DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

DIRECTION DES ÉTUDES

2026-2027



Brochure Enseignement

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05 | 01 44 32 31 72 | education@dma.ens.fr

Le département de mathématiques et applications (DMA) offre une formation en trois ans de haut niveau scientifique, sanctionnée par le Diplôme de l'École Normale Supérieure (DENS) ès Mathématiques. D'effectif sélectionné réduit (une cinquantaine d'étudiant·e·s par an), elle est axée sur les mathématiques et leurs applications. Les objectifs visent à assurer une professionnalisation de haut niveau, une formation par la recherche ainsi qu'une multidisciplinarité équilibrée. En partenariat avec Sorbonne Université, l'Université Paris Cité, l'Université Paris-Dauphine – PSL, l'Université de Paris-Saclay, et l'Université Sorbonne Paris-Nord, le cursus inclut la validation de deux diplômes nationaux : la licence et le master.

| Direction des études du DMA : Cyril Houdayer et Jimmy Lamboley
| Secrétariat pédagogique : Yue Teng

45 rue d'Ulm 75230 Paris Cedex 05
01 44 32 31 72 - education@dma.ens.fr
https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement

TABLE DES MATIÈRES :

PRÉSENTATION 8

- Objectifs 8
- Débouchés 8
- Candidature 2026-2027 9
- Le diplôme de l'ENS majeure mathématiques 9
- Mineures et doubles majeures du DENS 10
- Inscription à l'université 10
- Tutorat 11
- Stage 11
- Séminaire « des mathématiques » 12
- Planning 12

ENSEIGNEMENT 14

- Organisation de la formation 14
  - Filière mathématiques 15
  - Filières pluridisciplinaires 16
- Règles d'obtention 18
  - Première année 18
  - Deuxième année 21
  - Troisième année 24

Cours de l'année scolaire 2026-2027 25

- Première année 25
- deuxième année 28
- Troisième année 30

- Enseignements hors département 31

PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2026-2027 32

| *Algèbre 1* (L3 S1) | 32

| *Algèbre 2* (M1 S1) | 33

| *Analyse complexe* (L3/M1 S2) | 34

| *Analyse fonctionnelle* (L3 S2) | 35

| *Analyse des Equations aux Dérivées Partielles* (M1 S1) | 36

| *Compléments de probabilités* (M1 S2) | 37

| *Cours avancé : Equivalence relations and measured group theory* (M1 S2) | 38

| *Cours avancé : Formalisation mathématique* (M1 S2) | 39

| *Cours de mathématiques pour les littéraires* (PT) | 40

| *Cours de statistique pour économistes* (PT) | 41

| *Cours spécial : IA pour les mathématiques - découverte et automathisation* (M1 S1) | 42

| *Cours spécial du Collège de France : Chaos et phénomènes universels en théorie spectrale* (M1) | 43

| *Cours spécifique à la filière Maths-Biologie : Groupe de lecture – Mathématiques pour la biologie* (L3 S2) | 44

| *Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Combinatoire* (L3 S2) | 45

| *Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Relativité générale* (L3 S2) | 46

| *Dimension reduction and manifold learning* (M2 S2) | 47

| *Géométrie différentielle* (M1 S2) | 48

| *Groupe de lecture : Arbres, marches et graphes aléatoires* (L3 S1) | 49

| *Groupe de lecture : Initiation aux équations aux dérivées partielles* (L3 S1) | 50

| *Groupe de lecture : Introduction aux EDOs* (L3 S1) | 51

| *Groupe de lecture : Points rationnels sur les courbes elliptiques* (L3 S1) | 52

| *Groupe de travail : Des harmoniques sphériques aux formes modulaires : la correspondance thêta pour $O(n) \times Mp_2(\mathbb{R})$* (M1 S1) | 53

| *Groupe de travail : La correspondance de Riemann-Hilbert pour les surfaces de Riemann* (M1 S1)

| 54

| *Groupe de travail : Limites de champs moyen : des systèmes de particules en interactions aux EDP* (M1 S1) | 55

| *Groupe de travail : Marches aléatoires branchantes* (M1 S1) | 57

| *Groupe de travail : Théorie cinétique et applications* (M1 S1) | 58

| *Groupe de travail : Théorie de Hodge pour les matroïdes* (M1 S1) | 59

| *Groupe de travail : Théorie spectrale du Laplacien* (M1 S1) | 60

| *Groupe de travail : Transport optimal : géométrie et statistique* (M1 S1) | 61

| *Intégration et Probabilités* (L3 S1) | 63

| *Logique* (M1 S1) | 64

| *Mathématiques des données* (M1 S1) | 65

| *Mathématiques pour économistes* (PT)| 66

| *Optimal Transport for Machine Learning* (M2 S1)| 67

| *Optimisation et transport optimal* (M1 S2) | 68

| *Probabilités discrètes pour physiciens* (PT) | 69

| *Processus stochastiques* (M1 S1) | 70

| *Statistique* (M1 S1) | 71

| *Introduction to generative modeling with flows and diffusions* (M2 S2) | 72

| *Systèmes dynamiques* (M1 S1) | 74

| *Topologie algébrique* (M1 S2) | 75

| *Topologie et calcul différentiel* (L3 S1) | 76



PRÉSENTATION

OBJECTIFS

Le Diplôme de l'ENS ès Mathématiques, DENS, assure une formation originale d'excellence de mathématicien·ne·s pur·e·s et appliqué·e·s, ayant acquis de solides connaissances dans d'autres disciplines (informatique, physique, biologie, …). Il s'agit d'une formation de trois ans à la recherche et par la recherche. Son atout majeur est un rythme plus rapide rendu possible par un encadrement renforcé, notamment grâce à un tutorat individuel. Plusieurs cursus sont possibles dont des cursus pluridisciplinaires.

DEBOUCHES

À la sortie de la formation, l'étudiant·e peut poursuivre des études de mathématiques en préparant un doctorat. Il est également possible de prendre immédiatement un emploi professionnel.

À moyen terme, après la thèse, les débouchés possibles sont notamment :

- Enseignant·e-chercheur·euse à l'université ;
- Chercheur·euse en mathématiques pures ou appliquées dans un organisme de recherche public (CNRS, CEA, INRIA, ONERA, CNES...) ou privé (recherche et développement dans le secteur bancaire, transport, …) ;
- Enseignant·e en classes préparatoires et plus généralement dans l'enseignement post-baccalauréat (Écoles d'ingénieurs, formations spécialisées…) ;
- Ingénieur·e mathématicien·ne dans l'industrie.

Des passerelles sont possibles en cours de scolarité vers les formations proposées par d'autres départements de l'ÉNS, dont l'informatique, la physique, l'économie, la biologie.

Des possibilités de sortie en cours de formation vers les filières universitaires peuvent être aménagées en accord avec les universités partenaires.

CANDIDATURE 2026-2027

Le recrutement au diplôme de l'ENS ès Mathématiques (DENS) s'effectue par une sélection rigoureuse, sur dossier et entretien. Il est ouvert aux étudiant·e·s ayant validé les deux ou trois premières années de la licence ou d'un diplôme étranger équivalent.

Toutes les informations se trouvent sur les sites suivants :

- Site enseignement des mathématiques : https://www.math.ens.psl.eu/lenseignement
- Site de l'ÉNS : https://www.ens.psl.eu/une-formation-d-exception/admission-concours

LE DIPLOME DE L'ENS MAJEURE MATHEMATIQUES

Les normalien·ne·s reçoivent le Diplôme ès Mathématiques de l'ENS (DENS) à l'issue de leur scolarité, pourvu que les conditions suivantes soient satisfaites :

- L'inscription au diplôme de l'ENS, obligatoire chaque année
- La validation des trois années au DMA suivant les règles exposées dans cette brochure
- La validation de 72 ECTS en plus des 180 ECTS de la L3 et du Master :
  - Au moins 24 ECTS de cours mathématiques[1]
  - Au moins 24 ECTS dans un ou plusieurs autres départements
    dont 12 ECTS de cours **scientifiques** non-mathématiques
  - Au moins 24 ECTS libres dont ceux des expériences et des cours de langue
  - Au moins 2 expériences d'ouverture
  - La formation sur les grands enjeux
- La validation d'un cours de langue par année d'inscription au DENS

[1] Les règles du cursus au DMA exigent bien plus que cet attendu minimal de 24 ECTS.

MINEURES ET DOUBLES MAJEURES DU DENS

- Mineures du DENS

Promotion à partir de 2023 :

Un candidat ayant obtenu un minimum de 30 ECTS dans une discipline littéraire ou scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Promotions antérieures à 2023 :

Un candidat ayant obtenu un minimum de 24 ECTS dans une discipline scientifique distincte de celle du master 2 pourra obtenir une spécialité secondaire en sciences (ou mineure) sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

Un candidat ayant obtenu un minimum de 48 ECTS dans une discipline littéraire pourra obtenir une spécialité secondaire en lettres sous réserve de l'accord des directeurs des études des départements concernés.

- Doubles majeures du DENS

Les doubles majeures du DENS sont délivrées à titre exceptionnel sous les conditions suivantes :

- Un cursus complet dans une discipline (au sein d'un département de l'ENS)
- Au moins deux années complètes dans la seconde discipline (L3-M1, M1-M2 ou L3-M2 équivalent à 120 ECTS)
- Accord des deux départements

INSCRIPTION A L'UNIVERSITE

Après leur admission, les normalien·ne·s s'inscrivent auprès des universités partenaires via le secrétariat enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Au cours de ces études, il est en particulier nécessaire d'obtenir les diplômes nationaux de licence et de master délivrés à partir des résultats obtenus aux différents modules d'enseignement selon les modalités suivantes :

- Pour la troisième année de licence (L3) et la première année de master (M1), les cours, examens ont lieu au département de mathématiques de l'École Normale Supérieure et les résultats sont transmis aux universités partenaires ;

- Pour la seconde année de master (M2), les étudiants s'inscrivent directement dans les universités partenaires qui délivrent les diplômes ;

- A l'issue de la dernière année de la formation, étant titulaires du master, les étudiant·e·s qui le souhaitent préparent une thèse de doctorat, sous réserve de l'accord d'un·e directeur·ice de recherche ainsi que des divers·es encadrant·e·s de l'université d'inscription (délégué·e aux thèses, directeur·ice de l'école doctorale de rattachement, directeur·ice du laboratoire d'accueil).

TUTORAT

L'encadrement des étudiant·e·s en mathématiques est assuré par un système de tutorat individualisé, et supervisé par le directeur des études. Chaque année, un·e tuteur·ice, membre du Département de Mathématiques et Applications de l'ENS, est affecté·e à chaque étudiant. Choisi·e aléatoirement en première année, le choix sera fait, pour les autres années, en fonction des thèmes de préférence indiqués lors des journées d'entretien de fin d'année.

Le rôle des tuteur·ice·s est d'aider l'étudiant·e à l'organisation de sa scolarité, de le·a conseiller sur ses choix de thèmes de travail et de lecture, et d'être un appui crucial pour son orientation. Au début de chaque année, un programme d'études (inscription pédagogique, sur le portail Pegasus) est mis au point par les étudiant·e·s, les tuteur·ice·s et le directeur des études du DMA, validé en ligne par ces parties. Ce programme régule les conditions de validations de l'année d'étude correspondante. Il est vivement recommandé d'aller voir régulièrement les tuteur·ice·s.

STAGE

La scolarité en mathématiques comprend un stage d'au moins 4 mois, à l'étranger de préférence. Ce stage a pour but de familiariser l'étudiant·e à un environnement différent.

La plus grande souplesse est laissée aux étudiant·e·s pour ce stage et une certaine initiative demandée en contrepartie. Le positionnement de ce stage dans les trois années en enseignement ou en recherche, le thème scientifique, l'aspect linguistique sont autant de paramètres à prendre en compte et cela nécessite d'y réfléchir bien à l'avance, d'en parler avec les tuteur·ice·s et les directeurs des études du DMA.

Pour aider à mettre en place ce stage, les membres du département de mathématiques proposent des universités d'accueil et des encadrant·e·s potentiel·le·s pour des séjours à l'étranger, dans diverses thématiques, de niveau M2 ou plus. Une liste partielle est disponible sur le site de l'enseignement du département de mathématiques de l'ENS. Les étudiant·e·s sont supposé·e·s contacter les encadrant·e·s étranger·e·s proposé·e·s non pas directement, mais par l'intermédiaire des membres du département de mathématiques.

