Géométrie Différentielle, TD 9 avril 2020

1. Exercices

1. Questions diverses

1– Montrer qu'une variété connexe admet au plus deux orientations.

2– Montrer que le fibré tangent d'une variété est orientable.

3– Montrer qu'un groupe de Lie est orientable.

4– Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ dont le fibré normal est trivialisable. Montrer que M est orientable.

5– Montrer que toute variété C^∞ admettant un atlas de cartes formé d'une ou deux cartes de domaines connexes et à intersections connexes est orientable.

Solution :

1– Soit ω une forme volume sur M variété connexe orientable. Si ω' est une autre forme volume, on a $\omega' = f\omega$ où $f : M \to \mathbb{R}$ est C^∞ sans point d'annulation. Par connexité, on a $f > 0$ ou bien $f > 0$ donc ω' définit la même orientation que ω ou que $-\omega$. D'où le résultat.

2– Soit U un ouvert de M et $\varphi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$ une carte de M. Soit $T\varphi : TU \to V \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m}$ la carte de TM associée. Montrons que ces cartes munissent TM d'une structure de variété orientée.

Si ψ est une autre carte de M, l'application de changements de cartes est $T\psi \circ T\varphi^{-1}(x, v) = (\psi \circ \varphi^{-1}(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v))$. Sa différentielle en (x, v) est donc de la forme

$$\begin{pmatrix} d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) & \bullet \\ 0 & d_x(\psi \circ \varphi^{-1}) \end{pmatrix},$$

qui est de déterminant positif.

3– Soit $n = \dim G$ (nécéssairement constante pour un groupe de Lie). On se donne ω_e une n-forme linéaire alternée non nulle au point e de G. On l'étend à G tout entier en une forme volume G invariante à gauche en posant $\omega_g := L^\star_{g^{-1}}\omega_e := \omega_e(TL_{g^{-1}}, \ldots, TL_{g^{-1}}) \in \Lambda^n(T^*_g G)$. G est ainsi orientable (et l'action de G sur lui même par multiplication à gauche préserve l'orientation).

4– L'hypothèse que $N(M)$ est trivialisable signifie qu'il existe des applications lisses $X_1, \ldots, X_k : M \to \mathbb{R}^n$ telles que pour tout $x \in M$, le k-uplet $(X_1(x), \ldots, X_k(x))$ forme une base de $T_x M^\perp$. Pour $x \in M$, on pose $\omega_x = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n(X_1(x), \ldots, X_k(x), ., \ldots, .) \in \Lambda^{\dim M} T^*_x M$. On obtient une forme volume sur M d'où son orientabilité.

5– Soit $(U, \varphi), (V, \psi)$ deux cartes d'une variété M telles que $U \cup V = M$ et $U \cap V$ est connexe. Soit $x_0 \in U \cap V$ un point pris dans l'intersection de U et V. Quitte à composer ψ avec une réflexion (de déterminant -1), on peut supposer que l'application de transition $\psi \circ \varphi^{-1}$ a son différentielle de déterminant positif au point $\varphi(x_0)$. Par connexité de $U \cap V$, ce déterminant est en fait positif en tout point de $\varphi(U \cap V)$. Les deux cartes $(U, \varphi), (V, \psi)$ fournissent ainsi un atlas orienté de M.

2. Forme volume sur une sous-variété orientée

1– Une sous-variété d'une variété orientable est-elle nécessairement orientable ?

2– Soit M une sous-variété orientée de dimension d de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume ω sur M telle que si $x \in M$ et $e_1, \dots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de M) de T_xM,

$$\omega_x(e_1, \dots, e_d) = 1.$$

3– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$ munie de l'orientation induite par $\mathbb{R}^n$ (via la normale sortante). Montrer que ω est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \,\mathrm{d}x_1 \wedge \dots \widehat{\mathrm{d}x_i} \dots \wedge \,\mathrm{d}x_n.$$

Solution :

1– NON, d'après le théorème de Withney, toute variété peut se voir comme une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ pourvu que $\mathbb{R}^n$ soit assez grand. Or $\mathbb{R}^n$ est orientable mais toute variété n'est pas orientable (voir exercice suivant).

2– *Unicité* : Deux d-formes volumes sur M sont nécessairement égales modulo multiplication par une fonction réelle C^∞ sur M. De plus, l'équation $\omega_x(e_1, \dots, e_d) = 1$ impose à cette fonction d'être égale à 1, d'où l'unicité.

