ses applications dans les mathématiques et les autres sciences. Elle intervient par exemple dans les fondements de l'algèbre linéaire, dans l'étude des symétries des structures géométriques ou algébriques, en cristallographie, ou dans diverses généralisations de l'analyse de Fourier (théorie des ``représentations"), sans compter que de nombreux invariants construits en mathématiques sont des groupes, par exemple en topologie. La classification des groupes simples finis, achevée en 2004, est l'un des théorèmes les plus marquants des mathématiques, et la théorie des groupes continue de faire l'objet de nombreuses recherches sous divers déguisements (groupes de Lie, groupes algébriques, théorie géométrique des groupes,

représentations, algèbres d'opérateurs...).

Programme provisoire du cours :

I
-- Structures quotients (ensembles, groupes, anneaux).
-- Morphismes, sous-groupes, générateurs, extensions, principe de ``dévissage''.
-- Structure des groupes abéliens de type fini et applications.

II
-- Introduction aux modules.
-- Arithmétique élémentaire des anneaux (euclidiens, principaux, factoriels).
-- Structure des modules de type fini sur les anneaux principaux, retour sur la réduction des endomorphismes.

III
-- Actions de groupes, groupes de permutations, groupes de symétrie.
-- Étude des p-groupes, théorèmes de Sylow.
-- Automorphismes, produit semi-direct.
-- Groupes simples finis, groupes de petit cardinal.

IV (plus ou moins étoffé selon le temps disponible)
-- Algèbre multilinéaire et tensorielle.
-- Groupes orthogonaux et symplectiques.

V
-- Semisimplicité.
-- Représentations linéaires des groupes finis.
-- Table des caractères.

▪▪▪▪▪

| Algèbre 2 (M1)|
(François Charles et Arnaud Eteve)

L'objet de ce cours, qui fait suite au cours d'algèbre 1, et de donner les bases de la théorie des anneaux et des corps : il s'agit des débuts de l'algèbre commutative. Les thèmes abordés seront les suivants :

-notions de base sur les anneaux (commutatifs) : idéaux, spectre, localisation, modules. Anneaux noethériens, anneaux principaux, anneaux de Dedekind.
-exemples d'anneaux : anneaux d'entiers de corps de nombres, anneaux de polynômes.
-modules de type fini sur un anneau principal, applications.
-extensions de corps et correspondance de Galois, exemples et applications.
-quelques résultats sur les algèbres de type fini sur un corps : Nullstellensatz, lemme de normalisation de Noether, ...

Si le temps le permet, on conclura le cours par l'étude des actions de groupes sur les anneaux de polynômes.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Analyse complexe (L3/M1)|

(Ariane Mézard et Olivier de Gaay Fortman)

L'analyse complexe étudie les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globablement. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globablement, leur étude nécessite la mise en oeuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Nous concluons par quelques exemples d'applications à des domaines variés.

La théorie de Cauchy donne les premières propriétés des fonctions analytiques complexes et révèle l’importance de la topologie des ensembles de définition de ces fonctions. Après avoir démontré l’analycité des fonctions holomorphes, nous donnons les premières propriétés (Théorème de l’application ouverte, Lemme de Schwarz) et les grands théorèmes (Théorème de Runge, Théorème de Weierstrass, Théorème de Riemann, Théorème de Picard...). L’étude des singulartiés conduit à la notion de fonctions méromorphes avec de nombreuses applications au calcul d’intégrales via la théorie des résidus et aux problèmes d’approximation (méthode du col). Nous concluons par plusieurs incursions en théorie des nombres : études des fonctions elliptiques et modulaires et des séries de Dirichlet.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Analyse fonctionnelle (M1)|
(Laurent Moonens et Samuel Bronstein)

Dans ce cours, qui comportera deux parties principales, on étudiera les bases de l'analyse fonctionnelle abstraite et les principaux espaces de fonctions utiles dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Le cours commencera par l'analyse abstraite des espaces vectoriels topologiques (localement convexes) et de leurs topologies classiques (dont les topologies « faibles »), avec une attention particulière portée, à l'issue de cette première partie, aux espaces lisses et uniformément convexes (dont relèvent les espaces de Lebesgue non « extrêmes »). Cette partie sera l'occasion d'aborder des résultats classiques importants d'analyse linéaire (théorèmes de Hahn-Banach, de Banach-Alaoglu, de Krein-Milman etc.).

La théorie des distributions de L. Schwartz sera ensuite introduite de façon « topologique » à l'aide des concepts et résultats développés dans la première partie du cours. Quelques résultats fondamentaux sur les distributions seront obtenus (théorème de régularisation, théorème de constance, principe de Banach-Steinhaus).

Pour finir, nous parlerons d'espaces de Sobolev, des théorèmes d'injection classiques (de Sobolev et de Rellich-Kondrachov) qui y sont valides et de leurs applications à des problèmes elliptiques.

Si le temps le permet, on consacrera les dernières heures de cours aux fonctions à variation bornée.

▪▪▪▪▪

| Analyse des EDP non linéaires issues de la géométrie : des applications harmoniques à la théorie de Yang-Mills ***(M2)|***

(Paul Laurain)

L'invariance conforme joue un rôle important en physique et en géométrie : théorie conforme des champs, relativité générale, supraconductivité, surface de Riemann, champs de Yang- Mills. Dans ce cours on étudiera l'aspect analytique de certains de ces problèmes. Plus précisément, on s'intéressera à l'analyse d'EDP non-linéaires issues de problème conformément invariants : applications harmoniques, problème de courbure prescrite, Ginzburg-Landau et Yang-Mills.

On commencera par l'équation de courbure moyenne constante ce qui me permettra d'introduire les phénomènes de compacité par compensation, ensuite on développera la théorie via l'approche générale de Rivière [2]. Puis nous nous intéresserons au problème de Ginzburg- Laundau [3], que l'on peut considérer comme une version abélienne de Yang-Mills. Enfin, nous étudierons les travaux d'Uhlenbeck sur l'équation Yang-Mills et si le temps le permet on donnera des applications géométriques [1].

Prérequis : EDP elliptiques, géométrie différentielle (si possible Riemannienne).

Références

[1] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck. Instantons and four-manifolds, volume 1 of Mathematical Sciences Research Institute Publications. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
[2] Tristan Rivière. Conformally invariant variational problems. 2012.
[3] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model, volume 70 of Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

ANALYSIS OF NONLINEAR PDES FROM GEOMETRY : FROM HARMONIC MAPS TO YANG-MILLS THEORY

Conformal invariance plays an important role in physics and geometry: conformal field theory, general relativity, superconductivity, Riemann surface, Yang-Mills fields. In this course we will study the analytical aspect of some of these problems. More precisely, we will be interested in the analysis of nonlinear PDEs resulting from conformal invariant problem: harmonic maps, prescribed curvature problem, Ginzburg-Landau and Yang-Mills.

We will start with the constant mean curvature equation which will allow me to introduce the phenomena of compactness by compensation, then we will develop the theory via the general approach of Rivière [2]. Then we will focus on the Ginzburg-Laundau problem [3], which can be considered as an abelian version of Yang-Mills. Finally, we will study Uhlenbeck's work on the Yang-Mills equation and if time permits we will give geometric applications [1].

Background: elliptic PDE, differential geometry.

REFERENCES

[1] Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck. Instantons and four-manifolds, volume 1 of Mathematical Sciences Research Institute Publications. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[2] Tristan Rivière. Conformally invariant variational problems. 2012.