Ce stage reste optionnel, et n'est pas obligatoire, bien qu'il aide à remplir la condition d'expérience à l'étranger pour le DENS. Il est possible de le substituer par une plus courte expérience, mais qui ne sera pas forcément rétribuée en crédits ECTS.

Un rapport de stage de 20 pages sera à rendre avant une soutenance de 15 minutes, qui a traditionnellement lieu à la rentrée suivante. Les consignes données par le passé sont les suivantes :

- Brève description de l'expérience à l'étranger
- Fonctionnement du lieu de stage
- Au moins 15 pages de description de vos activités mathématiques, recherches…
- Vous pouvez utiliser du matériel de prépublication, ou rédiger un court mémoire sur les problématiques étudiées pendant le stage

SEMINAIRE « DES MATHEMATIQUES »

Le séminaire « Des Mathématiques » a lieu deux fois par mois, avant le thé du département de mathématiques, et s'adresse à tous. Le suivi de ces exposés ne demande pas de prérequis. C'est souvent l'occasion de découvrir un champ de recherches en mathématiques. En 2026-2027, un séminaire Mathématiques et environnement sera organisé en alternance sur le même créneau.

PLANNING

Attention, ces dates sont susceptibles de modification, consulter l'agenda en ligne.

Réunion de présentation des cours de première année
Jeudi 17 septembre 2026 à 10h30, amphithéâtre Galois

Réunion de présentation des cours de deuxième année
Vendredi 11 septembre 2026 à 14h, salle Cartan

Commission des études – Seconde session 2025-2026
Vendredi 25 septembre 2026 à 14h, salle R3

Premier semestre :

Pré-rentrée du M1 « Analyse Harmonique, Combinatoire et surfaces, Introduction à Lean »
Du lundi 7 au vendredi 11 septembre 2025

Début des cours
Première année : lundi 21 septembre 2025
Deuxième année : lundi 14 septembre 2025

Vacances
Vacances de la Toussaint : du samedi 24 octobre au dimanche 1 novembre 2026
Vacances de Noël : du samedi 19 décembre 2026 au dimanche 3 janvier 2027

PSL Week
Du lundi 23 novembre au vendredi 27 novembre 2026
Cours spéciaux obligatoires 1A : Transition écologique et sociale (ENS)
Cours spécial facultatif 2A : IA pour les mathématiques (DMA, Amaury Hayat)

Fin des cours
Vendredi 22 janvier 2026

Examens
Du lundi 25 janvier au vendredi 29 janvier 2027

Réunion de présentation du second semestre
Mercredi 20 janvier 2027 à 13h30, salle Cartan

Deuxième semestre :

Début des cours
Lundi 15 février 2027

Vacances
Vacances d'hiver : du samedi 8 février au dimanche 14 février 2027
Vacances de printemps : du samedi 10 avril au dimanche 18 avril 2027

Fin des cours
Vendredi 28 mai 2027

Examens
Du lundi 31 mai au vendredi 4 juin 2027

Exposés de mathématiques de première année
Du lundi 7 juin au vendredi 11 juin 2027

Commissions des études 2025-2026
1ère session (première et deuxième années) : lundi 25 juin 2027
2ère session (première et deuxième années) : septembre 2027



ENSEIGNEMENT

ORGANISATION DE LA FORMATION

Les cursus sont individuels et mis au point au début de chaque année avec les tuteur·ice·s, le directeur des études ou de l'enseignement et les encadrant·e·s du département de mathématiques. De nombreuses déclinaisons de cursus sont possibles :

- la filière mathématiques
- la filière mathématiques/informatique
- la filière mathématiques/physique
- la filière mathématiques/biologie

Les filières pluridisciplinaires permettent, sous réserve de confirmation par le jury compétent, la validation d'une seconde spécialité pour le diplôme de l'ENS.

L'équipe d'encadrement pourra examiner toute proposition individuelle cohérente de cursus présentée par les étudiant·e·s et s'inscrivant dans l'esprit de la formation. De façon générale, les élèves doivent obtenir l'aval de leur tuteur·ice et des directeurs des études pour tous les choix concernant leur programme d'études.

- FILIERE MATHEMATIQUES

Première année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en troisième année de licence (L3), mais suivent aussi des cours de première année de master (M1) dont la validation sera effective en deuxième année avec l'inscription administrative en M1. La formation comporte également des cours d'informatique, de physique, d'économie ou de biologie. La validation de la première année nécessite la rédaction d'un mémoire, dit de première année, au second semestre.

Deuxième année

Les étudiant·e·s sont inscrit·e·s en première année de master (M1). En parallèle sont proposés des groupes de travail et des cours avancés de niveau recherche assurés par des spécialistes. Au second semestre, les étudiant·e·s dont l'avancement des études est suffisant peuvent effectuer un stage long, éventuellement à l'étranger, dans une université ou une entreprise.

Troisième année

La troisième année de la formation est consacrée à la deuxième année de master (M2). L'inscription dans une université est entièrement de la responsabilité de l'élève. Avec le·a tuteur·ice, l'élève décide des compléments à apporter à sa formation : stage, groupes de travail, cours supplémentaires…

En fin d'année, les étudiant·e·s composent un mémoire dit de Diplôme, qui récapitule tous les travaux personnels réalisés pendant leur scolarité, en y ajoutant une présentation d'un domaine de recherche. Ce mémoire fait l'objet d'une soutenance orale obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques.

▪ FILIERES PLURIDISCIPLINAIRES

Ces cursus exigeants sont une spécificité de l'ENS. Organisées conjointement entre le DMA et les départements de physique, d'informatique ou de biologie, ces formations permettent :

- aux étudiant·e·s motivé·e·s de poursuivre une double formation ;
- aux étudiant·e·s encore indécis·e·s de repousser d'une année le choix entre deux disciplines.

Filière mathématiques/physique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence de physique. Ils sont inscrits au département de mathématiques. En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Enseignant-e-s chercheur-euse-s référent-e-s : Cristina Toninelli (CNRS/PSL) et Amir-Kian Kashani Poor (ENS)

Filière mathématiques/informatique

En première année, les élèves valident une licence de mathématiques et une licence d'informatique. Les élèves entré·e·s par le concours Info s'inscrivent au département d'informatique, les élèves entré·e·s par le concours MPI au département de mathématiques. Les tuteur·ice·s proviennent de leur département d'inscription. En deuxième année, il est possible de s'orienter soit vers les mathématiques soit vers l'informatique, et de rejoindre le département de son choix.

Enseignant chercheur référent : Marc Lelarge (INRIA) et Djalil Chafaï (PSL)

Filière mathématiques/biologie

Les mathématiques jouent un rôle de plus en plus important dans les grandes avancées de la biologie. Réciproquement, l'étude du vivant est devenue source de nouveaux problèmes mathématiques, profonds et difficiles. Dans ce contexte, la filière mathématiques/biologie proposée par le département de mathématiques de l'ENS, en partenariat avec le département de biologie de l'ENS, vise à former des chercheur·euse·s capables d'exprimer les problèmes biologiques en langage mathématique, de développer les idées mathématiques ainsi générées et de promouvoir les applications de ces nouvelles théories à l'analyse des systèmes biologiques qui leur ont donné naissance.

Enseignant chercheur référent : Amaury Lambert (IBENS)

Objectifs du cursus

Les étudiant·e·s issu·e·s de la filière mathématiques/biologie de l'ENS maîtriseront les bases de la biologie contemporaine. Il y aura été appris à décortiquer la littérature spécialisée, à suivre les développements rapides sur les thèmes de pointe, et à initier dialogues et collaborations avec les biologistes dans leurs laboratoires.

Les deux années de cursus permettent aux élèves concerné·e·s de continuer, suivant leur parcours :

- un M2 de mathématiques de la modélisation,
- un M2 de mathématiques pour la biologie,
- un M1/M2 IMaLiS, parcours Ecologie/Evolution, parcours Neurosciences ou parcours Biologie fondamentale pour la Santé.

Structure du cursus

La filière mathématiques/biologie se déroule sur deux ans. Les élèves s'inscrivent en L3 et M1 de mathématiques tout en suivant des cours de biologie et/ou de sciences cognitives. Par ailleurs, les cours de biologie sont ouverts à tou·te·s les étudiant·e·s du département de mathématiques ; l'inscription à ces cours n'engage donc pas les étudiant·e·s concerné·e·s à l'exécution du programme complet de la filière mathématiques/biologie.

REGLES D'OBTENTION

Un enseignement de langue au moins est obligatoire pour toutes les filières chaque année. Il peut être validé par un cours du département des langues de l'ENS (ECLA), ou par un séjour longue durée dans un pays non francophone.

PREMIERE ANNEE

La licence troisième année (L3) de mathématiques nécessite selon les filières :

Commun pour toutes les filières	4 cours de niveau licence : (1) ○ Algèbre 1 ○ Analyse complexe ○ Intégration et probabilités ○ Topologie et calcul différentiel	12 ECTS x 4 = 48 ECTS
Filière Mathématique	Mémoire et exposé de 1ère année	12 ECTS
Filière Math/Physique	Cours spécifiques du cursus mixte ○ Relativité générale	
Filière Math/Informatique	Cours spécifique du cursus mixte ○ Combinatoire	
Filière Math/Biologie	Mémoire et exposé d'interface math-biologie	
Total		60 ECTS

(1) Un cours de L3 peut être remplacé par un cours de M1 fondamental.

L'obtention de la première année du DENS nécessite, outre la L3 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un cours fondamental de M1 de mathématiques (s'il ne compte pas pour la L3) parmi :
  Algèbre 2
  Analyse complexe
  Analyse fonctionnelle
  Géométrie différentielle
  Logique
  Optimisation et transport optimal

- Un groupe de lecture parmi :
  Arbres, marches et graphes aléatoires, Igor Kortchemski CNRS
  Initiation aux équations aux dérivées partielles, Corentin Gentil ENS
  Introduction aux EDOs, Amina Mecherbet UPC
  Points rationnels sur les courbes elliptiques, Julien Marché SU

- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.

| *Il est conseillé de valider un minimum de 6 ECTS en première année et 12 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filières pluridisciplinaires

<u>Mathématiques/Physique</u>

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques et en L3 de physique. L'obtention de la première année nécessite, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 de physique :

- Des cours de physique de niveau licence recommandés par la FIP équivalents à deux cours par semestre pour un total de 36 ECTS
  Physique statistique des systèmes en équilibre (9 ECTS, 1er semestre)
  Introduction à la mécanique quantique (9 ECTS, 1er semestre)
  Relativité et électromagnétisme (9 ECTS, 2ème semestre)

Hydrodynamique (9 ECTS, 2ème semestre)
Physique du solide (9 ECTS, 2ème semestre)

- Le stage et l'exposé du cursus maths/physique (24 ECTS) ; ce stage est co-encadré par des chercheur·euse·s des deux disciplines.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers la physique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Informatique

Les élèves s'inscrivent en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques, l'obtention de la L3 d'informatique :

- Des cours d'informatique de niveau licence équivalents à 36 ECTS parmi :

Semestre 1 :

Algorithmique et programmation (9 ECTS)
Systèmes numériques (9 ECTS)
Langages de programmation et de compilation (9 ECTS)
Langages formels, calculabilité et complexité (9 ECTS)
Structures et algorithmes aléatoires (9 ECTS)

Semestre 2 :

Apprentissage statistique (9 ECTS)
Systèmes et réseaux (9 ECTS)
Sémantique et application à la vérification de programmes (9 ECTS)
Informatique scientifique par la pratique (9 ECTS)
Initiation à la cryptologie (12 ECTS)
Théorie de l'information et codage (9 ECTS)
Bases de données (9 ECTS)
Lambda calcul et logique informatique (6 ECTS, à l'ENS de Paris Saclay)

Sous réserve d'accord des responsables de cours, il est possible de faire un projet supplémentaire (3 ECTS).

- Le stage (12 ECTS) et l'exposé/mémoire (12 ECTS) du cursus maths/informatique.

