

Géométrie Différentielle, TD 1 du 6 Février 2020

1. Propriétés de base des variétés

- 1- Montrer que la réunion disjointe de deux variétés (de classe C^k) admet une structure naturelle de variété (de classe C^k).
- 2- Montrer qu'un ouvert / une composante connexe d'une variété (de classe C^k) admet une structure naturelle de variété (de classe C^k).
- 3- Montrer qu'une variété topologique connexe est de dimension constante et connexe par arcs.
- 4- Montrer qu'une variété topologique se plonge (au sens topologique) dans $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (et est donc métrisable).

Solution :

- 1- Soit M et N deux variétés d'atlas de classe C^k $\mathcal{A}_M = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$, $\mathcal{A}_N = (V_j, \psi_j)_{j \in J}$. La famille $(U_i, \varphi_i)_{i \in I} \cup (V_j, \psi_j)_{j \in J}$ définit un atlas C^k sur l'ensemble $M \amalg N$, induisant une topologie séparée, dénombrable à l'infini. On munit $M \amalg N$ de l'atlas C^k maximal contenant $(U_i, \varphi_i)_{i \in I} \cup (V_j, \psi_j)_{j \in J}$.
- 2- Soit M une variété C^k d'atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$, et soit V un ouvert de M . Alors l'atlas restreint $(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap V})_\alpha$ sur V en fait une variété C^k .
Comme M est localement connexe, ses composantes connexes sont ouvertes et donc sont des variétés C^k en procédant comme dans le paragraphe précédent.
- 3- Soit M une variété topologique et $x_0 \in M$. Soit n la dimension de M en x_0 , et soit $(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n_0})$ une carte de M au voisinage de x_0 . Alors étant donné $y \in U$, $(U, \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n_0})$ est une carte de M au voisinage de y et donc la dimension de M en y est n_0 .
Cela signifie que la fonction $x \mapsto \dim_x M$ à valeurs dans \mathbb{N} est localement constante. Par connexité, elle est constante.
Une variété différentielle localement connexe par arcs (car localement homéomorphe à \mathbb{R}^n), donc toute variété connexe est connexe par arcs.
- 4- Soit M une variété topologique. On se donne $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de M . On définit $\Phi : M \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto (1_{U_i}(x))_{i \in \mathbb{N}}$. L'application Φ est injective car M est séparée, elle est également continue. Il reste à prouver que $\Phi : M \rightarrow \Phi(M)$ est ouverte. Comme tout ouvert de M est réunion de U_i , il suffit de montrer que pour tout i on a $\Phi(U_i)$ ouvert dans $\Phi(M)$. Or $\Phi(U_i) = \Phi(M) \cap \{u_i = 1\}$ ce qui conclut.

2. Espace projectif

L'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} . On va le munir d'une structure de variété de dimension n . Chaque point $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ définit une droite (celle qui le contient), notée $[x_0 : x_1 : \dots : x_n]$. Ainsi, $[x_0 : x_1 : \dots : x_n] = [x'_0 : x'_1 : \dots : x'_n] \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, (x_0, x_1, \dots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$.

Pour $i = 0, \dots, n$, on note $U_i := \{x \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n, x = [x_0 : x_1 : \dots : x_n] \text{ avec } x_i \neq 0\}$. On définit des fonctions $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$f_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Montrer que les f_i sont des bijections et qu'elles munissent $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ d'une structure de variété C^∞ (et même analytique) compacte de dimension n .