Existence : Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un recouvrement de M par des cartes orientées, $(\chi_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité subordonnée. Fixons $i \in I$, notons $(U_i, \varphi_i) = (U, \varphi)$. Soit $X_1, \dots, X_d \in \Gamma(TU)$ une base de champs de vecteurs sur U (obtenue par exemple en tirant en arrière la base canonique sur $\varphi(U)$). Quitte à remplacer cette base par son orthonormalisé de Gram-Schmidt, on peut supposer qu'elle est orthonormale (pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$). Quitte à échanger X_1 et X_2, on peut supposer cette base directe pour l'orientation de M. On note $(X_i^*)_{i=1\dots d}$ la base duale. Alors pour toute base de champs de vecteurs orthonormée directe sur U, on a $X_1^* \wedge \dots \wedge X_d^*(Y_1, \dots Y_d) = 1$. On conclut en posant $\omega_i := \chi_i(X_1^* \wedge \dots \wedge X_n^*)$. puis $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$.

3– Définissons une forme volume sur $\mathbb{S}^{n-1}$ en posant

$$\omega_x = i_x dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Lambda^{n-1} T_x^* \mathbb{S}^{n-1}$$

On remarque que cette forme volume envoie toute base directe orthonormée sur 1. Donc elle convient. Le calcul explicite donne l'expression de l'énoncé (cf TD9 pour le calcul explicite de $i_v\omega$, en développant un déterminant par rapport à la première colonne).

3. Non orientabilité

1– Soit X une variété connexe munie d'une action libre et propre d'un groupe de Lie discret G. Montrer que si le quotient $G\backslash X$ est orientable, alors X est orientable et l'action de G préserve l'orientation sur X.

2– Montrer que $P^n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable si n est pair. Que dire si n est impair ?

3– Montrer que le ruban de Moebius n'est pas orientable.

4– Montrer que la bouteille de Klein n'est pas orientable.

Solution :

1– On considère la projection de $p : X \to G\backslash X$. C'est un difféomorphisme local. On tire en arrière via p un atlas orienté de $G\backslash X$. C'est un atlas orienté préservé par l'action de G. Comme de plus X est connexe, G préserve toute orientation de X (i.e. celle induite par $G\backslash X$ et "l'autre" en obtenu en la renversant).

2– Si $P^n(\mathbb{R})$ est orientable, alors il admet une forme volume ω. On la tire en arrière via la projection $p : \mathbb{S}^n \to P^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{S}^n/x \sim -x$ Cela définit une forme volume $\widetilde{\omega}$ sur $\mathbb{S}^n$ invariante par $x \mapsto -x$. Mais comme $\mathbb{S}^n$ est connexe, on sait que $\widetilde{\omega}$ est de la forme $\widetilde{\omega} = f\widetilde{\omega}_0$ où $\widetilde{\omega}_0$ est la forme définie dans la dernière question de l'exercice 1, et f est une fonction C^∞ soit strictement positive, soit strictement négative. Si n est pair, $\widetilde{\omega}_0$ est anti-invariante par antipodie, on a $\widetilde{\omega}$ qui ne peut être invariante par antipodie. Absurde.

Si n est impair, on a l'orientabiité en passant au quotient la forme volume $\widetilde{\omega}_0$ qui alors est bien invariante par antipodie.

3– Le Ruban de Moebius R est la variété quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$. Cette application renverse l'orientation de $\mathbb{R}^2$. En raisonnant comme en 2), on conclut que R n'est pas orientable.

4– La bouteille de Klein K est la variété quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (1/2 - x, y + 1)$. Cette application renverse l'orientation de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. En raisonnant comme en 2), on conclut que K n'est pas orientable.

4. Fibré des orientations

Soit X une variété connexe. On note E l'ensemble des couples (x, o) où $x \in X$ et o est une orientation de T_xX. On note $p : E \to X, (x, o) \mapsto x$ la projection sur le premier facteur.

1– Montrer que (E, p) admet une structure naturelle de fibration au dessus de X.

2– Montrer que E est toujours orientable.

3– Montrer que E admet une ou deux composantes connexes, selon l'orientabilité de X.