Il s'agit d'un travail bibliographique encadré par un·e chercheur·euse et se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance, puis d'un stage de recherche en informatique d'au moins 6 semaines entre mi-juin et fin août. Il a lieu en laboratoire (universitaire ou industriel) prioritairement en province. Le stage comprend aussi la rédaction d'un rapport et une soutenance. Les sujets de mémoire et de stage sont liés l'un à l'autre.

En deuxième année, les élèves s'orientent soit vers les mathématiques soit vers l'informatique et rejoignent le département de leur choix.

Mathématiques/Biologie

Les élèves s'inscrivent seulement en L3 de mathématiques. L'obtention de la première année demande, en plus de la L3 de mathématiques :

- Le cours d'optimisation et transport optimal (2ème semestre).
- Le cours d'Analyse fonctionnelle (2ème semestre, peut remplacer le cours d'Analyse complexe de la L3 de mathématiques qui devra alors être validé en 2ème année).
- Cours de biologie pour non biologistes :
  Introduction aux Sciences du Vivant (1er semestre, 3 ECTS)
  Biologie moléculaire de la cellule (2ème semestre, 3 ECTS)
  Groupe de lecture en biologie : Mathématiques pour la biologie (2ème semestre, 6 ECTS).
- Deux cours parmi les suivants au 1er semestre :
  Ecologie & Biodiversité (6 ECTS)
  Neurosciences (6 ECTS)
  Biologie Moléculaire et Génétique (6 ECTS)
- Deux cours parmi les suivants au 2ème semestre :
  Biologie cellulaire (6 ECTS)
  Développement (6 ECTS)
  Biologie évolutive (6 ECTS)
- Une école d'été ou un stage en biologie ou en neuroscience.

- DEUXIEME ANNEE

L'obtention de la première année de master (M1) requiert :

3 cours fondamentaux de M1 de mathématiques parmi : ○ Algèbre 2 ○ Analyse complexe (1) ○ Analyse fonctionnelle (2) ○ Géométrie différentielle (2) ○ Logique (2) ○ Processus stochastiques (3) ○ Optimisation et transport optimal (2)	3 x 12 ECTS = 36 ECTS
1 cours complémentaire de M1 de mathématiques parmi : ○ Analyse des EDP ○ Compléments de probabilités (2) ○ Mathématiques des données ○ Statistique ○ Systèmes dynamiques ○ Topologie algébrique (2) ○ Chaos et phénomènes universels en théorie spectrale (4)	12 ECTS
Un groupe de travail	12 ECTS
Total	60 ECTS

(1) Comptabilisé pour le M1 si ne compte pas pour la L3
(2) Cours accessible dès la 1ère année
(3) Cours recommandé pour la filière maths/biologie
(4) Cours spécial au Collège de France

L'obtention de la deuxième année du DENS nécessite en plus du M1 de mathématiques :

Filière mathématiques

- Un second cours de M1 complémentaire (peut être remplacé par la validation de 12 ECTS de cours de M2)
- La validation de deux « cours avancés » (24 ECTS)

  Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 6 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés » parmi :

  - Equivalence relations and measured group theory
  - Formalisation mathématique

  Les cours avancés sont remplaçables par un stage long (4 mois minimum) ; un stage moins long, commençant au milieu du second semestre, permet d'être dispensé de la partie groupe de travail des cours avancés.

  | *Remarque : Une expérience à l'étranger est requise pour la validation du DENS.* |

- Le mémoire et l'exposé de 1e année pour les élèves inscrit·e·s directement en 2e année
- Des cours scientifiques non mathématiques, à choisir, en accord avec le·a tuteur·ice ou la direction des études, dans la liste des cours non mathématiques proposés plus loin dans cette brochure ou dans la maquette d'un autre département scientifique : physique, informatique, biologie, chimie, géosciences, études cognitives, voire économie.
- Des cours spéciaux sont également proposés. Cette année :
  - La pré-rentrée du M1 propose un minicours autour de l'analyse de Fourier (Amina Mecherbet) et un minicours « Automaths : IA et formalisation » (Amaury Hayat). Elle ne fait pas l'objet d'évaluation et de validation d'ECTS.
  - La suite du minicours « Automaths : IA et formalisation » (Amaury Hayat) est organisée en novembre durant la PSL Week du S1. Elle ne fait pas l'objet d'évaluation et de validation d'ECTS.
  - Le cours spécial « Chaos et phénomènes universels en théorie spectrale » (Nalini Anantharaman) du Collège de France au S2, est considéré comme un cours de M1 complémentaire.
  - Des minicours exceptionnels peuvent être donnés par des professeurs invités.

| *Il est conseillé de valider un minimum de 6 ECTS en première année et 12 ECTS en tout sur les deux premières années en cours scientifiques non-mathématiques.* |

Filière mathématiques/biologie

- Les détails sont à vérifier auprès du responsable de filière M. Amaury Lambert (amaury.lambert@ens.psl.eu).

- TROISIEME ANNEE

L'obtention de la troisième année du DENS nécessite :

- L'obtention de la seconde année du master de mathématique (M2)

- La composition du *mémoire de Diplôme*
- Ce mémoire est formé d'un curriculum vitæ, de l'ensemble des travaux écrits réalisés lors de la scolarité, et d'un texte nouveau, entre 10 et 20 pages, appelé *Introduction au domaine de recherche (IDR),* présentant de manière motivée le domaine de recherche dans lequel se placera le projet futur (thèse ou insertion professionnelle). Ce travail est présenté lors d'une soutenance orale, obligatoire pour la validation du diplôme de l'ENS avec mention ès Mathématiques (DENS).

- La validation de cours supplémentaires *(facultatif)* :
  - Cours de M2 des universités partenaires
  - Concentration of measure and related topics, Djalil Chafaï
  - Introduction to generative modeling with flows and diffusions, Eric Vanden Eijden
  - Dimension reduction and manifold learning, Eddie Aamari

- Un groupe de travail auto-organisé *(facultatif).*

- Un stage long à l'étranger, en province ou industriel *(facultatif).*

| *Remarque : une expérience à l'étranger au cours de la formation est requise pour la validation du Diplôme de l'ENS.* |

COURS DE L'ANNÉE SCOLAIRE 2026-2027

- PREMIERE ANNEE

Cours mathématiques – cours des cursus mixtes

Premier semestre :

• Algèbre 1 : théorie des groupes (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	S. Rideau-Kikushi CNRS/ENS L. Nataf ENS
• Probas 1 : intégration et probabilités (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	N. Enriquez UPS N. Cuneo UPC
• Analyse 1 : topologie et calcul différentiel (L3, 12 ECTS) (70h : 42h cours + 28h TD)	J. Guillod SU C. Gentil ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Arbres, marches et graphes aléatoires	I. Kortchemski CNRS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Initiation aux équations aux dérivées partielles	C. Gentil ENS
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Introduction aux EDOs	A. Mecherbet UPC
• Groupe de lecture (L3, 6 ECTS) Points rationnels sur les courbes elliptiques	J. Marché SU
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	 T. Servi UPC R. Guénet ENS

Deuxième semestre :

• Analyse complexe (L3, 12 ECTS) (Cours de licence - 70h : 42h cours + 28h TD)	F. Charles UPS T. Serafini SU
• Analyse fonctionnelle (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 70h : 42h cours + 28h TD)	C. Houdayer ENS A. Mecherbet UPC
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS)	E. Giroux CNRS/ENS

(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	N. Heitz ENS
• Optimisation et transport optimal (M1, obligatoire en cursus mixte math/bio, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Mérigot UPS A. Bertolino ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Probas 3/2 : Compléments de probabilités (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	 L. Dumaz CNRS/ENS S. Chabredier ENS
• *Cours de 2nde année accessible en 1ère année :* Topologie algébrique (12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	 J. Marché SU C. Huang ENS
• *Cours spécifique cursus Info/Maths :* Combinatoire (12 ECTS) (48h cours + 24h TD)	 G. Chapuy
• *Cours spécifique cursus Maths/Physique :* Relativité générale (12 ECTS) (42h cours)	 C. Huneau CNRS/ENS Y. Bonthonneau CNRS/ENS
• *Groupe de lecture en biologie du cursus maths/bio :* Mathématiques pour la biologie (6 ECTS)	A. Véber CNRS/UPC

Exposé de première année (12 ECTS)

Il s'agit d'une initiation à un thème de recherche actuel. Il s'effectue en binôme sous la direction d'un·e encadrant·e appartenant le plus souvent au département de mathématiques et applications de l'ENS ou en laboratoire pour les sujets relevant des filières pluridisciplinaires. Il s'agit en général de la présentation d'un article de recherche. Une liste de sujets (non limitative) est présentée au mois de janvier y compris ceux des filières pluridisciplinaires.

Le travail consiste en la rédaction d'un texte de synthèse, dit *mémoire de première année*, et d'un exposé. Cet exposé a lieu en général la deuxième quinzaine de juin. Les qualités de rédaction et d'exposition (clarté, concision, aisance) sont importantes.

Stage et exposé du cursus mathématiques/physique (24 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e de physique, sur un sujet relié à celui du stage ;
- Un stage niveau L3 dans un laboratoire de physique (12 ECTS).

Stage (12 ECTS) et exposé du cursus mathématiques/informatique (12 ECTS)

Ce travail personnel bi-disciplinaire, encadré par un·e enseignant·e de chaque discipline, consiste en :

- Un travail bibliographique comparable à l'exposé de première année du cursus mathématiques au cours du second semestre, sous la houlette d'un·e enseignant·e de mathématiques et/ou d'un·e enseignant·e d'informatique, sur un sujet relié à celui du stage, se terminant par la rédaction d'un mémoire et une soutenance ;
- Un stage d'initiation à la recherche de niveau L3 dans un laboratoire de recherche d'informatique public ou privé, hors ENS et de préférence en province, donnant lieu à la rédaction d'un rapport et à une soutenance.

Mémoire et exposé d'interface mathématiques/biologie (12 ECTS)

Les étudiant·e·s réalisent un travail personnel à partir d'un article de recherche exploitant les mathématiques associées à un thème biologique. Ce travail donnera lieu en fin d'année à la rédaction d'un rapport et la présentation d'un exposé.

Prérequis : Cours de S1 « Introduction aux sciences du vivant ».

Exemples de cours scientifiques non mathématiques

- Physique - http://www.phys.ens.fr/
    - Introduction à la mécanique quantique
    - Physique statistique des systèmes en équilibre
    - Relativité et électromagnétisme
    - Hydrodynamique

- Physique du solide

- Informatique - http://diplome.di.ens.fr/

  - Langages formels, calculabilité et complexité
  - Algorithmique
  - Langages de programmation et compilation
  - Systèmes numériques
  - Système d'exploitation
  - Lambda calcul et logique informatique
  - Théorie de l'information et codage
  - Combinatoire
  - Sémantique et application à la vérification de programmes
  - Bases de données

- Biologie - http://www.biologie.ens.fr/depbio/

  - Biologie cellulaire
  - Biologie Moléculaire et Génétique
  - Introduction aux sciences du vivant
  - Introduction to Ecology
  - Neurosciences

- Études cognitives - http://cognition.ens.fr

  - Introduction to Cognitive Neuroscience
  - Computational Neuroscience

- Économie - http://www.economie.ens.psl.eu/

  - Economie pour scientifiques
  - Introduction aux théories de la croissance économique
  - Introduction à l'économétrie

- DEUXIEME ANNEE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

• Algèbre 2 : théorie de Galois (M1, 12 ECTS) V. Mehmeti SU
(Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD) O. Sabatin ENS

• Logique (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h :42h cours + 28h TD)	T. Servi UPC R. Guénet ENS
• Probas 2 : processus stochastiques (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	D. Chafaï PSL G. Gomez ENS
• Analyse des équations aux dérivées partielles (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	J. Lamboley SU A. Chabert ENS
• Mathématiques des données (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	J. Delon UPC G. Peyré CNRS/ENS S. Boïté ENS
• Statistique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	E. Aamari CNRS/ENS D. Rouchouse ENS
• Systèmes dynamiques (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	P.-A. Guihéneuf SU M. Guillermit ENS
• Cours spécial : IA pour les mathématiques	A. Hayat ENS

Deuxième semestre :

• Analyse fonctionnelle (L3, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	C. Houdayer ENS A. Mecherbet UPC
• Géométrie différentielle (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	E. Giroux CNRS/ENS N. Heitz ENS
• Optimisation et transport optimal (M1, 12 ECTS) (Cours fondamental - 70h : 42h cours + 28h TD)	Q. Mérigot UPS A. Bertolino ENS
• Compléments de probabilités (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire – 63h : 35h cours + 28 TD)	L. Dumaz CNRS/ENS S. Chabredier ENS
• Topologie algébrique (M1, 12 ECTS) (Cours complémentaire - 63h : 35h cours + 28h TD)	J. Marché SU C. Huang ENS

Cours avancés, deuxième semestre

• Cours avancé : Equivalence relations and measured group theory	S. Chakraborty ENS

(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail) M. Donvil ENS
C. Le Bars ENS
B. Morando ENS

• Cours avancé : Formalisation mathématiques en Lean F. Nuccio U. Saint-Etienne
(6 ECTS + 6 ECTS) (21h cours + 21h groupe de travail)

Chaque cours avancé est composé d'une partie cours sur 7 semaines, validée par un examen, puis d'une partie groupe de travail, validée par un ou plusieurs exposés. Les élèves valident deux « cours avancés ». Les cours avancés sont remplaçables par un stage d'au moins 4 mois.