[3] Etienne Sandier and Sylvia Serfaty. Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model, volume 70 of Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Atelier Maths-entreprise |
(Bertrand Maury et Cyril Letrouit)

Le point de départ cet atelier est le suivant : une première séance est consacrée à la présentation par un industriel d'une problématique à laquelle il est confronté. Cette problématique ne se présente pas nécessairement sous la forme forme d'un problème mathématisé, mais on peut espérer qu'une formalisation mathématique permette d'apporter des éléments de réponses, par utilisation d'outils existants, ou introduction d'outils conceptuels nouveaux, avec éventuellement utilisation de la simulation numérique pour approfondir l'exploration. Le groupe de participants disposera alors de quelques semaines, en toute autonomie, pour apporter des éléments de réponse à ce problème, qui seront présentés lors d'une séance de clôture à l'intervenant industriel, et feront l'objet d'un rapport de synthèse des pistes explorées.

Les années précédentes, des sujets ont par exemple été proposés par

* Aqemia, une start-up en pharma-tech qui souhaitait des pistes pour son modèle commercial ;

* Greenweez, grand supermarché bio en ligne qui cherche à optimiser l'emballage de ses paquets ;

* Google, sur des problèmes d'erreurs générées par des serveurs ;

* Criteo, à propos de systèmes d'enchères pour la publicité en ligne ;

* Vallée Sud, établissement public territorial du sud de Paris, pour optimiser les collectes de déchets.

Cet « exercice » a vocation à familiariser les élèves avec la démarche de modélisation ex nihilo, qui consiste à formaliser un problème concret donné sous forme brute, et à explorer diverses pistes d'études en confrontant systématiquement les résultats théoriques et/ou numériques à la réalité. Ce module d'ouverture s'adresse potentiellement à tous les élèves, y compris à ceux qui n'envisagent aucunement de se diriger vers le monde de l'entreprise, et / ou qui pourraient avoir du mal à concevoir que leur bagage puisse leur permettre d'apporter des éléments de réponse à une problématique industrielle.

■ ■ ■ ■ ■

| Cours avancé : EDP de la mécanique quantique ***(M1)|***
(David Gontier)

Dans ce cours, nous nous intéressons à la dérivation et à l’étude des EDP non linéaires qui apparaissent en mécanique quantique.

Dans la première partie du cours, nous montrerons comment l'équation (linéaire) de Schrödinger donne des EDP non linéaires dans certains régimes ou sous certaines approximation. Nous introduirons en particulier les modèles de type Hartree-Fock et de type Thomas-Fermi, et ceux provenant de la théorie de la fonctionnelle densité (DFT).

Nous parlerons ensuite de différents outils mathématiques pour étudier ces EDP non linéaires : montrer l’existence de solutions, et relier les propriétés de ces solutions avec des phénomènes “connus” de la mécanique quantique.

Parmi les thèmes abordés, nous présenterons les outils mathématiques tels que le calcul des variations, et la concentration compacité. Enfin, si le temps le permet, nous démontrerons la stabilité de la matière.

Bibliographie :

* “Analysis" (Elliott H. Lieb et Michael Loss)
* "Stability of Matter" (Elliott H. Lieb et Robert Seiringer)
* "Méthodes mathématiques en chimie quantique, une introduction” (Éric Cancès, Claude Le Bris, Yvon Maday).

▪▪▪▪▪

*| Cours avancé : Géométrie et Relations aux Dérivées Partielles **(M1)**|*

(Emmanuel Giroux)

Le but de ce cours est de discuter de notions et d'idées géométriques qui servent à analyser et résoudre certains systèmes d'équations et d'inégalités aux dérivées partielles. Les thèmes suivants seront notamment abordés : théorie des obstructions et classes caractéristiques, connexions et courbure, espaces de jets, holonomie, transversalité, approximation holonome, intégration convexe….

On présentera aussi les applications classiques (retournement de la sphère, plongements isométriques C^1...).

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Mouvement Brownien, intégrale stochastique, chemins rugueux* **(M1)**|

(Michel Bauer)

Site: https://www.ipht.fr/Phocea/Pisp/index.php?nom=michel.bauer

Même si les mathématiciens de l’antiquité avaient développé des idées remarquablement modernes pour calculer longueurs, surfaces et volumes, la première construction rigoureuse de l’intégrale, due à Bernhard Riemann, date du milieu du XIX siècle. Sa définition de ∫â–’fdx tient en quelques lignes, et il caractérise complètement la classe des fonctions f pour lesquelles l’intégrale existe. Depuis cette date, motivés par des considérations abstraites mais aussi par des questions pratiques, les mathématiciens n’ont pas cessé de rechercher des généralisations de la notion d’intégrale. Même en restant dans le cadre d’une variable, donner un sens à ∫â–’fdg pour des classes de plus en plus vastes d’intégrandes f et d’intégrateurs g reste d’actualité. Pour citer la direction la plus connue, la théorie de la mesure à permis de traiter dans un cadre général le cas où f est mesurable et g est à variation bornée (i.e. la différence de deux fonctions croissantes) ; c’est la théorie de Lebesgue-Stieltjes.

Traiter des intégrandes et des intégrateurs aléatoires est un autre dévelop¬pement qui a conduit au calcul stochastique. Dans ce cadre les intégrateurs sont souvent à variation non-bornée, une autre extension qui à motivé des travaux jusqu’à nos jours. Le cours proposé est une introduction à ces aspects, illustrée à chaque étape par l’exemple du mouvement Brownien. Nous définirons l’intégrale d’Itô, dont le cadre est probabiliste, donnerons ses propriétés élémentaires et quelques applications. Nous construirons aussi, dans le cadre déterministe, l’intégrale de Young et montrerons comment elle échoue, mais de peu, à traiter le cas Brownien. Nous traiterons enfin sa récente et fructueuse généralisation au cas des intégrales de chemins rugueux.

La littérature sur le calcul stochastique est immense. Nous recommandons [Øks03] et [Kuo06] dont les chapitres pertinents pour ce cours sont d’un niveau adapté. Parmi les livres plus avancés, on peut citer [RY05] ou [KS00] par exemple. La littérature sur les chemin rugueux est bien moins étendue. Nous recommandons [FH14] dont les chapitres pertinents pour ce cours sont très lisibles. À un niveau plus avancé, on pourra consulter [FV10].

Références

[FH14] Peter K. Friz and Martin Hairer, A Course on Rough Paths, Universitext, Springer, 2014.

[FV10] Peter K. Friz and Nicolas B. Victoir, Multidimensional stochastic processes as rough paths, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2010.

[KS00] Ioannis Karatsas and Steven E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Graduate Texts in Mathematics, no. 113, Springer, 2000.

[Kuo06] Hui-Hsiung Kuo, Introduction to stochastic integration, 1 ed., Universitext, Springer, 2006.

[Øks03] Bernt Øksendal, Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications, 6 ed., Universitext, Springer, 2003.

[RY05] Daniel Revuz and Marc Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion, 3 ed., Grundlehren der matematischen Wissenschaften, vol. 293, Springer, 2005.

■ ■ ■ ■ ■

| Cours avancé : Probabilités en grande dimension ***(M1)|***

(Djalil Chafai)

Site https://djalil.chafai.net/
Ce cours présente quelques thèmes de probabilités en grande dimension.

Quelques éléments clés du cours :

• Gaussian measures and Ornstein-Uhlenbeck process
• Poincaré and logarithmic Sobolev inequalities
• Concentration of measure and transportation of measure
• Convexity and Bakry-Emery criterion for Langevin processes
• Entropy and Sanov large deviations principle
• Random matrices and Wigner type universality phenomena
• Lindeberg and Stein methods for central limit phenomena

Bibliographie :

• Anderson, Guionnet, Zeitouni
An introduction to random matrices, CUP
• Bakry, Gentil, Ledoux
Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators, Springer
• Vershynin, High-Dimensional Probability, an introduction, CUP
• Villani, Optimal transport: Old and New, Springer

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

*| Cours de mathématiques pour les littéraires **(PT)**|*
(Vadim Lebovici)

Ce cours est un véritable cours de mathématiques, adapté à des élèves sans bagage mathématique. Il est destiné à tout élève littéraire souhaitant expérimenter véritablement ce quec'est que de faire des mathématiques. Il est donc idéal pour ceux qui s'intéressent à la philosophie des sciences, mais pas seulement !
La présentation des notions sera adaptée au public, sans vulgarisation néanmoins : peu de notions seront abordées mais elles seront pleinement traitées. Les séances alterneront entre cours et exercices, comme toujours en mathématiques, seule la pratique personnelle permettant une bonne assimilation des notions.