4– Soit M une variété orientable connexe munie d'une action libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons X la variété quotient. Montrer que si X est non orientable, alors son fibré des orientations E est difféomorphe à M.

5– Montrer que les fibrés des orientations du plan projectif réel et de la bouteille de Klein s'identifient respectivement à $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}^2$.

6– Conclure que le plan projectif et la bouteille de Klein ne sont pas difféomorphes.

Solution :

1– Il s'agit de munir E d'un structure de variété qui fasse de p une submersion surjective (i.e. un difféomorphisme local dans notre cas). Soit (U, φ) une carte de la variété X. On définit une carte de E de la façon suivante. On pose U' l'ensemble des couples $(x, o) \in E$ tels que $x \in U$, et $T_x\varphi : T_xX \to T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^n$ envoie l'orientation o sur l'orientation standard de $\mathbb{R}^n$. On pose $\varphi' : U' \to \mathbb{R}^n, (x, o) \mapsto x$ (qui est injective).

Vérifions que les cartes (U', φ') définissent bien une structure de variété sur E. Soit donc (U', φ'), (V', ψ') des cartes de E induitent par des cartes (U, φ), (V, ψ) de X, et telles que $U' \cap V' \neq \emptyset$. On veut montrer que $\varphi'(U' \cap V')$ et $\psi'(U' \cap V')$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^n$ et que $\psi' \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U' \cap V') \to \psi'(U' \cap V')$ est C^∞. On remarque que $\varphi'(U' \cap V')$ s'écrit aussi $\varphi(W)$ où $W \subseteq U \cap V$ est l'ensemble des points de $U \cap V$ pour lesquels les orientations données par φ et par ψ coïncident. Une autre façon de formuler est que $\varphi'(U' \cap V')$ est l'ensemble des points de $\varphi(U \cap V)$ en lesquels l'application de transition $\psi \circ \varphi^{-1}$ est de Jacobien positif. C'est donc un sous-ensemble de composante connexes de $\varphi(U \cap V)$, et en particulier ouvert de $\mathbb{R}^n$. On fait de même pour $\psi'(U' \cap V')$. L'application de transition entre $\varphi'(U' \cap V')$ et $\psi'(U' \cap V')$ étant une restriction de $\psi \circ \varphi^{-1}$ elle est bien C^∞, ce qui conclut.

2– L'atlas construit dans la question précédente est justement orienté (cela figure dans la preuve).

3– Supposons que X admette deux composantes connexes X_-, X_+. Alors $p_{|X_-} : X_- \to X$ est un difféomorphisme (en effet, le nombre d'antécédents dans X_- par p est constant, et vaut soit 0, soit 1, soit 2. Ce ne peut être 0 car X_- est non vide, ce ne peut être 2 car X_+ est non vide. C'est donc 1). Comme X est orientable, on a X_- orientable, puis X aussi.

Supposons que X soit orientable. Soit $\mathcal{A}_1$ un atlas orienté sur X et notons $\Omega_2 \subseteq E$ la réunion des domaines de cartes (U', φ') construites sur E à partir de $\mathcal{A}_1$ (comme dans la question 1). On construit de même Ω_2 à partir de l'atlas orienté $\mathcal{A}_2$ conférant à X l'orientation opposée. Alors $X = \Omega_1 \amalg \Omega_2$ et les Ω_i sont ouverts (non vides) dans E. Il en découle que X a au moins deux composantes connexes. C'est exactement deux, car la restriction de p à une composante connexe de E est nécessairement surjective et les fibres de p sont toutes de cardinal 2. Ces composantes sont Ω_1 et Ω_2.

4– Munissons M d'une orientation, notée $(o_z)_{z\in M}$. Notons $\pi : M \to X$ l'application quotient. On définit une application $\varphi : M \to E$ en posant $\varphi(z) = (\pi(z), (T_z\pi)_\star o_z)$. On va montrer que φ est un difféomorphisme. Remarquons que φ est un morphisme de révêtements, i.e. $p \circ \varphi = \pi$. Il envoie ainsi π-fibre (de cardinal 2) au dessus d'un point x vers la p-fibre (de cardinal 2) au dessus de x. Nous montrons que φ est bijective, fibre à fibre. En considérant des cartes de M (qui donnent aussi des cartes de X), on voit que φ est d'image ouverte dans E. Pour $x \in X$, écrivons $p^{-1}(x) = \{z, z'\}$ et posons $m(x) = 0$ si $\varphi(z) = \varphi(z')$ et 1 sinon. La fonction m est localement constante sur X, donc constante par connexité. Si elle vaut 0, alors $\varphi(M)$ contient exactement un point de chaque fibre de p. L'involution échangeant les points d'une même fibre envoie donc $\varphi(M)$ sur son complémentaire, qui doit aussi être ouvert. Ainsi, E a alors deux composantes connexes, contredisant la non orientabilité de X (question précédente). Il en découle que m est constante égale à 1, puis que φ est bijective fibre à fibre, ce qui conclut.