Groupes de travail, premier semestre

- Des harmoniques sphériques aux formes modulaires : la correspondance thêta pour O(n) × $Mp_2(\mathbb{R})$, G. Chenevier CNRS/ENS
- La correspondance de Riemann-Hilbert pour les surfaces de Riemann, T. Serafini ENS
- Limites de champs moyen : des systèmes de particules en interactions aux EDP, O. Mischler ENS
- Marches aléatoires branchantes, Y. Hu USPN
- Théorie cinétique et applications, E. Bouin PSL
- Théorie de Hodge pour les matroïdes, O. Benoist CNRS/ENS
- Théorie spectrale du Laplacien, C. Dietze SU
- Transport optimal : géométrie et statistique, J. Delon UPC

Cours non mathématiques

Des exemples de cours scientifiques non mathématiques sont disponibles dans la partie présentation des cours de la première année.

▪ TROISIEME ANNEE

Cours de mathématiques

Premier semestre :

L'auto-organisation de groupes de travail est vivement recommandée. Elle peut être encadrée, si besoin, par un·e enseignant·e du DMA.

Deuxième semestre :

Les cours suivants peuvent être validés dans le cadre du DENS (9 ECTS, 24h cours). Ils peuvent aussi souvent être validés dans le cadre d'un M2, voir le responsable pédagogique du M2 d'inscription pour les conditions pédagogiques.

- Concentration of measure and related topics D. Chafaï PSL
- Introduction to generative modeling with flows and diffusions E. Vanden-Eijden PSL
- Dimension reduction and manifold learning E. Aamari PSL

ENSEIGNEMENTS HORS DEPARTEMENT

Le DMA offre également un ensemble de cours de mathématiques dans d'autres départements de l'ENS.

- Mathématiques pour littéraires L. Mallet-Burgues ENS
- Statistique pour économistes O. Mischler ENS
- Mathématiques pour économistes Q. Hurez ENS
- Probabilités discrètes pour physicien·ne·s C. Toninelli CNRS/PSL



PROGRAMME DES COURS DE L'ANNÉE 2026-2027

| *Algèbre 1* **(L3 S1)** |

(Silvain Rideau- Kikuchi et Louise Nataf)

On étudiera dans ce cours les groupes, principalement à travers leurs actions sur des ensembles ou des espaces vectoriels.

Le plan général sera le suivant

- Généralités sur les groupes et leurs quotients
- Actions de groupe et groupe symétrique
- Éléments de structure des groupes finis
- Groupes abéliens et modules sur les anneaux principaux
- Représentations des groupes finis.

Bibliographie :

http://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr/AlgebreI.html

■ ■ ■ ■ ■

| *Algèbre 2* **(M1 S1)** |
(Vlerë Mehmeti et Owen Sabatin)

Le but de ce cours est d'introduire les bases de l'algèbre commutative, dont les objets principaux sont rencontrés dans de nombreux domaines mathématiques. Le cours se concentrera sur des propriétés des anneaux commutatifs et sur la théorie des extensions de corps.

Les thèmes abordés seront :

- Anneaux (commutatifs)
  - modules, produit tensoriel, localisations
  - anneaux factoriels, euclidiens, principaux
  - Nullstellensatz et normalisation de Noether
  - anneaux de valuations, dimension de Krull
  - spectre d'un anneau et quelques propriétés géométriques
- Extensions de corps
- Théorie de Galois et applications

Bibliographie provisoire

- Introduction to Commutative Algebra, M.F. Atiyah, I.G. MacDonald
- Introduction à la théorie des schémas, A. Ducros
- A course in Galois Theory, D. Garling
- Algebra, S. Lang
- Commutative Algebra (Volumes I et II), O. Zariski, P. Samuel

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse complexe* **(L3/M1 S2)** |
(François Charles et Thomas Serafini)

L'analyse complexe étudie les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes localement ou globalement. Localement, ces fonctions sont des sommes de séries convergentes. Globalement, leur étude nécessite la mise en œuvre d'idées issues de topologie algébrique et de la géométrie différentielle. Ce cours se concentre sur les fonctions d'une variable complexe pour introduire les méthodes et les résultats principaux. Nous concluons par quelques exemples d'applications à des domaines variés.

La théorie de Cauchy donne les premières propriétés des fonctions analytiques complexes et révèle l'importance de la topologie des ensembles de définition de ces fonctions. Après avoir démontré l'analycité des fonctions holomorphes, nous donnons les premières propriétés (Théorème de l'application ouverte, Lemme de Schwarz) et les grands théorèmes (Théorème de Runge, Théorème de Weierstrass, Théorème de Riemann, Théorème de Picard...). L'étude des singularités conduit à la notion de fonctions méromorphes avec de nombreuses applications au calcul d'intégrales via la théorie des résidus et aux problèmes d'approximation (méthode du col). Nous concluons par plusieurs incursions en théorie des nombres : études des fonctions elliptiques et modulaires et des séries de Dirichlet.

■ ■ ■ ■ ■

| *Analyse fonctionnelle* **(L3 S2)** |
(Cyril Houdayer et Amina Mecherbet)

Dans ce cours, nous allons donner une introduction à l'analyse fonctionnelle au sens large, en développant la théorie des espaces vectoriels topologiques, des distributions et des opérateurs, et en illustrant les notions par de nombreux exemples ainsi que par quelques applications à l'analyse, aux équations aux dérivées partielles et à la théorie des groupes. Le cours sera composé de trois parties :

1) Espaces vectoriels topologiques : convexité, théorèmes de Hahn-Banach, complétude, espaces de Fréchet et de Banach, dualité, topologies faibles et réflexivité, avec des applications telles que le théorème de point fixe de Ryll-Nardzewski et l'existence de la mesure de Haar sur les groupes compacts.

2) Distributions : dérivation, convolution et régularisation, distributions tempérées, espace de Schwartz et transformée de Fourier, espaces de Sobolev, solutions fondamentales et régularité elliptique.

3) Théorie spectrale : opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, spectre et résolvante, formule du rayon spectral, opérateurs compacts, calcul fonctionnel et théorèmes spectraux, classes de Schatten.

Des notes de cours en anglais seront disponibles sur la page web de l'enseignant.

Bibliographie :

- N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5. Éléments de mathématique. New edition. Masson, Paris, 1981. vii+368 pp.
- H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Universitext. Springer, New York, 2011. xiv+599 pp.
- J. B. Conway, A course in functional analysis. Second edition. Grad. Texts in Math. 96. Springer-Verlag, New York, 1990. xvi+399 pp.
- G. K. Pedersen, Analysis now. Grad. Texts in Math. 118. Springer-Verlag, New York, 1989. xiv+277 pp.
- W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. xiv+416 pp.
- W. Rudin, Functional analysis. Second edition. Internat. Ser. Pure Appl. Math. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. xviii+424 pp.

| *Analyse des Equations aux Dérivées Partielles* **(M1 S1)** |
(Jimmy Lamboley et Ambre Chabert)

L'histoire des équations aux dérivées partielles (EDP) commence au 18e siècle par des équations venant de la physique (Euler, d'Alembert, Lagrange, Laplace...). Au cours du 19e siècle, l'étude des EDP devient également un outil essentiel dans de nombreuses branches des mathématiques, par exemple avec le travail de Riemann en analyse complexe.

Cette dualité (étude des équations venant des autres sciences d'une part, interaction avec divers domaines mathématiques d'autre part) restera centrale au cours du 20e siècle, et aujourd'hui encore.

Le premier objectif de ce cours est d'acquérir un peu de culture générale sur les équations classiques (équations de la chaleur, équation de Laplace, équation des ondes, équation de transport…) et sur certaines de leurs généralisations, linéaires ou non-linéaires.
Le second objectif est d'utiliser, découvrir et développer de multiples outils de l'analyse qui sont utilisés dans le cadre des EDP, mais dont l'importance va bien au-delà : on abordera notamment l'analyse de Fourier, l'analyse complexe, l'analyse fonctionnelle, la théorie des distributions, le calcul de variation, et de possibles extensions.

Bibliographie :

- L. C. Evans, Partial Differential Equations (Graduate Studies in Mathematics), Second Ed.
- C. Zuily, Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles
- H. Brézis, Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations, Springer

Plus secondaire :

- L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators I, Distribution Theory and Fourier Analysis (2008)
- L. Hörmander - The Analysis of Linear Partial Differential Operators II_ Differential Operators with Constant Coefficients (2005, Springer)
- L. Hörmander - The Analysis of Linear Partial Differential Operators III_ Pseudo-Differential Operators (2007)

■ ■ ■ ■ ■

| *Compléments de probabilités* **(M1 S2)** |
(Laure Dumaz et Sylvain Chabredier)

Ce cours est un complément au cours d'intégration et probabilités.

Il est destiné aux normaliens de première année, second semestre.

Il ne nécessite pas d'avoir suivi le cours de processus stochastiques.

Les thèmes abordés sont les suivants, entre autres :

- Percolation
- Modèle d'Ising
- Matrices aléatoires

Bibliographie :

- Cours IHES sur la percolation de Hugo Duminil-Copin
- Livre sur les matrices aléatoires de Terence Tao
- Livre sur la mécanique statistique de Sacha Friedli et Yvan Velenik

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Equivalence relations and measured group theory* **(M1 S2)** |

(Soham Chakraborty, Milan Donvil, Corentin Le Bars, et Basile Morando)

Given a measure-preserving action of a group on a finite measure space X, one can consider the equivalence relation of being in the same orbit on X. A central theme in measured group theory is to understand algebraic properties of groups solely through the orbit equivalence relations arising from their actions. At this level, some groups (such as abelian groups) become indistinguishable, while for others the opposite happens: the group and the action can be completely recovered.

The purpose of the course is to become familiar with measured equivalence relations and their interactions with diverse areas of mathematics, including operator algebras, ergodic theory, and descriptive set theory. The field has seen spectacular progress over the last thirty years and continues to generate a great deal of active research. Another aim of the course is to introduce some of the contemporary questions that are currently driving developments in the area.

Bibliographie :

- Alex Furman. Orbit equivalence rigidity. Ann. of Math. (2), 150(3):1083-1108, 1999.
- Donald S. Ornstein and Benjamin Weiss. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 2(1):161-164, 1980.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours avancé : Formalisation mathématique* **(M1 S2)** |

(Filippo Nuccio)

Le but du cours est de fournir une introduction à la formalisation mathématique : il s'agit de la discipline qui s'occupe de rendre définitions et démonstrations mathématiques accessibles à un ordinateur, ce qui permet de les vérifier rigoureusement et d'obtenir en même temps un point de vue nouveau sur les théories qu'on formalise.

Pour ce faire, on s'appuie d'une part sur des fondements mathématiques souvent différents de la théorie des ensembles ; et, d'autre part, sur des logiciels qui permettent de formaliser les définitions, les énoncés, et les preuves à l'ordinateur. Dans notre cours, on choisira comme fondements la théorie des types dépendants et le calcul des constructions inductives ; et on utilisera le logiciel Lean, avec sa bibliothèque Mathlib.

Il y aura une alternance de cours théoriques, de cours d'utilisation de Lean, et de travaux pratiques à l'ordinateur.