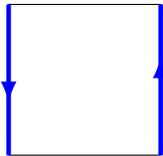
Solution :

Tout élément $x \in U_i$ admet une unique écriture sous la forme $x = [x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n]$. Ainsi, $U_i \cong \mathbb{R}^n$ et l'application f_i est justement l'application réalisant cette identification, d'où la bijectivité. Le changement de carte $f_1 \circ f_0^{-1} : \{y \in \mathbb{R}^n, y_1 \neq 0\} \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^n, y_1 \neq 0\}$ est donné par $f_1 \circ f_0^{-1}(y_1, \dots, y_n) = (\frac{1}{y_1}, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1})$ qui est un difféomorphisme C^∞ (et même analytique). Idem pour les autres cartes. Ainsi la donnée $(U_i, f_i)_{i=0, \dots, n}$ définit un atlas C^∞ sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Comme il est fini, la topologie induite est à base dénombrable. Pour la séparation, donnons nous deux points $x, x' \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ et $v \in x - \{0\}, v' \in x' - \{0\}$. On a $x \neq x' \iff (v, v')$ est une famille libre. Il existe $V, V' \subseteq \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ des voisinages ouverts de v et v' tels que pour tout $w \in V, w' \in V'$, on a (w, w') libre. On pose alors U, U' les projetés de V et V' dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. Ce sont des ouverts disjoints qui contiennent respectivement x et x' . Enfin, pour la compacité, on remarque que la projection $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est continue et que la restriction à la sphère (qui est compacte) est surjective. Ainsi $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ est compact comme image d'un compact par une application continue (à valeur dans un espace séparé).

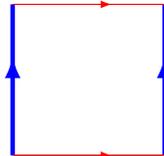
3. Surfaces classiques

Munir les espaces topologiques suivant d'une structure de variété :

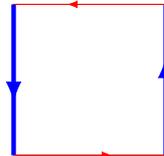
- 1- Le ruban de Möbius : $[0, 1] \times]0, 1[/ (0, y) \sim (1, 1-y)$.
- 2- Le tore : $[0, 1] \times [0, 1] / \begin{matrix} (0, y) \sim (1, y) \\ (x, 0) \sim (x, 1) \end{matrix}$.
- 3- Le plan projectif : $[0, 1] \times [0, 1] / \begin{matrix} (0, y) \sim (1, 1-y) \\ (x, 0) \sim (1-x, 1) \end{matrix}$.
- 4- La bouteille de Klein : $[0, 1] \times [0, 1] / \begin{matrix} (0, y) \sim (1, 1-y) \\ (x, 0) \sim (x, 1) \end{matrix}$.



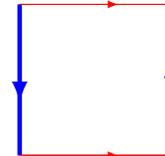
Ruban de Möbius



Tore



Plan projectif



Bouteille de Klein

Solution :

- 1- On considère les cartes suivantes :

$$\varphi : \begin{cases}]0, 1[\times]0, 1[\subset M & \longrightarrow &]0, 1[\times]0, 1[\\ (x, y) & \longmapsto & (x, y) \end{cases} \quad \psi : \begin{cases} [0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1] \times]0, 1[\subset M & \longrightarrow &]0, 1[\times]0, 1[\\ (x, y) \in [0, \frac{1}{2}[\times]0, 1[& \longmapsto & (x, y) \\ (x, y) \in]\frac{1}{2}, 1] \times]0, 1[& \longmapsto & (x, 1 - y) \end{cases}$$

On vérifie facilement que φ et ψ sont des homéomorphismes. Leurs domaines de définition sont bien des ouverts de M et forment un recouvrement de M . Il reste à montrer que $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un difféomorphisme sur son domaine de définition. Or

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \begin{cases}]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\times]0, 1[\subset M & \longrightarrow &]0, 1[\times]0, 1[\\ (x, y) \in]0, \frac{1}{2}[\times]0, 1[& \longmapsto & (x, y) \\ (x, y) \in]\frac{1}{2}, 1[\times]0, 1[& \longmapsto & (x, 1 - y) \end{cases}$$

est un difféomorphisme sur les ouverts $]0, \frac{1}{2}[\times]0, 1[$ et $] \frac{1}{2}, 1[\times]0, 1[$, donc c'est un difféomorphisme (la bijectivité est déjà acquise).