5– Cela découle de la question précédente, car le plan projectif réel est le quotient de $\mathbb{S}^2$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par antipodie, et la bouteille de Klein comme qutoient de $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où 1 agit via $(x, y) \mapsto (1/2 - x, y + 1/2)$ (on démontre ce dernier fait en se rappelant comment on obtient la bouteille de Klein et le tore à partir d'un carré en recollant les bords d'une certain façon).

6– S'ils étaient difféomorphes, leurs fibrés des orientations le seraient aussi, ce qui n'est pas le cas.

5. Mesure de Haar

Soit G un groupe de Lie.

1– Montrer que G admet une mesure de Radon G-invariante à gauche, i.e. préservée par les applications de translation $(L_{g_0} : G \to G, g \mapsto g_0 g)_{g_0\in G}$.

On admet qu'une telle mesure est unique à scalaire près, on l'appelle la mesure de Haar.

2– Expliciter la mesure de Haar des groupes $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$.

3– Montrer que la mesure de Haar de $SL_n(\mathbb{R})$ est définie par la formule

$$\mathrm{Haar}(E) = \mathrm{leb}\Big(\bigcup_{0<t<1} tE\Big)$$

.

Solution :

1– On se donne une forme volume ω sur G qui est invariante à gauche (cf. question 3 de l'exercice 1). Elle induit alors une mesure de Radon sur le groupe de Lie G, elle même invariante à gauche.

2– Il s'agit de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ et de celle induite sur $\mathbb{T}^d$ via la projection (difféo local) $\mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d, x \mapsto [x]$.

3– Remarquons que pour $E \subseteq SL_n(\mathbb{R})$ mesurable, l'ensemble $\bigcup_{0<t<1} tE$ est également mesurable. On peut en effet l'exprimer comme image réciproque de E par l'application de projection $GL_n^+(\mathbb{R}) \to SL_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto \frac{1}{(\det A)^{1/n}} A$ intersectée avec l'ouvert des matrices de déterminant dans $]0,1[$. La formule énoncée définit donc bien une mesure, que l'on appelle m. Vérifions qu'elle est $SL_n(\mathbb{R})$ invariante. Soit $g \in SL_n(\mathbb{R})$.

$$\mathrm{leb}(\bigcup_{0<t<1} tgE) = \mathrm{leb}(g \bigcup_{0<t<1} tE)$$

On peut écrire $\mathrm{leb} = \otimes^n \mathrm{leb}_{\mathbb{R}^n}$ où les $\mathbb{R}^n$ correspondent aux colonnes des matrices de $M_n(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que $g_\star \mathrm{leb} = \mathrm{leb}$. Or $g_\star \mathrm{leb} = \otimes^n g_\star \mathrm{leb}_{\mathbb{R}^n} = \otimes^n \mathrm{leb}_{\mathbb{R}^n}$ car l'action de g sur les colonnes correspond à son action sur $\mathbb{R}^n$, qui elle préserve la mesure de Lebesgue. D'où le résultat.

6. Volume d'un quotient

Soit X une variété compacte de dimension n et G un groupe fini agissant sur M librement par C^∞-difféomorphismes. On note $p : X \to G\backslash X$ l'application quotient. Supposons que la variété quotient $G\backslash X$ est orientée. Il a été vu dans l'exercice précédent que X admet alors une orientation naturelle, de sorte que p respecte l'orientation.

Soit ω une n-forme différentielle sur $G\backslash X$. Montrer que :

$$\int_X p^*\omega = |G| \int_{G\backslash X} \omega.$$

On pourra commencer par traiter le cas où ω a son support inclus dans un ouvert suffisamment petit de $G\backslash X$.