Il est nécessaire de venir en cours avec son ordinateur portable.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours de mathématiques pour les littéraires* **(PT)** |
(Louis Mallet-Burgues)

Ce cours est un véritable cours de mathématiques, adapté à des élèves partant sans bagage mathématique spécifique. Il est destiné à chaque élève littéraire souhaitant expérimenter concrètement ce que sont les mathématiques, dans leur logique propre et leur cadre formel particulier, et comment s'y confronter pour qu'elles deviennent un outil naturel. Il est donc idéal pour les personnes qui veulent découvrir un nouveau point de vue complémentaire sur le monde ! On essaiera ainsi de dégager des notions mathématiques pouvant apporter un éclairage différent sur la vie du quotidien, le fonctionnement de l'univers ou les prédictions scientifiques, en établissant des liens avec d'autres disciplines et points de vue.

La présentation des notions sera donc adaptée au public convié, sans vulgarisation néanmoins : peu de notions seront abordées mais elles seront pleinement traitées. Les séances alterneront entre cours et exercices, comme cela se fait généralement en mathématiques, la pratique personnelle et l'habitude permettant une bonne assimilation des notions et une aisance à la fois essentielle et profondément satisfaisante !

Le cours aura lieu au second semestre.

Les thèmes traités seront les suivants :

- Logique mathématique : Dans un premier temps, on commencera par donner un cadre logique formel à nos raisonnements, qui servira de langage de base pour le dialogue mathématique. On exposera alors de premières applications à ce formalisme à travers l'étude des ensembles infinis, qui nous consuira à la notion de fonction, véritable pierre angulaire des mathématiques.

- Suites et limites : Nous étudierons comment se résout naturellement le paradoxe de Zénon après introduction des bonnes notions mathématiques : les suites numériques et leurs limites. Autrement dit, nous verrons comment donner un sens à la convergence d'une succession de phénomènes vers une certaine limite et nous aborderons de nombreuses applications de ces théories à d'autres domaines des sciences.

- Étude de fonctions : Les fonctions et leur étude sont l'outil mathématique le plus utilisé dans toutes les sciences et pour toute entreprise de compréhension quantitative du monde. On donnera donc les instruments nécessaires pour mettre en équations ce qui nous entoure, et leur application fondamentale à la prédiction de phénomènes.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours de statistique pour économistes* **(PT)** |

(Octave Mischler)

Nous nous appliquerons dans ce cours à construire et étudier rigoureusement l'univers probabiliste afin de formaliser dans un second temps les principaux outils des Statistiques. Le cours s'adresse aux étudiants dont le bagage mathématique est semblable à celui de la filière B/L, et leur permettra de suivre les enseignements nécessitant des prérequis dans ces domaines. Nous nous intéresserons notamment à la définition de l'univers probabiliste au travers de la théorie de la mesure, aux variables aléatoires et à leur loi, aux grands résultats de convergence (Loi des Grands Nombres, Théorème Central Limite), aux concepts fondamentaux de Statistique (estimateurs, intervalles de confiance, méthode des moments), aux tests d'hypothèse, vecteurs gaussiens, test du khi deux, information de Fisher…

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécial : IA pour les mathématiques - découverte et automathisation* **(M1 S1)** |

(Amaury Hayat)

L'IA pour les mathématiques au sens moderne, c'est-à-dire le deep-learning pour les mathématiques, est une discipline récente. Pourtant, elle a déjà eu un impact fort sur les mathématiques : résolution de problèmes d'Erdős ou de conjectures célèbres à l'aide de grands modèles de langage (LLM), découverte d'un lien entre invariants hyperboliques et algébriques des nœuds, réfutation d'une conjecture de Graham à l'aide de modèles spécialisés, ou encore formalisation à grande échelle des mathématiques. Il semble se dégager pour les mathématiques un futur où l'IA a toute sa place. Ce cours donnera une introduction aux deux principales branches de l'IA pour les mathématiques : la découverte mathématique à l'aide de modèles d'IA spécialisés et entrainés à comprendre les objets et notions mathématiques pour fournir des intuitions augmentées aux mathématiciens, et la preuve automatique (incluant la formalisation automatique) à l'aide de modèles s'exprimant en langage formel ou en langage naturel.

Ce cours spécial aura lieu pendant la PSL Week du premier semestre, du 23 au 27 novembre.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécial du Collège de France : Chaos et phénomènes universels en théorie spectrale* **(M1)** |

(Nalini Anantharaman)

Ce cours portera sur les comportements universels des spectres étudiés en physique ou en mathématiques. Devant la difficulté à calculer explicitement des spectres, le physicien E. Wigner a proposé une approche statistique : faire ressortir des phénomènes répandus, plutôt que de s'intéresser à des détails individuels. Wigner a postulé un modèle probabiliste simple qui, de manière surprenante, s'accorde bien avec les statistiques spectrales fréquemment observées (noyaux de grands atomes, « billards » quantiques, graphes…). On présentera des avancées récentes pour justifier la validité de ce modèle, en essayant de faire un lien avec la notion de « système chaotique ».

Cours de M1 spécial du Collège de France, du 6 janvier au 10 février 2027.

Programme : https://www.college-de-france.fr/fr/agenda/cours/chaos-et-phenomenes-universels-en-theorie-spectrale

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Biologie : Groupe de lecture – Mathématiques pour la biologie* **(L3 S2)** |
(Amandine Véber)

Le but est de discuter à travers des présentations d'articles des questions biologiques auxquelles la modélisation peut contribuer et différents outils mathématiques que l'on peut utiliser dans ce but. 3 thèmes différents seront abordés, chacun sur 4 séances.

Les présentations des étudiants seront supervisées par des chercheurs en mathématiques et en biologie, spécialistes de ces domaines.

La validation se fait par la présentation d'au moins 2 exposés en groupe, la rédaction de 3 comptes-rendus (un pour chaque thème abordé en 4 séances) et une participation raisonnable en classe.

Le groupe de lecture aura lieu le jeudi de 14h à 16h, en salle 305 au département de biologie, 46 Rue d'Ulm.

Pré-requis : Aucun. Avoir suivi le module « Introduction aux sciences du vivant » au premier semestre est bien sûr un plus pour la compréhension des questions biologiques, mais n'est pas indispensable.

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Informatique : Combinatoire* **(L3 S2)** |
(Guillaume Chapuy)

Ce cours est une introduction à la combinatoire, à la fois dans le sens usuel en français de "combinatoire énumérative" mais aussi au sens plus large de "mathématiques discrètes", avec une insistance particulière autour des motivations et points de vue probabilistes. Nous ferons un compromis entre la largeur et la profondeur, en gardant un fil conducteur autour des objets aléatoires discrets mais en explorant diverses techniques classiques et modernes.

Plan approximatif, suivant comment on avance, avec de nombreux développements possibles en TD : Combinatoire énumérative et asymptotique basique (série génératrices, arbres, transferts, lemmes cycliques). Applications probabilistes classiques (fonctions aléatoires, second moment). Collecteur de coupons et variantes. Combinatoire signée (cribles), inclusion-exclusion. Combinatoire extrémale I : théorie de Ramsey, méthode probabiliste. Combinatoire extrémale II: Lemme de régularité de Szemerédi, triangle removal lemma.

Nous ne parlerons pas de combinatoire algébrique (représentations du groupe symétrique etc) ni de géométrie énumérative (énumération de courbes ou surfaces discrètes) mais ces développements ne sont pas très loin pour les personnes que ça intéresserait. Nous ne parlerons pas du lien entre combinatoire et logique.

Prérequis : La plupart des étudiant·es n'ayant eu qu'un contact limité voire nul avec la combinatoire, il n'y a quasiment pas de prérequis, si ce n'est des bases mathématiques de tronc commun L2. Certaines parties toucheront à un peu d'analyse complexe mais on s'efforcera de le faire sans prérequis.

Type de cours : Leçons (~2.5h /semaine) et Travaux dirigés (~1.5h /semaine)
Mode d'évaluation : Examen

■ ■ ■ ■ ■

| *Cours spécifique à la filière Maths-Physique : Relativité générale* **(L3 S2)** |
(Cécile Huneau, Yannick Bonthonneau)

La relativité générale est une théorie physique formulée par Einstein en 1915 en se basant sur les travaux de mathématiciens : Riemann et Lévi-Civita pour les objets géométriques, ainsi que Poincaré et Hilbert.

Le but de ce cours, dispensé à la fois par un physicien théoricien, et une mathématicienne (Cécile Huneau), est de donner une introduction à la relativité générale en alternant les points de vue.

Plan du cours :

- Relativité restreinte
- Géométrie Lorentzienne
- Équations d'Einstein
- Solution de Schwarzschild
- Solutions cosmologiques

Bibliographie :

- O'Neill : Semi-Riemannian geometry with applications to relativity
- Wald : General Relativity
- Choquet-Bruhat : Introduction to General Relativity, Black Holes and Cosmology

■ ■ ■ ■ ■

| *Dimension reduction and manifold learning* **(M2 S2)** |
(Eddie Aamari)

Modern machine learning typically deals with high-dimensional data. The fields concerned are very varied and include genomics, image, text, time series, or even socioeconomic data where more and more unstructured features are routinely collected. As a counterpart of this tendency towards exhaustiveness, understanding these data raises challenges in terms of computational resources and human understandability. Manifold Learning refers to a family of methods aiming at reducing the dimension of data while preserving certain of its geometric and structural characteristics. It is widely used in machine learning and experimental science to compress, visualize and interpret high-dimensional data. This course will provide a global overview of the methodology of the field, while focusing on the mathematical aspects underlying the techniques used in practice.

Le cours se tiendra au 16bis Rue de l'Estrapade.

Program:

- Manifold hypothesis and intrinsic dimension(s)
- Multidimensional scaling
- Linear dimension reduction (random projections, principal component analysis)
- Non-linear spectral methods (kernel PCA, ISOMAP, MVU, Laplacian eigenmaps)
- Ad-hoc distance-preserving methods (diffusion maps, LLE)
- Probabilistic dimension reduction and clustering (SNE, UMAP)
- Neural network-based dimensionality reduction

Bibliography:

- Ghojogh, B., M. Crowley, F. Karray, and A. Ghodsi (2023). Elements of dimensionality reduction and manifold learning
- Lee, J. A., M. Verleysen, et al. (2007). Nonlinear dimensionality reduction

■ ■ ■ ■ ■

| *Géométrie différentielle* **(M1 S2)** |
(Emmanuel Giroux et Nicolas Heitz)

Variétés différentielles : Définitions, applications différentiables entre variétés, sous-variétés, produits et revêtements de variétés, fibré tangent, application tangente. Exemples : sphères, tores, espaces projectifs, grassmanniennes. Théorème de Whitney. Immersions, submersions, fibrations, théorème de Sard. Champs de vecteurs, flots, commutation des flots, crochet.

Introduction aux groupes et algèbres de Lie. Espaces homogènes

Formes différentielles

Définitions, produit extérieur, dérivation extérieure. Cohomologie de de Rham. Intégration des formes différentielles, théorème de Stokes.

Topologie différentielle

Théorie du degré, indice de champs de vecteurs.

Surfaces

Seconde forme fondamentale. Courbure de Gauss. Theorema egregium. Théorème de Gauss-Bonnet.

Bibliographie :

- J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Press. Univ. Grenoble, 1996.
- J. Lee, Introduction to smooth manifolds, 2nd edition, Graduate Text in Mathematics 214, Springer, 2013. Accès électronique depuis l'ENS : http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5
- J. W. Milnor, Topology from the differentiable viewpoint, Univ. Press Virginia, 1965.
- M. Spivak, Differential geometry, Publish or Perish, 1979.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Arbres, marches et graphes aléatoires* **(L3 S1)** |

(Igor Kortchemski)

Les graphes aléatoires sont un sujet fascinant à l'intersection des probabilités, de la combinatoire et de la physique statistique, avec de nombreuses applications. En effet, les graphes aléatoires jouent un rôle essentiel dans l'étude des réseaux du monde réel. Ce groupe de lecture étudiera d'abord les arbres aléatoires de Bienaymé-Galton-Watson (qui décrivent la généalogie d'une population se reproduisant de manière asexuée) en utilisant leur codage par des marches aléatoires. Ensuite, on s'intéressera aux graphes d'Erdős–Rényi, obtenus à partir d'un nombre fixés de sommets et en ajoutant indépendamment chaque arête possible avec une certaine probabilité.

