



cnrs



VAGUES DÉFERLANTES ET VISCOSITÉ

SÉMINAIRE DOCTORAL DU DMA - ENS

Alan Riquier, travail commun avec Emmanuel Dormy

February 28, 2024

Formulation faible

Espace de fonction

$$\mathbf{H}_{\Gamma_b}^1(\Omega_t) = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega_t))^2 : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_b \right\}$$

On **ne** suppose **pas** l'incompressibilité, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, directement dans l'espace fonctionnel (pas possible en éléments finis).

Trouver $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{H}_{\Gamma_b}^1(\Omega_t))$ et $p \in L^\infty([0, T], L^2(\Omega_t))$ tels que

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{2}{\text{Re}} \mathbb{S}(\mathbf{v}) : \mathbb{S}(\mathbf{u}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + q \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} = 0$$

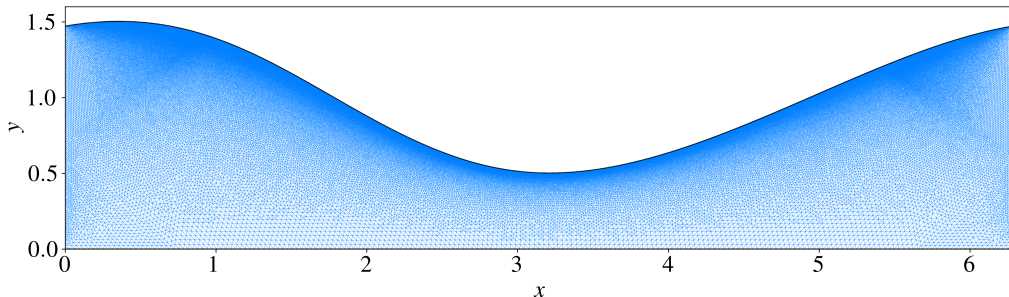
pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\Gamma_b}^1(\Omega_t)$ et $q \in L^2(\Omega_t)$, en tout temps $t \in (0, T)$.

Éléments finis

Nous utilisons FreeFem (bibliothèque c++ d'éléments finis)  [Hecht, 2012](#)



- la génération et l'advection du maillage
- le calcul des matrices
- la parallélisation via une interface avec PETSc



4 000 points sur l'interface, initialement $\approx 200\,000$ triangles, $\approx 10^6$ degrés de liberté.

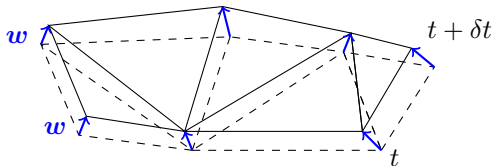
Advection du maillage

Soit w la **vitesse du maillage**. Elle est calculée à chaque pas de temps en résolvant (numériquement)

$$\begin{cases} \Delta w &= 0 & \text{in } \Omega_t \\ w &= u & \text{on } \Gamma_{s,t} \\ w &= 0 & \text{on } \Gamma_b \end{cases}$$

Les points de l'interface sont donc advectés de façon **lagrangienne**.

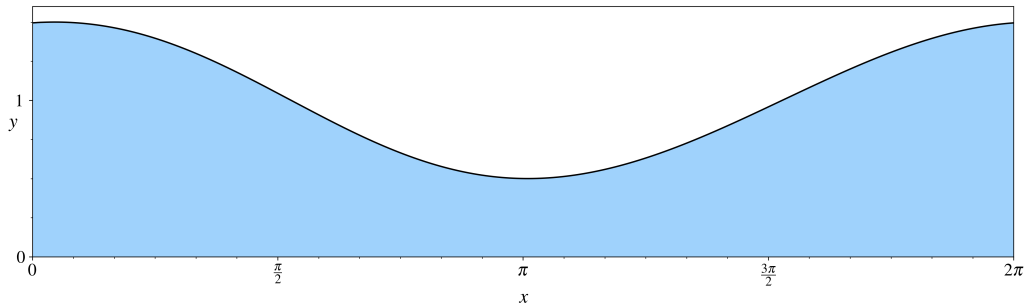
Cette méthode s'appelle **Eulerien-Lagrangien Arbitraire (ALE)**.