Les thèmes traités seront les suivants :

- Ensembles et fonctions : Nous retracerons l'histoire des ensembles — objets aux fondements des mathématiques modernes — en partant de la question ayant motivé leur formalisation : comment comparer la taille d'ensembles infinis ? La réponse à cette question nous permettra de découvrir la notion de fonction, véritable pierre angulaire des mathématiques.

- Suites et limites : Nous étudierons comment se résout naturellement le paradoxe de Zénon après introduction des bonnes notions mathématiques : les suites numériques et leurs limites. Autrement dit, nous verrons comment donner un sens à la convergence d'une succession de phénomènes vers une certaine limite et nous aborderons des applications (innombrables) de ces théories à d'autres domaines des sciences.

- Statistiques et probabilités : Nous étudierons la théorie des probabilités et des statistiques en partant de la question suivante : « Etant donné une pièce truquée secrètement, comment savoir quelle face est la plus avantageuse ? ». La découverte de ces théories défiant le hasard nous permettra aussi de réfléchir à la notion de modélisation mathématique.

- Arithmétique (si le temps le permet) : Nous étudierons un objet au centre des mathématiques depuis des siècles : les nombres premiers. Comment est-il possible qu'un concept si simple à définir soit régi par des lois aussi riches et obscures ? Apparemment coupée du monde réel, l'arithmétique a pourtant de nombreuses applications pratiques, notamment en cryptographie.

▪▪▪▪▪

| Cours de probabilités et statistiques pour économistes ***(PT)|***
(Michael Sander)

Ce cours s'adresse à des étudiants ayant suivi une formation dont le programme en mathématiques s'apparente à celui de la filière B/L, et qui souhaitent développer les principaux outils leur permettant de suivre aisément des cours formalisés faisant intervenir probabilités et statistiques. Chaque cours est suivi d'un TD. Ce cours est obligatoire pour valider la licence d'économie. Nous aborderons les notions suivantes :

Partie I) Probabilités

1- Probabilités élémentaires (espaces probabilités, éléments de théorie de la mesure, densités de probabilités, probabilités discrètes, théorèmes fondamentaux)

2- Variables aléatoires (discrètes et à densités, lois, moments, lois usuelles, transformée de Fourier, fonction de répartition)

3- Observations asymptotiques (convergences de variables aléatoires, lois des grands nombres, théorème Central-Limite)

4- Compléments (lemme de Borel-Cantelli, chaines de Markov)

Partie 2) Statistiques

1- Concepts fondamentaux en statistiques (estimateurs, intervalles de confiances, principe du maximum de vraisemblance, méthode des moments, vitesse d'estimation)

2- Tests d'hypothèses (niveau, puissance, lien avec les régions de confiance, test du rapport de vraisemblance, démarche expérimentale)

3- Vecteurs Gaussiens (Propriétés élémentaires, TCL vectoriel, Théorème de Cochran et Modèles Gaussiens)

4- Tests du Khi-deux, information de Fisher (et applications)

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

*| Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Apprentissage statistique **(L3)**|*
(Francis Bach et Alexandre Rudi)

L'apprentissage statistique est une discipline en plein essor à l'interface de l'informatique et des mathématiques appliquées (probabilitéss / statistiques, optimisation, etc.) et qui joue aujourd'hui un rôle majeur en matière d'innovation technologique.

A la différence d'un cours de statistique traditionnel, l'apprentissage statistique se préoccupe particulièrement de l'analyse de données de grande dimension ainsi que de l'efficacité des algorithmes pour traiter d'importants volumes de données telles que rencontrées dans des domaines d'applications divers tels l'analyse d'image et du son, le traitement automatique du langage, la bioinformatique ou la finance.

L'objectif du cours est de présenter les théories et algorithmes majeurs de l'apprentissage statistique. Les méthodes abordéees reposeront en particulier sur des arguments d'analyse convexe.

Les séances de TDs (dont plus de la moitié seront réalisées sur machines) donneront lieu à des implantations simples des algorithmes vus en cours et à une application à différents domaines comme la vision ou le traitement du langage.

Page du cours à lire attentivement : https://www.di.ens.fr/appstat

▪▪▪▪▪

| Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Physique des particules ***(L3)|***
(Amir-Kian Kashani Poor et Gwenael Ferrando)

Dans le cadre de ce cours, nous allons étudier les interactions fondamentales de la physique des particules, décrites par le modèle standard, avec comme prérequis l'électromagnétisme élémentaire et la mécanique quantique. Nous étudierons la phénoménologie de la physique des particules basées sur des considérations de symétries et les lois de conservations associées. Nous motiverons ainsi les règles de Feynman sous-jacentes au modèle standard. Nous allons également
présenter, au fil du cours, des expériences classiques dans le domaine de la physique des hautes énergies.
Ce cours s'inspire de l'ouvrage de Mark Thomson, "Modern particle physics".

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| EDPs : de la modélisation à la résolution (M1)|

| Cours spécifique à la filière Majeure maths - physique

(Emmanuel Dormy et Isabelle Gallagher)

Le but du cours est de présenter quelques méthodes classiques de l'analyse et la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP). Après une introduction aux outils (analyse fonctionelle et harmonique) nécessaires à l'étude, nous présenterons quelques EDP linéaires importantes (transport, ondes, chaleur, Schrödinger) et ferons leur analyse. Nous montrerons comment ces problèmes sont associés à des configurations simples mais concrètes d'écoulements fluides et de transferts de chaleur. Nous nous orienterons ensuite vers l'étude d'EDP de la mécanique des fluides, avec en particulier les équations d'Euler et de Navier-Stokes. Nous étudierons leur résolution, et des propriétés qualitatives de leurs solutions.

Ce cours est ouvert aux élèves du DMA et du département de physique.

PDEs: from modelling to resolution

This course aims at introducing some classical methods for the analysis and resolution of partial differential equations (PDEs). After an introduction to the necessary tools (functional and harmonic analysis), we will present a few important linear PDEs (advection, waves, heat, Schrödinger) and perform their analysis. We will show how these simple models are related to practical, but simple, configurations of heat transfer and fluid flows. We will then turn to the PDEs of fluid mechanics, in particular the Euler and Navier-Stokes equations. We will both study their resolution and some properties of their solutions.
This course is opened both to the the maths and physics students.

▪▪▪▪▪

| Fibrés de Higgs et représentations de groupes de surfaces ***(M2)|***

(Nicolas Tholozan)

Site: https://www.math.ens.fr/~tholozan/coursM2.html

Soit S une surface de Riemann compacte. La correspondance de Hodge non-abélienne établit une équivalence de catégories entre des objets de nature holomorphe: les fibrés de Higgs sur S et des objets purement topologiques: les représentations linéaires de son groupe fondamental.

Après avoir présenté la correspondance et les deux théorèmes d'analyse géométrique sur lesquels elle repose, nous verrons ses applications à la description des \emph{variétés de caractères} du groupe fondamental de S Un objectif sera de décrire la topologie de l'espace des classes de conjugaisons de représentations à valeurs dans PSL(2,R).

Si le temps le permet, nous mentionnerons quelques généralisations de la correspondance (aux variétés kählériennes compactes, aux surfaces épointées...).