4. Somme connexe de deux variétés

Soient M_1 et M_2 deux variétés de dimension n , et (U_1, φ_1) (resp. (U_2, φ_2)) une carte de M_1 (resp. M_2) telle que φ_i soit un difféomorphisme de U_i sur la boule ouverte $B(0, 2)$ (\mathbb{R}^n est muni de la norme euclidienne standard). Soit C la couronne $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} < \|x\| < 2\}$.

- 1– Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ est un difféomorphisme de C .
- 2– On considère l'espace topologique X obtenu à partir de la réunion disjointe

$$M_1 \setminus \varphi_1^{-1}(\overline{B(0, 1/2)}) \amalg M_2 \setminus \varphi_2^{-1}(\overline{B(0, 1/2)})$$

en identifiant $\varphi_1^{-1}(C)$ et $\varphi_2^{-1}(C)$ via le difféomorphisme $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$.

Montrer qu'il existe une (unique) structure de variété sur X telle que les projections $M_i \setminus \varphi_i^{-1}(\overline{B(0, 1/2)}) \hookrightarrow X$ soient des difféomorphismes sur leurs images dans X . L'espace X muni de cette structure de variété est la *somme connexe* de M_1 et M_2 , notée $M_1 \# M_2$.

- 3– Si $n \geq 2$, montrer que $M_1 \# M_2$ est connexe si et seulement si M_1 et M_2 sont connexes.
- 4– Montrer que $M \# S^n$ est difféomorphe à M .
- 5– Montrer que la somme connexe de deux plans projectifs $\mathbb{R}P^2$ est une bouteille de Klein.

Remarque : toute surface connexe compacte est difféomorphe à la sphère, à la somme connexe de k tores, ou à la somme connexe de k plans projectifs.

5. Grassmanniennes

Soit V un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 0$. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\mathcal{G}_k(V)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension k . Par exemple, si $V = \mathbb{R}^{n+1}$ et $k = 1$, on retrouve l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ de l'exercice 2. L'objet de cet exercice est de généraliser l'exercice 2 en munissant $\mathcal{G}_k(V)$ d'une structure de variété C^∞ compacte.

Soit B un sous-espace vectoriel de V dimension $n - k$. On veut construire à partir de B une carte de $\mathcal{G}_k(V)$ dont le domaine est l'ensemble des sous-espaces vectoriels supplémentaires de B , noté U_B . Soit A un supplémentaire de B . On note $\mathcal{L}(A, B)$ l'ensemble des applications linéaires de A dans B . On définit

$$\begin{aligned} \psi_{A,B} : \mathcal{L}(A, B) &\rightarrow U_B \\ f &\mapsto (\text{Id} + f)(A) \end{aligned}$$

- 1– Montrer que $\psi_{A,B}$ est bien définie et bijective.
- 2– Montrer que le domaine de définition et l'image de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ sont des ouverts de $\mathcal{L}(A, B)$ et de $\mathcal{L}(A', B')$. Montrer que $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est un C^∞ -difféomorphisme de son domaine de définition sur son image.
- 3– Montrer qu'il existe une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$ telle que les U_B soient des ouverts et les $\psi_{A,B}$ des homéomorphismes. Vérifier que $\mathcal{G}_k(V)$ est séparé pour cette topologie.
- 4– Montrer que les $\psi_{A,B}$ forment un atlas faisant de $\mathcal{G}_k(V)$ une variété C^∞ .
- 5– Montrer que $\mathcal{G}_k(V)$ est compacte.

Solution :

- 1– L'application $\psi_{A,B}$ associée à $f : A \rightarrow B$ son graphe dans $V = A \oplus B$. La projection π_A sur A parallèlement à B réalise un isomorphisme entre le graphe et A : celui-ci est bien de dimension k . D'autre part, son intersection avec B est $\{0\}$, de sorte que $(\text{Id} + f)(A) \in U_B$ et que $\psi_{A,B}$ est bien définie.

Comme une fonction est déterminée par son graphe, $\psi_{A,B}$ est injective.