Quelques mots sur le numérique

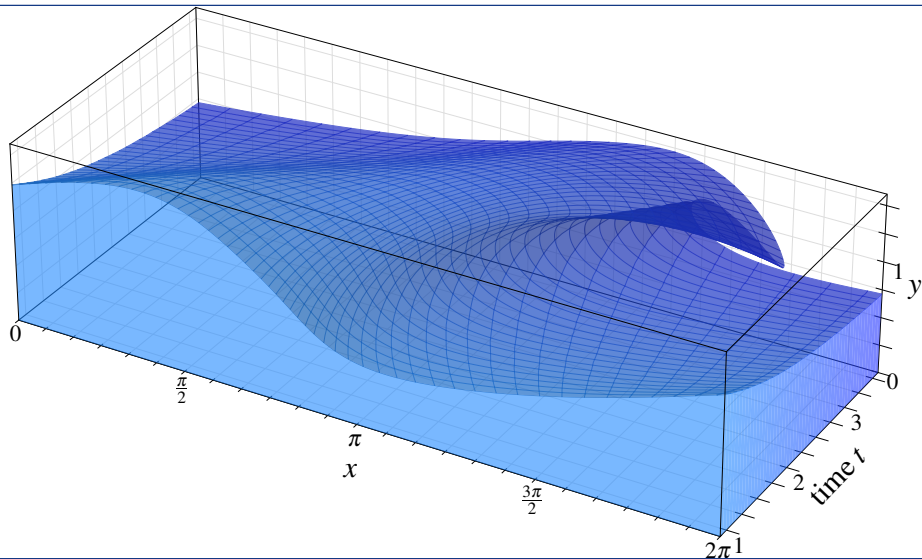
Parallélisation et temps de calcul...

Résultat à $\text{Re} = 10^6$

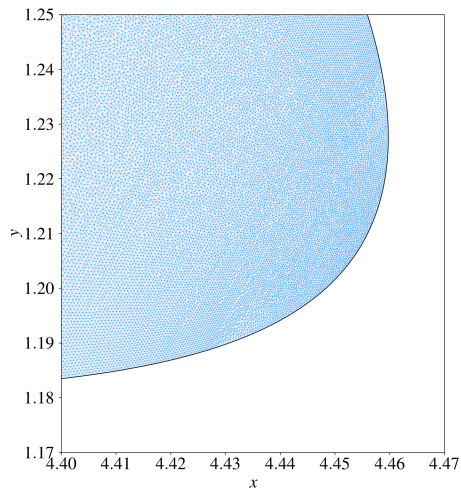
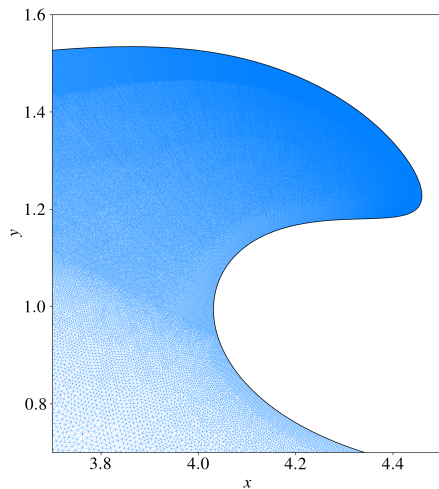


Si la vidéo ne se lance pas, [cliquer ici](#).