Références

[1]Kevin Corlette, Flat G-bundles with canonical metrics, Journal of differential geometry 28(3), 1988, p.
361--382.
[2] Nigel Hitchin, The self-duality equations on a Riemann surface. Proceedings of the London Mathematical Society 3(1), p. 59--126.
[3] Nigel Hitchin, Lie groups and Teichmüller space Topology 31(3), 1992, p. 449--473.
[4] Carlos Simpson, Higgs bundles and local systems, Publications Mathématiques de l'IHES, 75, 1992, p.5–95.

■ ■ ■ ■ ■

| *Géométrie différentielle (M1)*|

(Nicolas Bergeron et Paul Laurain)

Variétés différentielles :
Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes.

Formes différentielles :
Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle :
Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces :
Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie:
J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013.
Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Marches et graphes aléatoires* ***(L3)***|

(Rémy Mahfouf)

L'étude des marches et des graphes aléatoires reste l'un des domaines de recherche des probabilités les plus actifs actuellement. Après renormalisation, une marche aléatoire simple (disons sur Z) "converge" vers une fonction continue aléatoire, que l'on appelle le mouvement Brownien. De même, lorsque l'on considère un graphe d'Erdős–Rényi de grande taille, dont les connections entre les sommets sont variables de Bernouilli indépendantes, ce dernier converge à son tour vers un objet aléatoire continu, dans un sens à préciser. L'objectif de ce groupe de lecture sera de comprendre les propriétés fines des marches et graphes aléatoires, qu'elles soient combinatoires, algébriques ou analytiques. En particulier, on présentera les correspondances entre ces différents objets, qui rendent souvent leur étude plus simple en choisissant le formalisme approprié.Les séances se découperont en quatre grandes parties : nous commencerons par étudier la récurrence/transience des chaines de Markov via le formalisme des réseaux éléctriques, puis nous nous concentrerons sur les marches aléatoires unidimensionelles. Ensuite nous étudierons les arbres de Galton-Watson et leur liens avec les marches aléatoires. Nous terminerons avec l'étude des comportements typiques des graphes d'Erdős–Rényi de grande dimension.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de lecture : Outils probabilistes pour l'étude de matrices aléatoires* ***(L3)***|

(Laure Dumaz)

Dans ce groupe de lecture, nous étudierons certains outils classiques de probabilités (concentration de mesures, théorème central limite, probabilités libres) pour les appliquer à la théorie des matrices aléatoires. Nous obtiendrons ainsi quelques résultats célèbres comme la loi du demi-cercle de Wigner des matrices de Wigner ou la loi circulaire pour des matrices à coefficients i.i.d. Nous suivrons le livre ``topics in random matrix theory'' de Terence Tao (chapitre 1.3 et une partie du chapitre 2).

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

*| Groupe de lecture : Problèmes variationnels, optimisation et contrôle **(L3)**|*
(Cyril Letrouit)

De nombreux problèmes concrets peuvent être modélisés par un petit nombre de problèmes d'optimisation ou d'équations aux dérivées partielles (EDPs) : la seule équation de la chaleur, par exemple, sert à reconstruire des images floutées, modélise la diffusion aléatoire de particules, explique (via la réaction-diffusion) les motifs sur la peau de certains animaux, mais apparaît aussi comme un morceau des équations de Navier-Stokes et sert de « modèle » pour le flot de Ricci.

Ce groupe de lecture est une introduction à la modélisation de certains de ces problèmes et à leur résolution. Nous utiliserons essentiellement des outils d'analyse : nous introduirons les distributions, les espaces de Sobolev, la notion de convergence faible, expliquerons la descente de gradient, des rudiments de théorie spectrale, etc. La dernière partie sera consacrée à la théorie du contrôle, qui analyse les propriétés de systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir, et qui sont souvent issus de situations concrètes.

Références :

[1] Grégoire Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, **2012.**

[2] Emmanuel Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, 2005.

■ ■ ■ ■ ■

*| Groupe de travail : Autour des conjectures de Kazhdan-Lusztig **(M1)**|*

(Arnaud Etève)

Les conjectures de Kazhdan-Lusztig sont une série de conjectures concernant la structure d'une classe de groupe, qu'on appelle groupes de Coxeter. Ces groupes sont centraux en théorie des représentations et leur compréhension joue un rôle crucial en pour la théorie des algèbres de Lie ou des représentations de certaines classes de groupes finis.

Dans ce groupe de travail on étudiera les sujets suivants : groupes de Coxeter, systèmes de racines, algèbres de Lie, algèbres de Hecke et si le temps le permet, des bimodules de Soergel.

■ ■ ■ ■ ■

*| Groupe de travail : Cartes aléatoires, circle packing et limites locales **(M1)**|*

(Théo Lenoir)

L'objectif de ce groupe de travail est d'étudier les cartes aléatoires et plus précisément la notion de limite locale. Les cartes ont été très étudiées en combinatoire, physique théorique et plus récemment en théorie des probabilités. La notion de convergence locale d'une famille de graphes a été introduite par Benjamini et Schramm, puis Angel et Schramm ont montré que les triangulations planaires uniformément convergent localement vers un objet limite appelé UIPT (Uniform infinite planar triangulations). Nous étudierons alors les propriétés limites (récurrence, transience) de telles cartes aléatoires.

Nous suivrons principalement les notes de Saint-Flour d'Asaf Nachmias «Planar maps, random walk and circle packing »

■ ■ ■ ■ ■

| Groupe de travail : Classes caractéristiques (M1)|
(Vadim Lebovici)

Les fibrés vectoriels sont des objets de premier importance en géométrie différentielle. Une excellente motivation à l'étude des fibrés vectoriels se trouve dans le cours d'A. Oancea [2], mais on peut penser par exemple au fibré tangent, aux formes différentielles… Les fibrés les plus simples, dits triviaux, sont simplement un produit cartésien de la base par un espace vectoriel. La richesse des fibrés vectoriels vient de l'existence de fibrés non-triviaux : le ruban de Möbius de largeur infinie ressemble localement au produit de la sphère par la droite réelle, mais il est globalement bien différent, puisqu'il est non-orientable !

Dans ce groupe de travail, nous étudierons de riches et puissants objets algébriques (des classes de cohomologie bien choisies) qui mesurent le défautde trivialité d'un fibré vectoriel. Ces objets sont appelés classes caractéristiques, et nous étudierons plus particulièrement les classes deStiefel-Whitney. Nous suivrons pour ce faire le livre Characteristic classes de J. Milnor et J. Stasheff [1] qui nous permettra de découvrir deux points de vue sur le sujet.

Le premier, axiomatique, exprime ces classes comme les seules qui satisfont certaines propriétés assurant leur naturalité, leur unicité et leur calculabilité. Le second est celui de la théorie de l'obstruction : sur un CW-complexe, la nullité de ces classes caractérise l'extensibilité de champs de vecteurs linéairement indépendants d'un n-squelette au (n+1)-ième.

Cette étude nous permettra de découvrir que les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels correspondent aux classes d'homotopie d'applications de la base vers les grassmanniennes, réduisant ainsi l'étude des classes caractéristiques à l'étude des groupes de cohomologie des grassmanniennes. Si le temps le permet, nous continuerons notre étude dans le cadre complexe via les classes de Chern.

Prérequis : topologie algébrique et géométrie différentielle.

Références :

[1] Milnor, J. W., & Stasheff, J. D. (1975). Characteristic classes. Ann. of Math. Studies, (76), 862-865.
[2] Oancea, A. (2018). Fibrés vectoriels, classes caractéristiques, dualité de Poincaré. Notes de cours.
https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2018-M2-TOPO-ALG Cours_CC_20181203.pdf

■ ■ ■ ■ ■

| Groupe de travail : Courbes elliptiques ***(M1)|***

(Romain Branchereau)

Une courbe elliptique complexe est une surface de Riemann de genre 1, c'est-à-dire un tore complexe. On peut aussi définir une courbe elliptique complexe comme une courbe algébrique dans C^2 définie par une équation polynomiale cubique, naturellement munie d'une structure groupe. Ainsi, les courbes elliptiques héritent d'une structure très riche provenant des différentes manières de les considérer. Leur histoire remonte au 19ème siècle et aux travaux (entre autre) d'Abel, de Gauss et de Jacobi, et elles sont depuis au centre de nombreux théorèmes et conjectures majeurs. Pour ne prendre que les exemples les plus célèbres on pourrait citer le théorème de Mordell-Weil, le célèbre théorème de Fermat prouvé par Andrew Wiles à la fin du 20ème siècle ou encore la toute aussi célèbre conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer. Plus récemment, les courbes elliptiques sont aussi devenues un outil important en cryptographie.