Enfin, soit $C \in U_B$. Comme $C \cap B = \{0\}$, la projection $\pi_A|_C : C \rightarrow A$ sur A parallèlement à B est injective, donc un isomorphisme par dimension. Notant π_B la projection sur B parallèlement à A , on vérifie aisément que C est le graphe de $\pi_B \circ (\pi_A|_C)^{-1} : A \rightarrow B$. Ceci montre la surjectivité de $\psi_{A,B}$.

- 2– Le domaine de définition W de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est l'ensemble des $f : A \rightarrow B$ dont le graphe est un supplémentaire de B' . Si (a_i) et (b'_j) sont des bases de A et B' , cette condition s'écrit $\det((a_i, f(a_i)), b'_{j,i,j}) \neq 0$, ce qui montre que W est ouvert. On montre de même que l'image de $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A', B')$.

Il suffit pour conclure de montrer que $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ est \mathcal{C}^∞ sur ce domaine de définition W : en effet, le même raisonnement montrera que sa réciproque est \mathcal{C}^∞ , donc que c'est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme.

Pour cela, fixons $x \in A'$ et montrons que $y = \psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}(f)(x)$ dépend de manière \mathcal{C}^∞ de $f \in W$. Or y est l'unique solution du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{aligned}\pi_{A'}(y) &= 0 \\ \pi_B(x + y) &= f(\pi_A(x + y))\end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que y dépend de manière \mathcal{C}^∞ des coefficients de ce système, donc de f .

- 3– On prend pour ouverts les $U \subset \mathcal{G}_k(V)$ tels que pour tout $A \in \mathcal{G}_k(V)$ et pour tout supplémentaire B de A , $\psi_{A,B}^{-1}(U \cap U_B)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Cela définit bien une topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$.

Comme les $\psi_{A',B'}^{-1} \circ \psi_{A,B}$ sont des homéomorphismes, on vérifie que les ouverts inclus dans U_B sont exactement les sous-ensembles de la forme $\psi_{A,B}(V)$ pour V ouvert de $\mathcal{L}(A, B)$. Ainsi, U_B est ouvert et $\psi_{A,B}$ est un homéomorphisme.

Soit $A, A' \in \mathcal{G}_k(V)$. On peut trouver un supplémentaire commun B à A et A' de sorte que $A, A' \in U_B$. Comme U_B est séparé, on peut trouver deux ouverts de U_B séparant A et A' . $\mathcal{G}_k(V)$ est donc bien séparé.

- 4– C'est une conséquence immédiate des deux questions précédentes.
- 5– On introduit E l'ouvert de V^k constitué des familles libres et $g : E \rightarrow \mathcal{G}_k(V)$ l'application qui associe à une famille libre l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrons que g est continue. Vu la définition de la topologie sur $\mathcal{G}_k(V)$, il suffit de montrer que $V_B = g^{-1}(U_B)$ est ouvert et que $g|_{V_B} : V_B \rightarrow U_B$ est continue.

Pour le premier point, choisissons une base (b_j) de B . Alors $(v_i) \in E$ appartient à V_B si et seulement si $\det(v_i, b_j)_{i,j} \neq 0$, ce qui est bien une condition ouverte.

Pour le second point, il suffit de montrer que $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}$ est continue. Fixons $x \in A$ et soit $(v_i) \in V_B$. Alors $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ est l'unique solution en y du système d'équations linéaires à $n+k$ équations et $n+k$ inconnues y et λ_i suivant :

$$\begin{aligned}\pi_A(y) &= 0 \\ x + y &= \sum_i \lambda_i v_i\end{aligned}$$

Les formules de Cramer montrent alors que $\psi_{A,B}^{-1} \circ g|_{V_B}(v_i)(x)$ dépend de manière continue des coefficients de ce système, donc des v_i . Cela montre la continuité de g .

On peut alors conclure. Fixons un produit scalaire sur V . Si K est l'ensemble des familles orthonormales, K est compact car fermé borné dans V^k et $\mathcal{G}_k(V) = g(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.