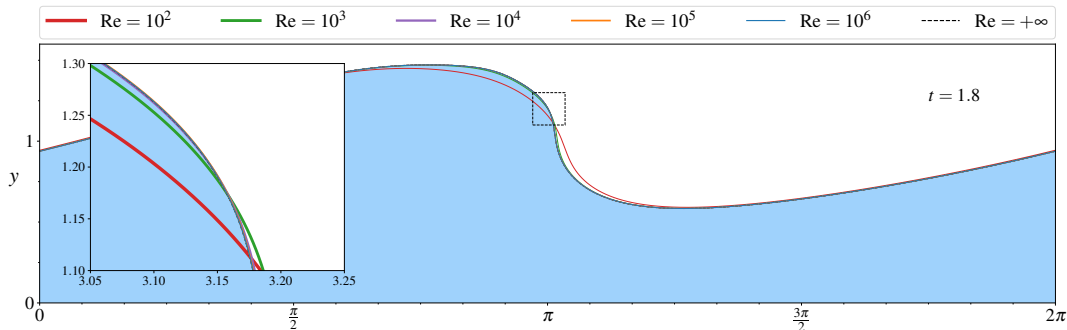
Résultat à $\text{Re} = 10^6$



Maillage à $Re = 10^6$



Influence du nombre de Reynolds Re

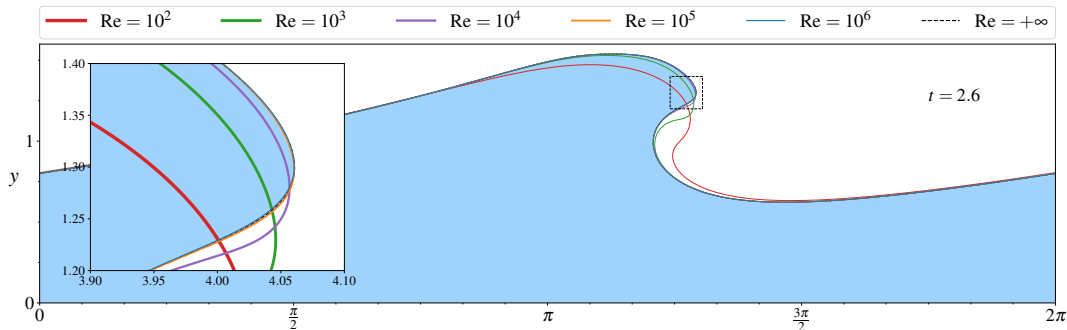


La simulation $Re = +\infty$ (i.e. la solution des équations d'Euler) a été calculée avec le code de



[Dormy & Lacave \(2023\)](#).

Influence du nombre de Reynolds Re

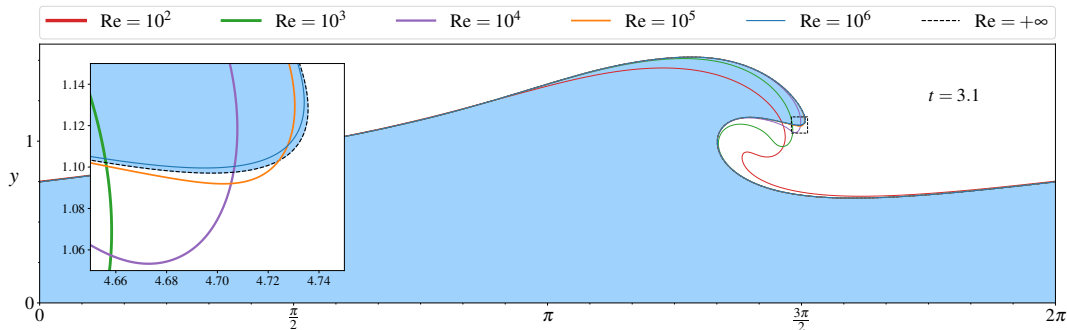


La simulation $Re = +\infty$ (i.e. la solution des équations d'Euler) a été calculée avec le code de