L'objectif de ce groupe travail est d'introduire les courbes elliptiques en restant plutôt proche du développement historique. Pour cela nous suivrons principalement le livre « Elliptic curves: function theory, geometry, arithmetic » de McKean et Moll. En particulier nous parlerons:
- de surfaces de Riemann et de courbes algébriques,
- de fonctions et d'intégrales elliptiques,
- de formes modulaires,
- du théorème de Mordell-Weil.

Si le temps nous le permet nous verrons aussi comment ceci peut être appliqué :
- à la théorie algébrique des nombres (Kronecker Jugendtraum)
- à la résolution d'équations polynomiales de degré 5.

▪▪▪▪▪

| *Groupe de travail : Équations de transport et champs de vecteurs de faible régularité* (M1)|

(Ayman Moussa)

Étant donné un champ de vecteurs défini sur l'espace euclidien, l'équation de transport associée est une équation aux dérivées partielles (EDP) décrivant l'évolution au cours du temps de la répartition (supposée continue) d'une quantité scalaire, transportée le long du flot induit par le champ de vecteur. Afin de s'en faire une image, on peut par exemple penser – en négligeant tout effet diffusif – à la dérive d'une nappe de polluant non miscible dans un cours d'eau.

Dans le cas d'un champ de vecteurs régulier (mettons lipschitzien pour fixer les idées), la théorie des équations différentielles ordinaires (EDO) illumine totalement l'étude de cette EDP ; le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de construire une représentation explicite de la solution par la méthode des caractéristiques, ce que l'on pourrait résumer par le slogan : « l'EDO explique l'EDP ». Pour de nombreux modèles (notamment issus de la mécanique des fluides), il est naturel d'étudier cette même équation de transport mais avec un niveau de régularité bien moindre pour le champ de vecteurs. Il n'est alors plus du tout clair de définir des courbes caractéristiques pour le champ de vecteurs, et comprendre si l'équation de transport est bien posée n'a rien d'immédiat.

Il y a une quarantaine d'années, au détour d'une percée spectaculaire sur l'équation de Boltzmann, DiPerna et Lions ont établi le caractère bien posé de l'équation de transport dans le cas d'un champ de vecteurs ayant une régularité Sobolev (et une divergence bornée, pour simplifier). Mieux : de manière assez surprenante, dans ce cadre affaibli le slogan précédent se renverse et c'est l'EDP qui explique l'EDO ! La théorie des équations de transport avec champ peu régulier est devenu au fil des années un sujet à part entière, avec de nombreux résultats généralisant considérablement la voie découverte par DiPerna et Lions. Parmi ceux-ci l'un des plus célèbres est le théorème d'Ambrosio : le caractère bien posé de l'équation de transport demeure, pour un champ de vecteur ayant une régularité BV (i.e. dont le gradient est une mesure de Radon), toujours sous une hypothèse de contrôle de la divergence.

Dans ce groupe de travail, nous commencerons par une séance introductive fournissant plusieurs exemples où une équation de transport apparaît naturellement (avec un champ de vecteurs non nécessairement régulier), et on effectuera les rappels nécessaires en lien avec le cas régulier ou la notion de solution faible.

Ensuite, les exposés traiteront de la théorie de DiPerna-Lions pour l'équation de transport et de son extension par Ambrosio, mais également de son application à l'étude des EDO à travers le concept de flot régulier lagrangien. Certains résultats annexes (propriétés des fonctions BV,désintégration de mesure) pourront faire l'objet d'exposés, si besoin est. On pourra également

discuter de résultats négatifs aidant à délimiter les possibilités de la théorie, comme les contre-exemples d'Aizenmann ou Depauw. Enfin, si le temps (et la motivation des participants) lepermet(tent), certains exposés pourront explorer le cas des domaines à bords (selon les travauxde Boyer et Mischler) ou bien la quantification des estimées de stabilité obtenue par De Lellis et Crippa, à l'aide de la fonction maximale.

Prérequis : un peu de théorie de la mesure (Radon-Nikodym et conséquences, essentiellement) et certaines notions de bases d'analyse fonctionnelle (convergence faible, distributions et espaces de Sobolev), qu'on pourra malgré tout rappeler pendant le GT.

■ ■ ■ ■ ■

| Groupe de travail : Les sphères exotiques |
(Coline Emprin)

Prérequis : Cours de topologie algébrique

Une sphère exotique est une variété différentielle qui est homéomorphe mais non difféomorphe à la *n*-sphère unité S^n. On va s'intéresser à ces variétés "exotiques", semblables à une sphère, d'un point de vue de leurs propriétés topologiques, mais avec des structures différentielles inhabituelles. Est-ce qu'il existe des sphères exotiques ? Pour quelle valeur de la dimension ? Peut-on les classifer ?

En général, on ne sait pas pour quelles dimensions existent des sphères exotiques (ni a fortiori combine elles sont). Par exemple, il n'en existe pas en dimension 12, le cas de la dimension 4 est encore un problème ouvert, etc. Historiquement, les premières sphères exotiques ont été construites en 1956 par John Milnor en dimension 7. Quelques années plus tard, Kervaire et Milnor ont établi une classification plus complète en montrant que l'ensemble des classes de difféomorphismes de sphères exotiques orientées de dimension 7 forment un groupe cyclique d'ordre 28.

L'objectif de ce groupe de travail est de s'intéresser aux travaux de Milnor et Kervaire sur les spheres exotiques. Pour cela, nous introduirons la notion de classes caractéristiques, des invariants cohomologiques qui jouent un rôle clef dans l'étude des variétés, des _brés vectoriels et la construction de sphères exotiques.

[BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*., volume 82 of Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1982.
[Hat17] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. 2017. Version 2.2, November 2017
[Ker60] M. A. Kervaire. A manifold which does not admit any differentiable structure. Comment. Math. Helv., 34 :257_270, 1960.
[KM63] Michel A. Kervaire and John W. Milnor. Groups of homotopy spheres. I. Ann. Math. (2), 77 :504_ 537, 1963.
[Mil56] John W. Milnor. Manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. Math. (2), 64 :399_405, 1956.
[MS74] John W. Milnor and James D. Stashe_. Characteristic classes., volume 76. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1974

▪▪▪▪▪

*| Groupe de travail : Lois de Weyl **(M1)**|*

(Lucas Vacossin)

La loi de Weyl désigne d'abord la fameuse formule due à Henri Weyl en 1911 qui donne un asymptotique à la fonction de comptage des valeurs propres du Laplacien sur un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$. Plus précisément, si Ω désigne un ouvert borné de $\mathbf{R}^d$, le Laplacien -Δ avec condition de Dirichlet se "diagonalise" dans une base orthornormée de fonctions propres. La loi de Weyl donne alors un asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres, en fonction du volume de l'ouvert concerné.

Aujourd'hui, divers types de résultats sont catalogués comme loi de Weyl ou borne de Weyl dès lors qu'il s'agit de compter des valeurs propres,voire des résonances. Ces dernières, bien plus difficiles à définir rigoureusement, jouent un rôle semblable aux valeurs propres dans le cadre de système que l'on peut qualifier d'ouverts.