Il n'y a pas de prérequis particuliers : les outils mathématiques vus au niveau bac+1/bac+2 suffisent.

L'objectif principal est d'apprendre à communiquer et à présenter les mathématiques oralement. L'objectif secondaire est d'étudier un sujet en profondeur en binôme et le structurer de manière appropriée pour un exposé.

Page web du groupe de lecture : https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/GL/

Bibliographie (disponible en ligne) :

- I. Kortchemski, Arbres et marches aléatoires, https://igor-kortchemski.perso.math.cnrs.fr/enseignement/XUPS/xups16-01.pdf
- N. Curien, A random Walk among random Graphs, https://www.dropbox.com/scl/fi/g4hlg7fernxm4o6o0mqq8/cours-GA-online.pdf?rlkey=9yg9muoteqamhon23e17o8ojl&e=1&st=ivid8pw7&dl=0
- S. Roch, Modern Discrete Probability, https://people.math.wisc.edu/~roch/mdp/roch-mdp-full.pdf

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Initiation aux équations aux dérivées partielles* **(L3 S1)** |

(Corentin Gentil)

Les équations aux dérivées partielles décrivent à la fois de nombreux phénomènes physiques, mais émergent aussi de divers champs des mathématiques plus théoriques.

Il n'existe pas de méthode générique pour les résoudre, ce qui rend leur étude difficile, mais certaines méthodes relativement robustes peuvent être utilisées pour plusieurs systèmes d'équations.

Dans ce groupe de lecture, nous présenterons quelques-unes de ces méthodes en les appliquant à différentes équations, comme la méthode des caractéristiques, l'homogénéisation, l'étude asymptotique, et d'autres.

L'objectif principal du groupe de lecture est d'apprendre à faire une présentation claire, en binôme, sur un sujet préparé à l'avance.

Nous nous concentrerons sur les chapitres 3 et 4 du livre Partial Differential Equations, de Lawrence C. Evans.

Bibliographie :

- Partial Differential Equations, Lawrence C. Evans.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Introduction aux EDOs* **(L3 S1)** |

(Amina Mecherbet)

La théorie des équations différentielles ordinaires est une branche très vaste en mathématiques ayant d'innombrables applications. Le but de ce groupe de lecture est d'apprendre à présenter des résultats ou des notions mathématiques tout en s'initiant à cette théorie dans le cadre ℝ^d qui ne nécessite aucun prérequis particulier (autre que l'algèbre linéaire, analyse réelle, espaces vectoriels normés).

Les séances s'articuleront autour de différentes notions fondamentales :

Existence et unicité : théorème de Cauchy-Lipschitz, solution maximale/globale, durée de vie et sortie de tout compact. Nous apporterons également une attention particulière au cas des équations linéaires autonomes en se basant sur le calcul des exponentielles de matrices.

Analyse qualitative des solutions et comportement en temps long : équilibre, stabilité et orbites.

Selon l'effectif et la répartition des groupes, nous pourrons éventuellement aborder la notion de ω-limite et du théorème de Poincaré-Bendixson dans le cas des équations autonomes 2d ou encore la question de résolution numérique.

Références :

- Équations différentielles. Florent Berthelin.
- A Textbook on Ordinary Differential Equations. Shair Ahmad, Antonio Ambrosetti.
- Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Morris W. Hirsch, Stephen Smale.
- Poly de cours de M1 de S. Benzoni (https://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/).

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de lecture : Points rationnels sur les courbes elliptiques* **(L3 S1)** |

(Julien Marché)

Une courbe elliptique est, en gros, l'ensemble des solutions d'une équation de degré 3 à deux variables à coefficients entiers, par exemple y^2 - x^3 + 2 = 0. Ces courbes occupent une place centrale en géométrie algébrique, en théorie des nombres et en géométrie arithmétique. Ce groupe de travail suivra principalement le livre The Arithmetic of Elliptic Curves de Silverman et aura pour objectif de comprendre la structure du groupe des points rationnels d'une courbe elliptique.

Après une introduction aux équations de Weierstrass et à la loi de groupe, nous étudierons les invariants fondamentaux des courbes elliptiques, les isogénies, les courbes elliptiques sur les corps finis et leur uniformisation complexe. Une attention particulière sera portée à la théorie des hauteurs et à la preuve du théorème de Mordell-Weil, qui affirme que le groupe des points rationnels est de type fini. Si le temps le permet, d'autres sujets plus avancés peuvent être abordés.

Bibliographie :

- Une introduction élémentaire (UTM) : Rational points on elliptic curves, J. H. Silverman, J. T. Tate.
- Une introduction plus poussée (GTM) : The arithmetic of elliptic curves, J. H. Silverman.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Des harmoniques sphériques aux formes modulaires : la correspondance thêta pour O(n) × Mp₂(ℝ)* **(M1 S1)** |

(Gaëtan Chenevier)

Soit V un espace euclidien de dimension n. Le groupe orthogonal O(V) ≃ O(n) agit naturellement sur l'espace Pol(V) des polynômes V → ℂ. Cette action n'est pas du tout irréductible, par exemple elle préserve le degré des polynômes. Mieux, elle commute à l'action d'un sl_2-triplet « caché », obtenu en combinant le Laplacien de V, la multiplication par la norme au carré, et l'opérateur d'Euler. Le premier but de ce groupe de travail sera de décomposer Pol(V) en irréductibles sous l'action du produit O(V) × $sl_2(\mathbb{R})$, en suivant par exemple Weyl et Howe.
Il se trouve que Pol(V) n'est qu'un sous-espace dense de l'espace de Schwartz S(V) de V, via l'application O(V)-équivariante P(v) ↦ P(v)e^(-v·v). En général, la représentation de l'algèbre de Lie $sl_2(\mathbb{R})$ sur Pol(V) ⊂ S(V) ne s'intègre pas en une représentation de $SL_2(\mathbb{R})$ sur S(V), mais plutôt de son revêtement connexe à 2 feuillets, le groupe $Mp_2(\mathbb{R})$ (groupe métaplectique). Un second but sera d'étudier ce groupe et sa représentation naturelle sur S(V) (représentation dite « métaplectique », « d'oscillateur », « de Weil », ou « de Segal-Shale-Weil »). Cette représentation éclaire de manière surprenante les propriétés algébriques de la transformée de Fourier classique sur S(V).

Pour finir, nous verrons une application importante de ces notions à la théorie des nombres. Soit L un réseau de V supposé entier, c'est-à-dire vérifiant u·v ∈ ℤ pour tous u,v ∈ L. Soit P ∈ Pol(V) un polynôme harmonique de degré d. Alors la série génératrice ∑_{v ∈ L} P(v) q^(v·v) est une forme modulaire de poids d + n/2 pour un sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$ (Jacobi, Hecke).
Autres thèmes abordés : algèbres de Lie, représentations des groupes topologiques compacts (comme O(n)) et non compacts (comme $SL_2(\mathbb{R})$), groupe de Heisenberg, groupe symplectique, représentation métaplectique sur un corps fini, formes modulaires.
Prérequis : Algèbre 1, analyse complexe, cours d'analyse harmonique de la pré-rentrée.

Quelques références :

- D. Bump, Automorphic Forms and Representations (Cambridge University Press, 1997).
- W. Ebeling, Lattices and Codes: A Course Applied to Cryptography (Springer, 2013).
- G. B. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space (Princeton University Press, 1989).
- R. Goodman & N. R. Wallach, Symmetry, Representations, and Invariants (Springer, 2009).
- R. Howe, θ-series and invariant theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 33, 1979).
- R. Howe, On the role of the Heisenberg group in Harmonic analysis (Bull. AMS, 1980).

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : La correspondance de Riemann-Hilbert pour les surfaces de Riemann* **(M1 S1)** |

(Thomas Serafini)

À un système différentiel sur C\S, avec S fini, on peut associer une représentation complexe de π1(C\S), appelée sa représentation de monodromie. Le 21ème problème de Hilbert pose la question de la réciproque : étant donné une telle représentation, existe-t-il une équation dont c'est la monodromie ? La réponse est positive, et elle fournit une équivalence assez édifiante entre des objets de nature algébrique ou analytique et des objets de nature purement topologique.

On passera en revue la théorie sur C suivant le livre de Sauloy, puis on s'intéressera à la généralisation de la correspondance à une surface de Riemann quelconque, qui implique des objets plus compliqués. Selon l'avancement, on pourra également continuer vers la notion de groupe fondamental tannakien, ou étudier l'algébrisation de fibrés analytiques dans le contexte de la correspondance.

Références :

- J. Sauloy. Differential Galois theory through Riemann-Hilbert Correspondence: an introduction.
- M. F. Singer et M. Van der Put. Galois Theory of Linear Differential Equations.

| *Groupe de travail : Limites de champs moyen : des systèmes de particules en interactions aux EDP* **(M1 S1)** |

(Octave Mischler)

Lorsque l'on étudie un système de N particules en interaction, à mesure que N devient grand, les dynamiques microscopiques deviennent de plus en plus difficiles à prédire et de moins en moins pertinentes pour connaitre le comportement moyen du système. Pour étudier celui-ci, on remplace alors le système de N équations différentielles ordinaires ou stochastiques par une équation aux dérivées partielles (EDP), dite limite de champ moyen. Si l'étude de ces EDP est un champ de recherche à part entière, l'objet de ce groupe de travail est d'étudier le passage à la limite $N \to \infty$ et le sens à donner à l'affirmation « le système de N particules converge vers l'EDP de champ moyen ». Cette étude a été initiée par Boltzmann au XIXe siècle pour l'étude de la dynamique des gaz et continue d'être l'objet de recherches actives en lien avec divers domaines de la physique, de la biologie ou encore pour résoudre des problèmes d'optimisation.

L'objectif de ce groupe de travail est d'explorer une sélection d'articles marquants publiés au cours des trente dernières années sur ce thème, à la frontière entre l'analyse fonctionnelle, l'analyse des EDP, les probabilités et les statistiques. Nous nous intéresserons notamment aux questions de propagation du chaos, de convergence des mesures empiriques et des distributions marginales à k points.

Ce groupe de travail sera aussi l'occasion de découvrir divers types de dynamiques — systèmes du premier et du second ordre — ainsi qu'une large gamme d'interactions, depuis les noyaux réguliers jusqu'à des interactions singulières mais physiquement pertinentes, comme l'interaction coulombienne et les EDP limites associées. Nous y introduirons différents outils permettant de quantifier ces phénomènes de convergence : distance de Wasserstein, entropie relative, information de Fisher relative, énergie modulée, utiles à bien d'autres fins que l'étude des limites de champs moyen.

Bibliographie :

- S. Salem, A gradient flow approach to propagation of chaos, Discrete Contin. Dyn. Syst., 40 (2020), 5729-5754.
- S. Serfaty, Mean field limit for Coulomb-type flows, Duke Math. J., 169(15):2887-2935, 2020.
- Daniel Lacker. Hierarchies, entropy, and quantitative propagation of chaos for mean field diffusions. Probab. Math. Phys., 4(2):377-432, 2023.
- Maxime Hauray and Stéphane Mischler. On Kac's chaos and related problems. J. Funct.

Anal., 266(10):6055-6157, 2014.

- Elias Hess-Childs and Keefer Rowan. Higher-order propagation of chaos in L^2 for interacting diffusions. arXiv:2310.09654, 2023.
- Arnaud Guillin, Pierre Le Bris, Pierre Monmarché, Uniform in time propagation of chaos for the 2D vortex model and other singular stochastic systems. J. Eur. Math. Soc. 27 (2025), no. 6, pp. 2359-2386.
- Hauray, M., Jabin, P.-E. N-particles Approximation of the Vlasov Equations with Singular Potential. Arch. Rational Mech. Anal. 183, 489-524 (2007). https://doi.org/10.1007/s00205-006-0021-9.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Marches aléatoires branchantes* **(M1 S1)** |

(Yueyun Hu)

La marche aléatoire branchante est l'un des modèles fondamentaux pour décrire l'évolution d'une population (ou d'un système de particules) avec déplacements spatiaux. Son étude est naturelle en théorie des probabilités et est également motivée par de nombreuses applications en physique statistique, dans l'analyse des algorithmes aléatoires ainsi qu'en génétique des populations. Ce modèle peut être vu comme un processus de Bienaymé-Galton-Watson combiné à une dynamique spatiale. À la génération 0, un unique individu est placé à l'origine. Celui-ci engendre une descendance dont les individus se déplacent dans ℝ^d selon un processus ponctuel décrivant à la fois le nombre d'enfants et leurs positions spatiales. Ces individus constituent la première génération du processus. La même procédure est ensuite répétée pour chaque individu de cette génération, indépendamment des autres et selon la même loi de reproduction et de déplacement. Son analogue en temps continu, appelé mouvement brownien branchant (Branching Brownian Motion), est étroitement lié à l'étude des équations de Fisher-KPP. Ces deux modèles ont fait l'objet d'intenses recherches au cours des dernières décennies.