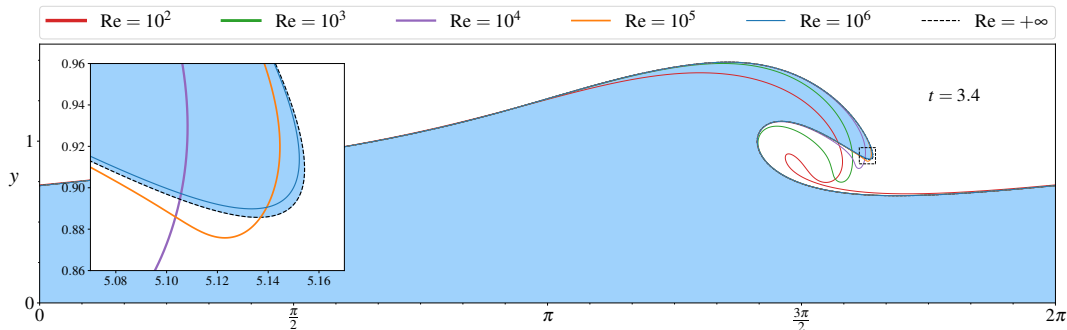
[Dormy & Lacave \(2023\)](#).

Influence du nombre de Reynolds Re



La simulation $Re = +\infty$ (i.e. la solution des équations d'Euler) a été calculée avec le code de  [Dormy & Lacave \(2023\)](#).

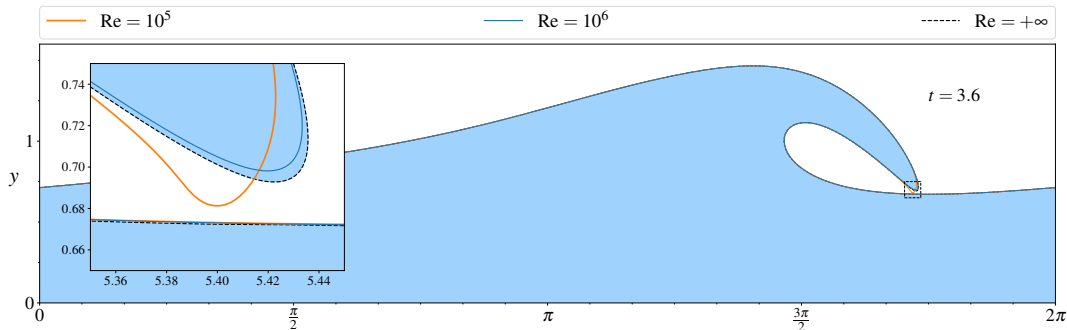
Influence du nombre de Reynolds Re



La simulation $Re = +\infty$ (i.e. la solution des équations d'Euler) a été calculée avec le code de

 [Dormy & Lacave \(2023\)](#).

Influence du nombre de Reynolds Re

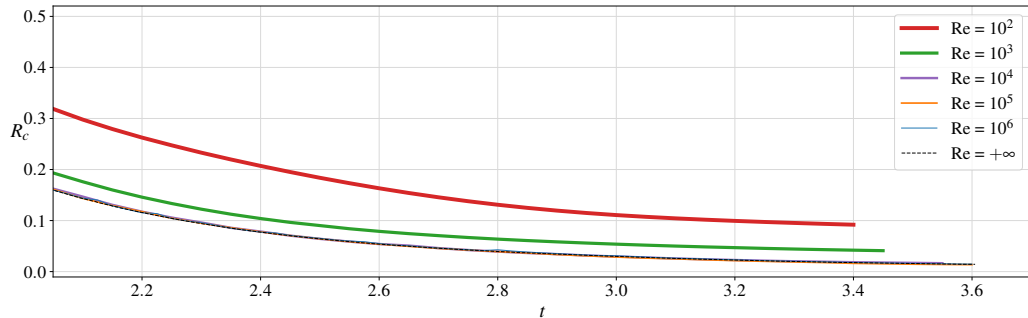


La simulation $Re = +\infty$ (i.e. la solution des équations d'Euler) a été calculée avec le code de



[Dormy & Lacave \(2023\)](#).

Évolution de la courbure maximale



avec $R_C = \kappa^{-1}$ le rayon de courbure.