Le véritable objectif de ce groupe de travail sera en réalité de définir et de comprendre la notion de résonances. Les lois de Weyl joueront le rôle de fil conducteur et nous tâcherons de montrer une loi de Weyl pour des résonances en dimension 1. Cependant, afin de comprendre les motivations derrière les formules de Weyl, nous commencerons le GT par l'étude de deux problèmes de comptage de valeurs propres bien connus : l'oscillateur harmonique et le Laplacien sur les ouverts bornés.

Support : L'outil de travail principal sera l'ouvrage de Dyatlov et Zworski, Mathematical study of Scattering Resonances. D'autres références plus ponctuelles pourront être indiquées pour les séances concernées.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

*| Groupe de travail : Probabilités libres et matrices aléatoires **(M1)**|*
(Djalil Chafai)

Ce groupe de travail accessible ouvre au monde des probabilités libres et des matrices aléatoires. Il est basé sur le livre de Mingo et Speicher intitulé « Free probability and random matrices ». Prenant ses racines dans la théorie des algèbres d'opérateurs, les probabilités libres se sont entrelacées au fil du temps avec les partitions non croisées et la combinatoire, les matrices aléatoires et les phénomènes de grande dimension, les applications à l'apprentissage statistique et aux télécommunications sans fil, la théorie des représentations des groupes, les groupes quantiques, le problème du sous-espace invariant, les principes de grandes déviations, le problème des sous-facteurs, et au-delà. Ce groupe de travail met un accent particulier sur la relation entre probabilités libres et matrices aléatoires, mais aborde également, potentiellement, les aspects algébriques d'opérateurs, combinatoires, et analytiques de la théorie. Ce groupe de travail est à la fois distinct et compatible avec le cours de M1 avancé « Probabilités de grande dimension » (High dimensional probability).

Référence : Free probability and random matrices, Mingo et Speicher, Fields Institute Monographs 35 (2017). https://zbmath.org/?q=an%3A1387.60005

« Free probability and random matrices »

« This volume opens the world of free probability to a wide variety of readers. From its roots in the theory of operator algebras, free probability has intertwined with non-crossing partitions, random matrices, applications in wireless communications, representation theory of large groups, quantum groups, the invariant subspace problem, large deviations, subfactors, and beyond. This book puts a special emphasis on the relation of free probability to random matrices, but also touches upon the operator algebraic, combinatorial, and analytic aspects of the theory.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Groupe de travail : Théorie spectrale et mécanique quantique ***(M1)|***
(David Gontier)

Dans ce groupe de travail, nous nous intéresserons à l'équation de Schrödinger. Nous donnerons un cadre mathématique (théorie des opérateurs, théorie spectrale) pour comprendre les opérateurs de Schrödinger, et nous montrerons comment les propriétés du spectre se traduisent en phénomènes physiques.
Ce cours est indépendant du cours "EDP de la mécanique quantique" (semestre 2), mais vient le compléter.

Parmi les notions abordées, nous verrons les opérateurs auto-adjoints, le théorème spectral et le calcul spectral, et la décomposition du spectre de ces opérateurs. Nous traiterons principalement du cas des atomes et des molécules (= chimie quantique), et, si le temps le permet, des systèmes infinis (= matière condensée).

Le cours suivra principalement les notes de cours de M. Lewin "Théorie Spectrale & mécanique quantique".
D'autres ouvrages de référence sont :

* "Linear operators and their spectra" (E. Brian Davies)
* "Operator Theory" (Barry Simon)
* "Perturbation theory for linear operators" (Tosio Kato)
* "Analysis of operators" (Michael Reed et Barry Simon)

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Information, inférence et physique statistique* **(L3)**|

(Marc Mézard)

Depuis quelques années, un nouveau champ scientifique est apparu, à l'interface entre la physique statistique, la théorie de l'information, et l'informatique, comportant beaucoup de liens avec les probabilités et statistiques. En physique statistique il s'agit de l'étude des systèmes désordonnés, les verres de tous types. En théorie de l'information, les sujets principaux sont la compression de données, les codes de corrections d'erreur et l'acquisition de données comprimés. En informatique, on pense aux problèmes de satisfaction de contraintes, mais aussi à l'inférence, notamment l'apprentissage machine par réseaux de neurones.

Clairement, il s'agit d'un champ très vaste. Ce cours, conçu pour être accessible à des étudiants en première année issus de plusieurs départements (physique, maths, informatique), n'a pas l'ambition de fournir une présentation complète du domaine, et il ne pourra pas non plus amener à étudier ses tout derniers développements. Il s'agit plutôt d'une introduction construite à partir de morceaux choisis, fournissant le cadre conceptuel de base nécessaire dans chacun des sujets, et illustré par des exemples relativement simples. Il s'agit donc d'une sorte de promenade en grande dimension, permettant d'apercevoir des liens profonds entre différents sujets…

Sujets traités (indicatif) :

- Introduction à quelques notions de théorie de l'information : variables aléatoires, entropie, probabilités conditionnelles, information mutuelle
- Introduction à la physique statistique : distribution de Boltzmann, potentiels thermodynamiques, modèles d'Ising, méthode de champ moyen
- Quelques outils de probabilités en grande dimension : grandes déviations, équipartition asymptotique, méthode de Monte-Carlo
- Introduction à l'inférence statistique : inférence Bayesienne, apprentissage machine, perceptron, lien avec la physique statistique
- Codes correcteurs d'erreurs : code et théorème de Shannon, codes à vérificateurs de parité, décodage par champ moyen

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Intégration et Probabilités (L3)|
(Anne-Laure Dalibard et Bastien Mallein)

Le cours commencera par une étude des suites de jets de dés, qui sera l'occasion à la fois d'introduire quelques techniques probabilistes et de motiver les questionnements sur l'existence des mesures.

Ensuite, nous montrerons l'existence des mesures utiles (mesures produits, mesure de Lebesgue) et nous donnerons les grands théorèmes d'intégration.

Pour finir, nous reviendrons aux probabilités et montrerons la loi forte des grands nombres dans un cadre plus général, ainsi que le théorème de la limite centrale.

Références :

Il existe de nombreux livres d'introduction à la théorie de la mesure et/ou aux probabilités. Le plus proche du cours est sans doute : Billingsley - Probability and Measure.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| *Introduction aux sciences du vivant* |

(Morgane Thomas-Chollier)

Ce cours d'introduction vise à permettre à des non-biologistes de s'approprier les connaissances fondamentales nécessaires à toute compréhension des modes d'organisation, de fonctionnement et d'évolution du vivant. Il constitue un pré-requis nécessaire pour suivre la plupart des autres cours destinés aux non-biologistes et constitue la première étape de filières mixtes avec la biologie. Les généraux objectifs sont les suivants :

• permettre une compréhension en profondeur de ce qui fait l'originalité, l'unité et la diversité du vivant
• donner les informations essentielles sur la machinerie centrale, responsable des phénomènes d'hérédité, d'expression de l'information génétique et d'adaptation, et sur ses mécanismes de contrôle et leurs dérèglements éventuels
• fournir une introduction aux mécanismes-cléfs impliqués dans l'origine des espèces et de leur évolution
• illustrer par quelques exemples les méthodologies qui permettent de constituer ce savoir, et leurs limites

Thèmes abordés :
Unité du vivant : chimie du vivant, protéines et acides nucléiques, organisation cellulaire, métabolisme, membranes, signalisation et communication cellulaires, cycle cellulaire, hérédité, de l'ADN aux protéines, régulation de l'expression génique et médecine moléculaire, développement et morphogenèse.

Diversité du vivant : Individus, populations, communautés, écosystèmes : variation phénotypique et propriétés émergentes des populations. Réseaux d'interactions entre populations : structure, robustesse, évolution. Diversité des communautés et fonctionnement des écosystèmes. Evolution : marqueurs génétiques, notion d'espèce et principes de la reconstruction phylogénétique. Histoire des caractères et innovation évolutive. Evolution de la coopération et niveaux de sélection. Processus de spéciation.