Solution :

Soit $y \in X/G$, et $p^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_{|G|}\}$. Comme p est un difféomorphisme local, si U_y est un voisinage suffisament petit de y, $p^{-1}(U_y)$ est réunion disjointe de $|G|$ ouverts $U_y^1, \dots, U_y^{|G|}$ difféomorphes par p à U_y et voisinages respectifs de $x_1, \dots, x_{|G|}$.

Les U_y forment un recouvrement ouvert de X/G. Par compacité, on extrait un recouvrement fini $U_1, \dots, U_r$ (et on note $p^{-1}(U_j) = U_j^1 \cup \dots \cup U_j^{|G|}$). On choisit une partition de l'unité χ_j adaptée au recouvrement ouvert U_j. On écrit alors :

$$\int_X p^*\omega = \sum_j \int_X p^*(\chi_j \omega) = \sum_j \sum_{i=1}^{|G|} \int_{U_j^i} p^*(\chi_j \omega).$$

Comme p induit un difféomorphisme $U_j^i \to U_j$, il vient :

$$\int_X p^*\omega = \sum_j |G| \int_{U_j} \chi_j \omega = |G| \sum_j \int_{X/G} \chi_j \omega = |G| \int_{X/G} \omega.$$

2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Utiliser une forme volume.

1.2 : Soit M une variété. Considérer l'atlas de TM induit par les cartes de la variété M et montrer qu'il est orienté.

1.3 : Construire une forme volume invariante à gauche.

1.4 : Utiliser la n-forme standard $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sur $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'une base de sections globale du fibré normal $X_1, \ldots, X_{n-k} : M \to N(M)$.

Exercice 2 :

2.1 : Se rappeler le théorème de Withney.

2.2 : En utilisant une partition de l'unité, on peut se permettre de raisonner localement. Considérer alors une base orthonormée directe locale (construite à l'aide du procédé de Gram-Schmidt).

2.3 : Vérifier que la forme définie par

$$\omega_x = i_x dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Lambda^{n-1} T_x^* \mathbb{S}^{n-1}$$

convient et coïncide avec celle donnée dans l'enoncé.

Exercice 3 :

3.1 : Tirer en arrière un atlas orienté sur $G \backslash X$ via p (localement).

3.2 : La forme volume standard sur $\mathbb{S}^n$ définie à la fin de l'exercice 1 et soit invariante, soit anti-invariante par antipodie, suivant la parité de n.

3.3 : Le Ruban de Moebius R peut être vu comme la variété quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$

3.4 : La bouteille de Klein K peut être vu comme la variété quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (1/2 - x, y + 1)$.

Exercice 4 :

4.1 : Soit $(x, o) \in E$. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de 0 et $\psi : V \to X$ une paramétrisation locale de X au voisinage de x telle que $\psi(0) = x$ et $(T_0\psi)^\star o$ est l'orientation standard $o_{\mathbb{R}_n}$ de $\mathbb{R}^n$. On définit alors une paramétrisation locale de E en (x, o) via $\varphi : V \to E, z \mapsto (\psi(z), (T_z\psi)_\star o_{\mathbb{R}_n})$.

4.2 : Considérer l'atlas défini dans la question précédente.

4.3 : Si E a deux composantes connexes, utiliser la question précédente pour montrer que X est orientable. Réciproquement, si X est orientable, fixer une orientation sur X et montrer que la partie correspondante de E est ouverte et fermée.

4.4 : Munir M d'une orientation, notée $o = (o_z)_{z \in M}$, et considérer l'application

$$\varphi : M \to E, z \mapsto (\pi(z), T_z\pi_\star o_z)$$

Commencer par montrer que $\varphi(M)$ est un ouvert de E, que $p_{|\varphi(M)}$ a ses fibres au dessus de X de cardinal constant, puis que ces dernières sont nécessairement de cardinal 2.

4.5 : Exprimer le plan projectif et la bouteille de Klein comme des quotients de $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}^2$ par une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 :

5.1 : Considérer une forme volume G-invariante à gauche.

5.3 : $SL_n(\mathbb{R})$ préserve la mesure de Lebesgue.

Exercice 6 :

Etablir le résultat si ω a son support dans un ouvert suffisament petit de $G\backslash X$. Ensuite, étendre au cas général en utilisant une partition de l'unité.