Parlons dissipation d'énergie

Locale et globale

Une équation **globale** d'énergie est rapidement obtenue à partir de la formulation faible, en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{u}(t, \cdot)$,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_{s,t}} y^2 n_y ds + \int_{\Omega_t} \frac{2}{\text{Re}} \mathbb{S}(\mathbf{u}) : \mathbb{S}(\mathbf{u}) = 0$$

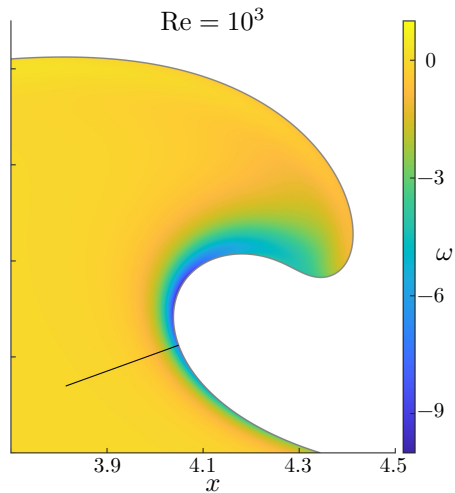
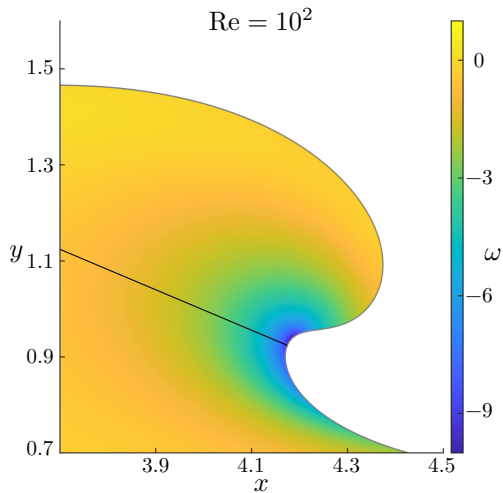
Mais cela ne nous dit pas où se situe la dissipation...

Nous avons donc besoin d'une équation **locale**, obtenue en multipliant **Navier-Stokes** par $\mathbf{u}$,

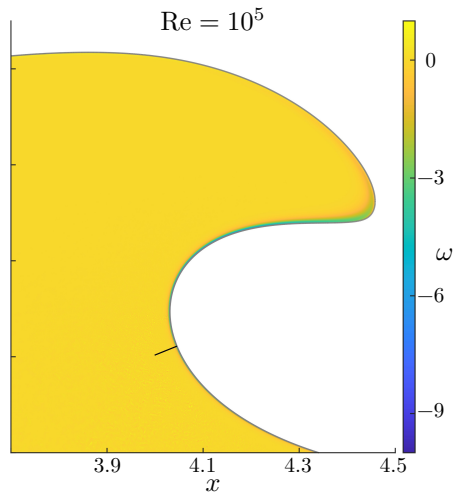
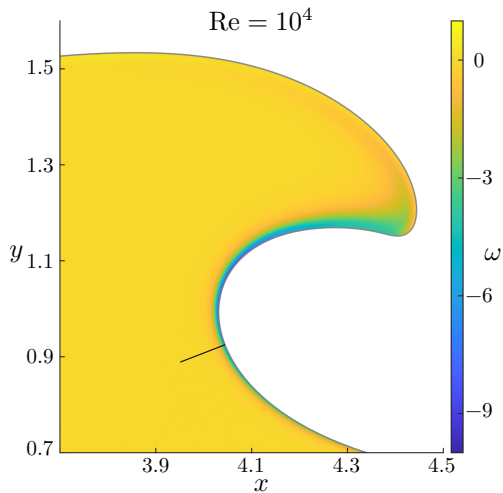
$$\partial_t \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \left[\nabla \cdot (\mathbf{u}^\perp \omega) - \omega^2 \right]$$

avec $\mathbf{u}^\perp = [-u_y, u_x]$ et $\omega = \nabla^\perp \cdot \mathbf{u}$ la **vorticité**.