Méthodes pour l'étude et la manipulation des gènes et des génomes : Méthodes de base (recombinaison in vitro, cartographie, séquençage..). Clonage moléculaire (principes, stratégies d'isolement de gènes, manipulation de gènes isolés). Organismes génétiquement modifiés (transgenèse, invalidation, mutation et remplacement de gènes, considérations éthiques)

Évaluation : Examen écrit incluant questions de cours et exercices
Support de cours : Life, The Science of Biology (Savada)

■ ■ ■ ■ ■

| *Logique (M1)*

(Adrien Deloro et Gabriel Sébilet Deloge)

Âgée d'un siècle environ, la logique mathématique est jeune à l'échelle des mathématiques et suscite encore des confusions. Bien qu'elle puisse fournir des outils d'analyse des «fondements des mathématiques», lesdits fondements ne sont pas son rôle ; bien que des philosophes puissent s'y intéresser, elle est strictement mathématique.
La logique inspecte les liens entre structures mathématiques et permet de dégager des phénomènes algébriques (classes de modèles, définissabilité ou non-définissabilité, représentation de théories les unes dans les autres). Elle a trouvé récemment des applications en géométrie algébrique et en théorie des nombres. Ses liens avec la théorie des ensembles sont de coïncidence historique ; mais comme elle permet d'en clarifier les indécidabilités, le semestre terminera sur un peu de combinatoire transfinie. Il doit pourtant être pris comme une invitation au point de vue modèle-théorique.

Le cours est théoriquement accessible aux étudiants de première année mais demande un certain recul. Il couvre les bases de la logique, avec une approche résolument mathématique.

1. Rappels de Mathématique : cardinaux intuitifs, ordinaux intuitifs, espaces profinis, dualité de Boole-Stone
2. Logique élémentaire : concepts de modèle et de définissabilité, logique «du premier ordre», déduction naturelle ; correction, complétude et compacité
3. Éléments de théorie des modèles : constructions de modèles, catégoricité, ultraproduits, espaces de types, jeux de va-et-vient ; applications algébriques
4. Phénomènes d'incomplétude : problèmes d'internalisation et théorèmes d'incomplétude
5. Sur une axiomatique due à Zermelo, Skolem et Fraenkel : ZF et variantes, formalisation des ordinaux, cardinaux, et de leur arithmétique ; modèles intérieurs classiques et discussion de l'hypothèse du continu

Bibliographie:

Des notes de cours seront disponibles. En complément ou en initiation on peut conseiller : en français, le traité de Cori-Lascar ; en anglais, le texte d'Enderton ou de Shoenfield.

■ ■ ■ ■ ■

*| Mathématiques des données **(M1)***
(Gabriel Peyré, Geert-Jan Huizing et Pierre Albin)

Ce cours passe en revue les méthodes mathématiques et numériques fondamentales en sciences des données. La première partie du cours couvre les bases de la représentation et du traitement des données, en particulier la théorie de
Shannon, le filtrage et les ondelettes. La deuxième partie présente l'optimisation convexe et non-convexe, dans la perspective de son utilisation en apprentissage automatique et en particulier pour les réseaux de neurones. Le cours est validé par un petit projet et un examen.

Références :
- Pour la théorie : https://mathematical-tours.github.io/book/
- Pour le numérique et les TPs : www.numerical-tours.com

▪▪▪▪▪

| Mathématiques pour économistes ***(PT)|***
(Léonard Pille-Schneider)

Le but de ce cours est de fournir aux étudiants les outils d'analyse nécessaires pour suivre des cours d'économie s'appuyant sur un formalisme mathématique. La première partie du cours visera à introduire les notions de topologie et d'algèbre linéaire nécessaires, tandis que la deuxième fournira les bases de calcul différentiel requises afin
d'aborder l'optimisation sous contraintes et la convexité en dimension arbitraire.

▪▪▪▪▪

|Mathématiques pour l'environnement et la société ***(M1)|***
(Bertrand Maury)

Ce cours propose, en premier lieu, une introduction poussée aux cadres mathématiques permettant d'aborder ces questions d'environnement et de société. Nous avons choisi de privilégier trois axes :

Optimisation
Graphes et réseaux
Systèmes dynamiques

En second lieu, ce cours se veut une initiation à la démarche de modélisation, qui permet d'élaborer, à partir de la considération d'une situation de la vie réelle, un cadre mathématique adapté, et une formalisation du problème sous forme d'équations, en lien avec un ou plusieurs des domaines des mathématiques évoqués ci-dessus.

Les domaines applicatifs visés sont (liste non exhaustive) : questions de mobilité / transport (mobilité urbaine, transport multimodal, mouvements de foules), développement urbain, cycle des énergies, qualité de l'air, propagation d'épidémies, réseaux sociaux (propagation d'opinion)…

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Numerical methods for fluid dynamics (M2)|
(Emmanuel Dormy)

Numerical simulation is playing an expanding role in the study of fluid dynamics in scientific research. In this course, we will develop and analyse the various methods available to solve the partial differential equations relevant to computational fluid dynamics (elliptic, parabolic and hyperbolic). The emphasis will be placed on the algorithms and the convergence properties, as well as their application to a wide variety of problems in fluid dynamics.

1. Overview of discretisation in time and space for pdes,
2. Stokes equation and splitting algorithms,
3. Transport schemes, numerical diffusion and dispersion,
4. Compressible flows,
5. Spectral methods and turbulent flows,
6. Waves and numerical anisotropy,
7. Open domains and boundary conditions.
8. Complex domains,
9. Prospects.

Validation will take the form of a mid-term problem and a final project in pairs.

Modélisation numérique pour la mécanique des fluides

La résolution numérique des équations de la dynamique des fluides occupe une place grandissante en recherche. Nous allons dans ce cours développer et analyser les méthodes mises en œuvre pour la résolution des équations aux dérivées partielles intervenant en dynamique des fluides (elliptiques, paraboliques et hyperboliques). On insistera sur les algorithmes et leurs propriétés de convergence ainsi que sur les applications à une grande variété de problèmes de dynamique des fluides.

1. Retour sur la discrétisation en espace et en temps pour les edp,
2. Equation de Stokes et schémas de splitting,
3. Schémas de transport, diffusion et dispersion numérique,
4. Ecoulements compressibles,
5. Méthodes spectrales et écoulements turbulents,
6. Vagues, ondes et anisotropie numérique,
7. Domaines ouverts et conditions aux limites.
8. Domaines de formes complexes,
9. Perspectives.

L'évaluation du cours se fait par un devoir de mi-cours et un projet de fin de cours en binome.

■ ■ ■ ■ ■

*| Opérateurs alétoires **(M2)**|*

(Laure Dumaz)

Depuis les travaux du physicien Anderson dans les années 50, la localisation dans des systèmes désordonnés a été l'objet d'une importante littérature. D'un point de vue mathématique, la question est de savoir si l'opérateur auto-adjoint représentant l'hamiltonien du système est purement ponctuel. Parallèlement, la théorie des matrices aléatoires s'est développée suite aux travaux de Wigner, qui a observé que les niveaux d'énergie d'atomes lourds est bien modélisée par les valeurs propres de grandes matrices aléatoires. Les études se concentrent dans ce cas sur la répartition statistique des valeurs propres de ces grandes matrices et en particulier la répulsion entre celles-ci.

L'objet de ce cours est l'étude d'opérateurs aléatoires provenant de ces deux théories. Ces opérateurs appartiennent à la classe des opérateurs de Sturm Liouville généralisés du premier ou deuxième ordre. Nous expliquerons quels opérateurs apparaissent dans ces modèles puis nous étudierons certaines de leurs propriétés spectrales notamment grâce à des outils de calcul stochastique.