Dans ce groupe de travail, nous commencerons par l'étude des processus de Bienaymé-Galton-Watson, depuis l'approche classique par les fonctions génératrices jusqu'au point de vue moderne fondé sur les changements de probabilité introduits par Lyons, Pemantle et Peres (1995). Nous nous intéresserons ensuite à la marche aléatoire branchante (unidimensionnelle) et présenterons notamment l'étude de ses martingales additives et dérivées, de ses valeurs extrémales ainsi que, si le temps le permet, du maximum du champ gaussien libre.

Les prérequis se limitent aux notions élémentaires de probabilités, telles que l'espérance conditionnelle. Les processus étudiés (marche aléatoire, chaînes de Markov, martingales, processus de branchement) sont, pour la plupart, à temps discret.

Références :

- K. B. Athreya et P. E. Ney. Branching Processes. Springer-Verlag, 1972.
- J. Bertoin et B. Mallein. Reinforced Galton-Watson processes I: Malthusian exponents. Random Structures & Algorithms. (2024) 387-410.
- R. Lyons, R. Pemantle et Y. Peres. Conceptual Proofs of L log L Criteria for Mean Behavior of Branching Processes. Ann. Probab. (1995) 1125-1138.
- Z. Shi. Branching Random Walks. Cours école d'été Saint-Flour 2012.
- O. Zeitouni. Branching Random Walks and Gaussian Fields. Notes for lectures, 2020.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie cinétique et applications* **(M1 S1)** |

(Emeric Bouin)

La théorie cinétique constitue un cadre mathématique et physique visant à décrire l'évolution d'un système composé d'un très grand nombre de particules en passant d'une dynamique microscopique déterministe à une description macroscopique statistique. Elle repose sur l'introduction d'une fonction de distribution dans l'espace des phases, dont l'évolution est gouvernée par des équations telles que l'équation de Boltzmann, obtenue à partir de la dynamique hamiltonienne via des limites de grand nombre et des hypothèses de décorrélation (chaos moléculaire). Cette théorie permet d'expliquer l'émergence de phénomènes irréversibles, comme la production d'entropie, à partir de lois fondamentales réversibles, et sert de pont rigoureux vers les équations de la mécanique des fluides (Euler, Navier-Stokes) dans certains régimes asymptotiques. Elle soulève des questions mathématiques profondes, notamment sur la justification des modèles, la propagation du chaos et les limites hydrodynamiques.

Dans ce groupe de travail, on s'attachera d'abord à mettre en place rigoureusement les objets fondamentaux de la théorie cinétique, en partant de la dynamique microscopique pour introduire les fonctions de distribution et dériver les équations clés telles que l'équation de Liouville, la hiérarchie BBGKY et, sous des hypothèses appropriées, l'équation de Boltzmann. On présentera ensuite les principaux résultats mathématiques du domaine, notamment les propriétés structurelles de l'équation de Boltzmann (conservations, théorème H), ainsi que des résultats de justification comme le théorème de Lanford et les notions de propagation du chaos. Une attention particulière sera portée aux mécanismes de passage à l'échelle menant aux équations hydrodynamiques. Enfin, on explorera plusieurs directions d'application, en particulier aux plasmas via des modèles de type Vlasov-Poisson ou Vlasov-Maxwell, ainsi qu'à des systèmes issus de la biologie (dynamique de populations, modèles de taxis ou d'interactions collectives), afin d'illustrer la portée et la flexibilité du formalisme cinétique.

Références :

- C. Cercignani, R. Illner et M. Pulvirenti. The mathematical theory of dilute gases, 1994.
- R. T. Glassey. The Cauchy problem in kinetic theory, 1996.
- C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory, 2002.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie de Hodge pour les matroïdes* **(M1 S1)** |

(Olivier Benoist)

Un matroïde est un objet purement combinatoire qui abstrait les relations de dépendance linéaire entre une collection finie de vecteurs. On peut aussi associer un matroïde à tout graphe fini, et penser à la théorie des matroïdes comme à une généralisation de la théorie des graphes. Ce groupe de travail commencera par une introduction générale à la théorie des matroïdes.

Adiprasito, Huh et Katz ont associé à tout matroïde une algèbre graduée : son anneau de Chow. Ils ont de plus démontré des propriétés de non-dégénérescence et de positivité de la multiplication dans cette algèbre (dualité de Poincaré, théorème de Lefschetz vache, relations de Hodge-Riemann). Ces propriétés (et leurs noms) sont inspirées par la géométrie algébrique complexe (où l'on dispose de résultats analogues pour l'anneau de cohomologie des variétés projectives complexes), mais leurs preuves sont purement combinatoires. On présentera ces travaux ainsi que des applications en théorie des matroïdes, qui sont déjà non triviales dans le cas des graphes (e.g. log-concavité de la suite des coefficients du polynôme chromatique).

Bibliographie :

- J. Oxley, Matroid Theory, Second edition, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 2011.
- K. Adiprasito, J. Huh, E. Katz, Hodge theory for combinatorial geometries, Annals of Mathematics 2018 (188), 381-452.
- A. Chambert-Loir, Relations de Hodge-Riemann et combinatoire des matroïdes, Séminaire Bourbaki 2017-2018, exposé 1144.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Théorie spectrale du Laplacien* **(M1 S1)** |

(Charlotte Dietze)

L'objectif de ce groupe de travail est d'étudier le Laplacien sur un ouvert Ω de ℝ^d. On s'intéressera particulièrement au spectre du Laplacien, c'est-à-dire à ses valeurs propres.

Plus précisément, on étudiera le Laplacien sur Ω muni de conditions de Dirichlet au bord. Cet opérateur est auto-adjoint et non borné. On commencera par définir cet opérateur, puis on discutera du principe min-max, qui permet d'étudier ses valeurs propres sans avoir à les calculer explicitement.

On démontrera la loi de Weyl, qui décrit le comportement asymptotique des valeurs propres. On discutera également de la célèbre question de Kac, « Can one hear the shape of a drum? », qui demande si les valeurs propres du Laplacien déterminent la forme de Ω à isométrie près.

Prérequis : Analyse fonctionnelle.

Bibliographie :

Phan Thành Nam. Functional Analysis II (2021),
https://www.math.lmu.de/~nam/LectureNotesFA2021.pdf.

■ ■ ■ ■ ■

| *Groupe de travail : Transport optimal : géométrie et statistique* **(M1 S1)** |

(Julie Delon)

En 1781, Gaspard Monge publie son Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, dans lequel il étudie comment déplacer un tas de sable d'un lieu à un autre de manière « optimale ». Presque deux siècles plus tard, dans les années 1940, Leonid Kantorovitch reformule le problème, cette fois pour allouer de manière optimale des ressources en économie. Il prouve l'existence de solutions et le prix Nobel d'économie lui est décerné en 1975 pour ces travaux. Le « transport optimal » était né.

Offrant un cadre idéal pour comparer des mesures de probabilité, le transport optimal est aujourd'hui l'objet de nombreux travaux aussi bien théoriques qu'appliqués, aussi bien en analyse, probabilités ou statistiques, et trouve des applications importantes dans des domaines inattendus. Depuis une quinzaine d'années, des progrès cruciaux ont également été établis dans le calcul numérique des solutions du transport optimal, le rendant utilisable pour comparer, interpoler ou aligner des distributions de probabilité.

En science des données, le transport optimal soulève de nombreuses questions statistiques nouvelles, concernant par exemple la vitesse de convergence de certaines quantités aléatoires (comme les distances de Wasserstein entre distributions empiriques) et la dépendance de ces vitesses vis-à-vis de la dimension. Récemment, il a commencé à jouer un rôle crucial dans l'interprétation et l'analyse des modèles dits génératifs.

Dans ce groupe de travail, on commencera dans une première partie par introduire le problème en se basant sur les monographies Topics in Optimal Transportation de C. Villani et Optimal Transport for Applied Mathematicians de F. Santambrogio, qui proposent des introductions approfondies à la théorie pour un lectorat de mathématiciens. On étudiera les formulations de Monge et de Kantorovitch, l'existence et l'unicité de solutions, ainsi que la géométrie des espaces de Wasserstein. Dans un deuxième temps, on s'attaquera à la lecture des notes de cours Statistical Optimal Transport écrites par S. Chewi, J. Niles-Weed et P. Rigollet (École d'été de Probabilités de Saint-Flour, 2024). On abordera notamment la question de l'estimation statistique des distances de Wasserstein et des applications de transport. On finira avec l'étude des flots de gradient dans l'espace de Wasserstein et leurs applications en science des données.

Bibliographie :

- Topics in optimal transportation, Cédric Villani, American Mathematical Society, 2003.
- Optimal Transport for Applied Mathematicians, Filippo Santambrogio, Springer, 2015 (https://math.univ-lyon1.fr/~santambrogio/OTAM-cvgmt.pdf).

- Statistical Optimal Transport, Sinho Chew, Jonathan Niles-Weed, Philippe Rigollet, 2024. https://arxiv.org/pdf/2407.18163.
- Computational Optimal Transport: With Applications to Data Science, Gabriel Peyré and Marco Cuturi, Foundations and Trends in Machine Learning, 2019 (https://optimaltransport.github.io/).

■ ■ ■ ■ ■

| *Intégration et Probabilités* **(L3 S1)** |
(Nathanaël Enriquez et Noé Cuneo)

Nous présenterons dans un premier temps la théorie de Lebesgue qui propose une construction de l'intégrale plus souple, plus générale et mieux adaptée aux passages à la limite, que l'intégrale de Riemann. Dans cette théorie, la notion de mesure et d'espace mesuré y joue un rôle central. Kolmogorov remarque en 1930, que ces notions peuvent être utilisées pour donner une bonne axiomatique de la théorie des probabilités.

Ainsi, les probabilités pourraient être formellement vues comme un appendice de la théorie de l'intégration, mais nous verrons dans la deuxième partie de ce cours, que cette discipline développe ses propres questions et ses propres intuitions, notamment avec la notion d'indépendance d'événements, et l'étude des suites de variables aléatoires indépendantes (ou pas...).

Les fameux théorèmes limites que sont la loi des grands nombres et le théorème central limite seront le point d'orgue du cours.

Programme :

A - Théorie de l'intégration
1 - Espace mesuré
2 - Intégration sur un espace mesuré : définition et théorèmes limites
3 - Le cas de R et la mesure de Lebesgue : cohérence avec l'intégrale de Riemann
4 - Mesure produit, Théorème de Fubini et Formule de changement de variables
B - Probabilités
1 - Axiomatique de Kolmogorov : espace probabilisé, variable aléatoire, espérance.
2 - Loi d'une variable/vecteur aléatoire, fonction de répartition, génératrice, caractéristique. Lois classiques.
3 - Indépendance : d'événements, de v.a., de tribu. Calculs de lois de vecteur aléatoire.
4 - Convergence de variables aléatoires : en loi, en probabilité, presque sûre, dans L^p.
5 - Théorèmes limites : la loi des grands nombres, le théorème central limite.

Bibliographie :

- Richard Durrett : "Probability, theory and examples"
- Jean-François Le Gall : "Measure theory, Probability, Stochastic processes"

■ ■ ■ ■ ■

| *Logique* (M1 S1) |

(Tamara Servi et Rémi Guénet)

La logique s'intéresse aux liens entre les structures mathématiques en mettant l'accent sur les phénomènes de définissabilité (par des formules): axiomatisation de certaines classes, définissabilité ou non de certains ensembles, interprétations de structures les unes dans les autres, complexité combinatoire et géométrique des ensembles définissables… Par sa nature transverse, la logique mathématique a trouvé des applications à de nombreux autres sujets mathématiques : de la combinatoire à la théorie des nombres, de la géométrie algébrique à l'analyse asymptotique. La partie centrale du cours sera une introduction à la théorie des modèles et à ses applications. La partie finale sera dédiée aux phénomènes d'incomplétude et à quelques éléments de théorie des ensembles.