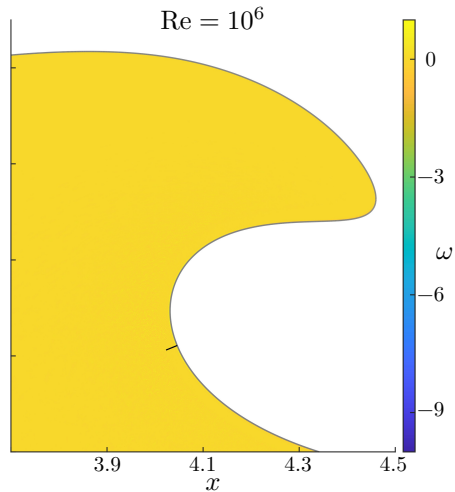
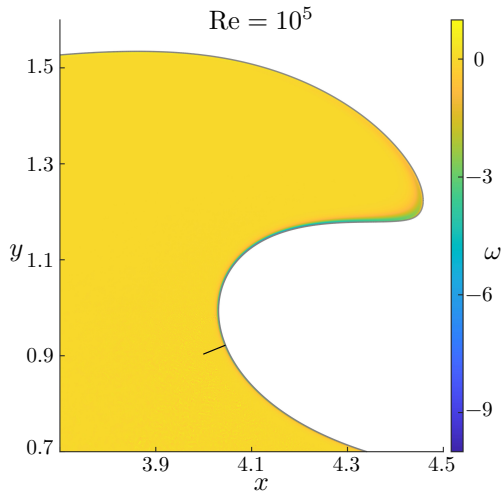
Dissipation visqueuse



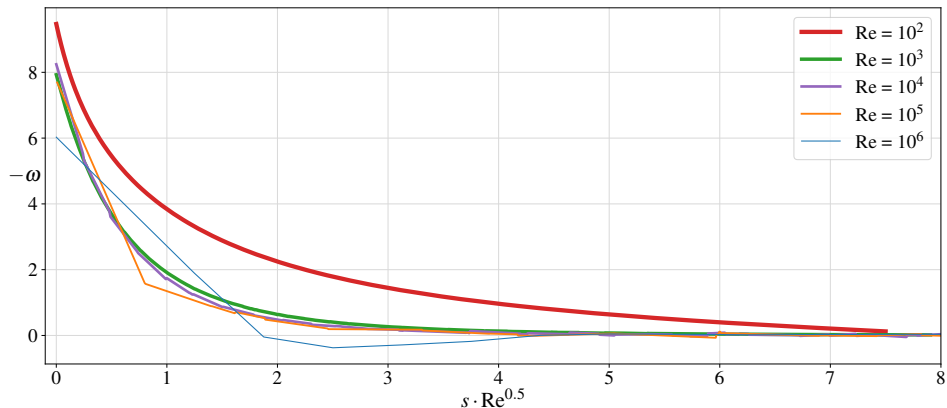
Dissipation visqueuse



Dissipation visqueuse



Taille de la couche limite



Une échelle $\text{Re}^{-\frac{1}{2}}$ (comme on s'y attend pour une [couche limite](#)).

L'origine de cette couche limite

Le "théorème" de Lundgren-Koumoutsakos

On définit l'intensité de vortex σ

$$\sigma(s) = \left[\lim_{z \rightarrow 0^+} \mathbf{u}(\gamma(s) + z\mathbf{n}(s)) - \lim_{z \rightarrow 0^-} \mathbf{u}(\gamma(s) + z\mathbf{n}(s)) \right] \cdot \mathbf{t}(s)$$

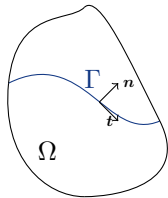
si $\mathbf{y}(s)$ est une paramétrisation par la longueur d'arc.

Le "théorème" de  Lundgren & Koumoutsakos (1999) nous dit que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \sigma \, dS + \int_{\Gamma} \frac{1}{\text{Re}} \nabla \omega \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

de sorte que $\omega + \sigma \delta_{\Gamma}$ se conserve,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Gamma} \sigma \, dS + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega \, dV = 0$$



Thank you!