Les notions importantes de la théorie des opérateurs auto-adjoints seront rappelées dans les premiers cours (elles ne sont donc pas un prérequis nécessaire à ce cours).

■ ■ ■ ■ ■

| Probability (PT)|

(Raphaël Cerf et Guilhem Semerjian)

Abstract: This course will present the probabilistic model and the fundamental limit theorems for sums of independent real-valued random variables. The central object of the course is the heads or tails game or the symmetric random walk on the integers.

Résumé : Ce cours présentera le modèle probabiliste et les théorèmes limites fondamentaux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles. L'objet central du cours est le jeu de pile ou face ou la marche aléatoire symétrique sur les entiers.

▪ ▪ ▪ ▪ ▪

| Processus stochastiques (M1)|
(Giambattista Giacomin et Rémy Mahfouf)

Le cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques à temps et espace discrets, avec quelques excursions dans le cas continu :

1. Révisions sur le cadre probabiliste: convergence en loi, théorème(s) de la limite centrale, vecteurs gaussiens, lois infiniment divisibles.

2. Espérance conditionnelle : définition, propriétés.

3. Martingales à temps discret : exemples, temps d'arrêt, inégalités de Doob, convergence.

4. Chaînes de Markov : exemples, classification des états, mesures invariantes, théorèmes ergodiques.

5. Marches aléatoires et un aperçu du mouvement brownien.

6. Quelques exemples des modèles de la physique statistique.

Bibliographie :

J.-F. Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, notes de cours (2006)
P. Billingsley, Probability and Measure, third edition, Wiley and sons (1995)
D. Williams, Probability with Martingales, Cambridge University Press (1991)

■ ■ ■ ■ ■

*| Statistiques **(M1)**|*

(Stéphane Gaïffas et Anna Ben-Hamou)

Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

En fonction des goûts et du niveau d'allergie au clavier de chacun, on pourra s'attarder plus ou moins en profondeur sur des exemples d'applications et d'implémentation. Nous essaierons de proposer dans ce cours 80% de contenus classiques et inévitables dans un cours de statistique et 20% de résultats récents et problèmes ouverts, pour montrer de jolies mathématiques appliquées qui répondent à des problèmes importants en statistique.

Le plan du cours, modulo quelques modifications éventuelles, est le suivant :
Modèles et expériences statistiques
Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
Régression linéaire : propriétés de l'estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussaient, optimalité minimax de l'estimateur des moindres carrés
Statistiques bayesiennes : risque bayesien, estimateur bayesien
Maximum de vraisemblance et application aux modèles exponentiels
Modèles linéaire généralité : régression logistique, résultats limites
Statistique en grande dimension : Lasso et sparsité
Retour aux tests paramétriques, théorie de Neyman Pearson
Tests multiples, procédure de Benjamini Hochbe

▪▪▪▪▪

| Systèmes à diffusion croisée ***(M2)|***

(Ayman Moussa)

L'objet de ce cours est d'étudier une classe de systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) utilisés en dynamique des populations pour décrire l'occupation d'un espace par différentes espèces animales. De manière assez classique, les populations y sont décrites par l'intermédiaire de deux mécanismes fondamentaux : la dispersion des individus (modélisée par un opérateur de diffusion) et leurs reproduction ou décès (modélisés par un terme de réaction). La spécificité des systèmes sur lesquels nous nous concentrerons tient dans l'expression « diffusion croisée » : pour de tels systèmes la diffusivité (ou mobilité) d'une espèce dépend – potentiellement de manière non linéaire – de la présence de ses concurrents.

La première publication proposant un tel système date de 1979, dans le *Journal of Theoretical Biology*. Les auteurs, Shigesada, Kawasaki et Teramoto ont proposé ce type de systèmes (dorénavant appelés « SKT ») pour capturer le phénomène de ségrégation des espèces, c'est-à-dire une répartition quasiment disjointe de l'espace entre les différents constituants de la population. Il est fréquent, en mathématiques appliquées, qu'un outil de modélisation efficace conduise à des questions mathématiques intéressantes et étonnamment difficiles ; nous verrons dans ce cours que les systèmes à diffusion croisée sont une belle illustration de ce fait.

Après une rapide introduction qui dévoilera (formellement) le lien entre la diffusion croisée et la ségrégation, le cours se concentrera d'abord sur l'équation dite de Kolmogorov, une EDP parabolique dont l'opérateur de diffusion est adapté au comportement d'individus sensibles (par opposition à la loi de Fick, pour la diffusion de matière inerte). Cette équation étant la brique de base des systèmes à diffusion croisée que nous étudierons, il s'agira de la comprendre dans un cadre de régularité très faible. Nous aborderons ensuite à proprement parler l'étude de systèmes à diffusion croisée. Comme c'est souvent le cas pour les EDP non linéaires, nous verrons que la question même de l'existence de solutions n'est pas une trivialité. Nous fournirons un schéma de construction de solutions faibles globales par approximation-compacité, reposant sur la dissipation au cours du temps d'une fonctionnelle, appelée l'entropie du système. Suivront l'existence de solutions plus régulières (mais locales), certaines propriétés d'unicité fort-faible et éventuellement des résultats plus difficiles : la réalisation du système SKT comme limite asymptotique d'équations plus élémentaires ou l'analyse rigoureuse de certains états d'équilibres offrant une ségrégation des espèces.

En plus d'explorer des systèmes à diffusion croisée, ce cours illustrera notamment certaines méthodes standards dans l'étude d'équations paraboliques (principe du maximum, lemme d'Aubin-Lions, approximation-compacité, point fixe en dimension infinie, analyse asymptotique) que nous présenterons dans le cadre spécifique qui nous intéresse tout en soulignant la portée plus large de ces outils.

Prérequis : *analyse fonctionnelle ; convergence faible ; distributions ; espaces de Sobolev.*

En revanche, aucune connaissance préalable en EDP n'est requise.

■ ■ ■ ■ ■

| Systèmes dynamiques (M1)|
(Raphaël Cerf et Yann Chaubet)

La première partie du cours sera consacrée aux systèmes dynamiques déterministes. Nous procèderons à une première classification des systèmes linéaires, puis nous verrons comment les systèmes généraux peuvent être linéarisés au voisinage d'un point fixe hyperbolique. Nous montrerons le théorème de la variété stable, et nous parlerons de stabilité structurelle. Des exemples classiques seront présentés pour illustrer les concepts introduits.

La seconde partie du cours sera consacrée à la théorie ergodique. Nous présenterons les théorèmes classiques de récurrence, le théorème ergodique et nous expliquerons ce qu'est un système ergodique. Nous parlerons de la question de la classification des systèmes ergodiques et de leur entropie. Nous appliquerons
certains de ces résultats à la percolation de premier passage.

**

■ ■ ■ ■ ■

| Topologie algébrique (M1)|
(Olivier Benoist et Coline Emprin)

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique. On associera aux espaces topologiques des invariants algébriques (groupe fondamental, groupes d'homologie, anneau de cohomologie, groupes d'homotopie supérieurs), et on donnera des applications de l'étude et du calcul de ces invariants à des problèmes de topologie.

1) Groupe fondamental
Revêtements
Théorème de Van Kampen
CW-complexes

2) Homologie singulière
Théorème de Hurewicz
Homologie cellulaire
Cohomologie et cup-produit

3) Groupes d'homotopie supérieurs
Fibrations
Théorème de Freudenthal

■ ■ ■ ■ ■

| Topologie et calcul différentiel (L3)|
(Dimitry Chelkak et Lucas Vacossin)

1/ Topologie générale et espaces métriques :
Espaces métriques et espaces topologiques.
Complétude, compacité, connexité.
Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2/ Espaces de Banach :
Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
Théorème de Hahn-Banach.
Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3/ Calcul différentiel :
Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4) Équations différentielles ordinaires :
Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
Lemme de Gronwall et estimations