Programme provisoire :

- Outils de base : théorie naïve des ensembles, dualité de Boole-Stone
- Logique du premier ordre : langages, structures, sémantique
- Théorie des modèles : définissabilité, morphismes, théories, axiomatisations, ultraproduits, théorème de compacité, plongements élémentaires, isomorphismes partiels, catégoricité, théorèmes d'élimination
- Calculabilité : preuves formelles, ensembles récursifs, théorèmes de complétude et d'incomplétude de Gödel
- Conclusion : une théorie axiomatique des ensembles.

Bibliographie :

- R. Cori et D. Lascar. Logique mathématique. Cours et exercices. II : Fonctions récursives, théorème de Gödel, théorie des ensembles, théorie des modèles. Préface de J.-L. Krivine. Paris : Masson, 1993.
- M. Hils et F. Loeser. A first journey through logic. T. 89. Stud. Math. Libr. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2019.

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques des données* **(M1 S1)** |
(Julie Delon, Gabriel Peyré et Samuel Boïté)

Ce cours passe en revue les méthodes mathématiques et numériques fondamentales en sciences des données. La première partie du cours couvre les bases de la représentation et du traitement des données, en particulier la théorie de

Shannon, le filtrage et les ondelettes. La deuxième partie présente l'optimisation convexe et non-convexe, dans la perspective de son utilisation en apprentissage automatique et en particulier pour les réseaux de neurones. Le cours est validé par un petit projet et un examen.

Références :

- Pour la théorie : https://mathematical-tours.github.io/book/
- Pour le numérique et les TPs : www.numerical-tours.com

■ ■ ■ ■ ■

| *Mathématiques pour économistes* **(PT)**|
(Quentin Hurez)

Le but de ce cours est de fournir aux étudiants les outils d'analyse nécessaires pour suivre des cours d'économie s'appuyant sur un formalisme mathématique. La première partie du cours visera à introduire les notions de topologie et d'algèbre linéaire nécessaires, tandis que la deuxième fournira les bases de calcul différentiel requises afin d'aborder l'optimisation sous contraintes et la convexité en dimension arbitraire.

| *Optimal Transport for Machine Learning* **(M2 S1)**|
(Julie Delon et Gabriel Peyré)

Optimal Transport (OT) is a foundational mathematical theory that connects optimization, partial differential equations, and probability. It offers a powerful framework for comparing probability distributions and has recently become an important tool in machine learning, especially for designing and evaluating generative models. This course covers the fundamental mathematical aspects of OT, including the Monge and Kantorovich formulations, Brenier's theorem, the dual and dynamic formulations, the Bures metric on Gaussian distributions, and gradient flows. It also introduces numerical methods such as linear programming, semi-discrete solvers, and entropic regularization. Applications in machine learning will include topics like training neural networks via gradient flows, token dynamics in transformers, and the structure of GANs and diffusion models. The course will focus primarily on mathematical content rather than deep learning techniques. However, it will include hands-on numerical programming sessions using PyTorch, along with exercise sessions. Assessment will be based on a written exam reflecting the material covered in both the numerical and exercise components.

■ ■ ■ ■ ■

| *Optimisation et transport optimal* **(M1 S2)** |
(Quentin Mérigot et Alexandre Bertolino)

L'objectif de ce cours est de fournir une introduction approfondie à l'optimisation convexe et au transport optimal. La première partie se concentrera sur la convexité en dimensions finie et infinie, abordant des propriétés classiques des ensembles et des fonctions convexes, telles que les points extrémaux, les cônes normaux, la différentiabilité et la sous-différentiabilité des fonctions convexes, etc. Cette partie se terminera par une introduction à la dualité en optimisation convexe et certaines de ses applications.

La deuxième partie du cours portera sur l'optimisation numérique. Nous explorerons d'abord des approches classiques telles que la descente de gradient et la méthode de Newton, avant de nous tourner vers quelques méthodes plus modernes adaptées aux problèmes de grande dimension.

Enfin, la troisième partie sera dédiée à la théorie du transport optimal. Nous introduirons les problèmes de Monge et de Kantorovich, ainsi que la dualité de Kantorovich et les théorèmes d'existence et d'unicité. Nous examinerons ensuite l'espace de Wasserstein, la notion de flot-gradient dans cet espace, la version "entropisée" du transport optimal, et enfin certaines applications pratiques du transport optimal.

Bibliographie :

- Classical and modern optimization, Guillaume Carlier, 2022
- Optimal Transport for Applied Mathematicians, Filippo Santambrogio, 2015

■ ■ ■ ■ ■

| *Probabilités discrètes pour physiciens* **(PT)** |
(Cristina Toninelli)

Abstract: This course will present the probabilistic model and the fundamental limit theorems for sums of independent real-valued random variables. The central object of the course is the heads or tails game or the symmetric random walk on the integers.

Résumé : Ce cours présentera le modèle probabiliste et les théorèmes limites fondamentaux sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs réelles. L'objet central du cours est le jeu de pile ou face ou la marche aléatoire symétrique sur les entiers.

■ ■ ■ ■ ■

| *Processus stochastiques* **(M1 S1)** |
(Djalil Chafaï et Gaspard Gomez)

Ce cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques à temps et espace discrets, avec quelques excursions dans le cas continu :

- Révisions sur les convergences, théorèmes limites, et intégrabilité uniforme
- Vecteurs gaussiens
- Espérance conditionnelle
- Martingales à temps discret
- Chaînes de Markov à temps et espace discrets
- Processus de Poisson, et chaînes de Markov à temps continu et à espace discret
- Mouvement brownien
- Quelques modèles emblématiques issus de la physique, de la biologie, et de l'informatique.

Des notes de cours spécifiques sont disponibles sur Moodle.

Bibliographie :

- P. Barbe, M. Ledoux. Probabilité, 2007
- J.-F. Le Gall. Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, notes de cours, 2006
- J. R. Norris. Markov chains, 1997
- D. Williams. Probability with martingales, 1991

■ ■ ■ ■ ■

| *Statistique* (M1 S1) |

(Eddie Aamari et Damien Rouchouse)

La statistique s'intéresse aux méthodes permettant d'ajuster un modèle probabiliste aux observations issues d'un phénomène aléatoire. Une fois ajusté, ce modèle peut être utilisé pour expliquer (sciences expérimentales), déterminer des causes (santé), évaluer des risques (assurance, environnement), ou prédire (décision). Le but de ce cours est d'étudier des méthodes statistiques et leurs propriétés d'un point de vue théorique.

Menu :

- Modèles et expériences statistiques
- Inférence statistique : estimation, intervalles de confiance, tests
- Régression linéaire : estimateur des moindres carrés, modèle linéaire gaussien
- Méthodes d'estimation : méthode des moments, modèles exponentiels, maximum de vraisemblance, tests du chi-deux
- Outils bayésiens : risque bayésien, estimateur bayésien, optimalité minimax
- Grande dimension et données massives : parcimonie, descente de gradient
- Introduction à la statistique non-paramétrique : test de Kolmogorov-Smirnov, estimation de densité

Bibliographie :

- Benoît Cadre & Céline Vial (2012). Statistique mathématique, cours et exercices corrigés
- Didier Dacunha-Castelle & Marie Duflo (1986). Probability and statistics Vol II
- Aad van der Vaart (1998). Asymptotic statistics

■ ■ ■ ■ ■

| *Introduction to generative modeling with flows and diffusions* **(M2 S2)** |
(Eric Vanden Eijden)

Generative models based on dynamical transport have recently led to significant advances in unsupervised learning. At mathematical level, these models are primarily designed around the construction of a map between two probability distributions that transform samples from the first into samples from the second. While these methods were first introduced in the context of image generation, they have found a wide range of applications, including in scientific computing where they offer interesting ways to reconsider complex problems once thought intractable because of the curse of dimensionality. In this class, we will discuss the mathematical underpinning of generative models based on flows and diffusions, with special focus on understanding how to structure the transport to best reach complex target distributions while maintaining computational efficiency, both at learning and sampling stages. We will also discuss applications of generative AI in scientific computing, in particular in the context of Monte Carlo sampling, with applications to the statistical mechanics and Bayesian inference, as well as probabilistic forecasting, with application to fluid dynamics and atmosphere/ocean science.

Fundamentals of measure transport theory
Flow matching with stochastic interpolants
Diffusive Transport with stochastic interpolants
Link with normalizing flows and score-based diffusion models
Link with probabilistic denoising methods
Connections to optimal transport theory and Schrödinger bridges
Algorithmic aspects
Training strategies for flow-based models
Efficient sampling techniques for diffusion models
Balancing expressivity and computational tractability
Recent algorithmic innovations and efficiency improvements
Evaluation metrics for generative models (likelihood measures, FID, Inception Score)
Challenges and limitations of current models
Applications in Scientific Computing
Monte Carlo sampling applications: Statistical mechanics simulations, Bayesian inference and uncertainty quantification

Probabilistic forecasting: Fluid dynamics predictions, Climate and atmospheric/oceanic modeling, Domain-specific adaptations and constraints, Key breakthrough papers and state-of-the-art applications, Future research directions and open problems
Prerequisites
Probability theory and statistics
Basics of ordinary and stochastic differential equations
Elements of partial differential equations
Machine learning fundamentals
Programming experience (Python recommended)

Horaires :

Lundi 13h30 - 15h30 et mercredi 15h15 - 17h15 au S2.

■ ■ ■ ■ ■

| *Systèmes dynamiques* **(M1 S1)** |
(Pierre-Antoine Guihéneuf et Marthe Guillermit)

Ce cours est une introduction aux systèmes dynamiques à temps discret. On commencera par la présentation d'une famille assez diverse d'exemples, qui illustreront les notions abordées tout au long du semestre. La théorie sera également appliquée à des domaines variés et décomposée en trois séquences, les deux premières formant pour ainsi dire le socle commun de la dynamique :

1) Dynamique topologique : conjugaison, récurrence, transitivité, mélange, entropie topologique ; applications à la théorie de Ramsey.

2) Dynamique mesurée : ergodicité, théorèmes ergodiques, mélange, entropie mesurée et principe variationnel ; applications à l'approximation diophantienne.

3) Dynamique en dimension 1 : nombre de rotation sur le cercle, échanges d'intervalles d'un point de vue topologique, renormalisation et théorème de Keane. Si le temps le permet, on abordera les groupes d'homéomorphismes du cercle avec pour but la preuve d'une alternative de Tits due à Margulis.

Références :

- Yves Benoist et Frédéric Paulin, Systèmes dynamiques élémentaires, https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~frederic.paulin/notescours/cours_sysdyn.pdf.
- Cyril Houdayer, Dynamical systems, https://cyrilhoudayer.com/wp-content/uploads/2025/11/dynamical-systems-ens-2023-2026.pdf.
- Anatole Katok, Boris Hasselblatt, Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie algébrique* **(M1 S2)** |
(Julien Marché et Chuhao Huang)

Ce cours est une introduction à la topologie algébrique. On étudiera le groupe fondamental et la théorie des revêtements avant de définir l'homologie et d'étudier ses propriétés. Tout au long du cours on verra des applications de ces outils.

Bibliographie :

- Algebraic Topology, Allen Hatcher
- Topology and geometry, Glen Bredon

■ ■ ■ ■ ■

| *Topologie et calcul différentiel* **(L3 S1)** |
(Julien Guillod et Corentin Gentil)

1. Topologie générale et espaces métriques :
   Espaces métriques et espaces topologiques.
   Complétude, compacité, connexité.
   Théorèmes d'Ascoli, de Stone-Weierstrass.

2. Espaces de Banach :
   Théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé.
   Théorème de Hahn-Banach.
   Espaces de Hilbert, projection sur un sous-espace fermé, bases.

3. Calcul différentiel :
   Différentielle, inégalité des accroissement finis, formules de Taylor.
   Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.

4. Équations différentielles ordinaires :
   Existence et unicité des solutions, régularité du flot.
   Lemme de Gronwall et estimations