**Géométrie Différentielle, TD 9 avril 2020**

# 1. Exercices

## 1. Questions diverses

1– Montrer qu'une variété connexe admet au plus deux orientations.

2– Montrer que le fibré tangent d'une variété est orientable.

3– Montrer qu'un groupe de Lie est orientable.

4– Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ dont le fibré normal est trivialisable. Montrer que $M$ est orientable.

5– Montrer que toute variété $C^\infty$ admettant un atlas de cartes formé d'une ou deux cartes de domaines connexes et à intersections connexes est orientable.

## 2. Forme volume sur une sous-variété orientée

1– Une sous-variété d'une variété orientable est-elle nécessairement orientable ?

2– Soit $M$ une sous-variété orientée de dimension $d$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une unique forme volume $\omega$ sur $M$ telle que si $x \in M$ et $e_1, \ldots, e_d$ est une base orthonormale (pour la structure euclidienne induite par celle de $\mathbb{R}^n$) directe (au sens de l'orientation de $M$) de $T_xM$,

$$\omega_x(e_1, \ldots, e_d) = 1.$$

3– On prend $M = \mathbb{S}^{n-1}$ munie de l'orientation induite par $\mathbb{R}^n$ (via la normale sortante). Montrer que $\omega$ est la restriction à $\mathbb{S}^{n-1}$ de

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \widehat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

## 3. Non orientabilité

1– Soit $X$ une variété connexe munie d'une action libre et propre d'un groupe de Lie discret $G$. Montrer que si le quotient $G\backslash X$ est orientable, alors $X$ est orientable et l'action de $G$ préserve l'orientation sur $X$.

2– Montrer que $P^n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable si $n$ est pair. Que dire si $n$ est impair ?

3– Montrer que le ruban de Moebius n'est pas orientable.

4– Montrer que la bouteille de Klein n'est pas orientable.

## 4. Fibré des orientations

Soit $X$ une variété connexe. On note $E$ l'ensemble des couples $(x, o)$ où $x \in X$ et $o$ est une orientation de $T_xX$. On note $p : E \to X, (x, o) \mapsto x$ la projection sur le premier facteur.

1– Montrer que $(E, p)$ admet une structure naturelle de fibration au dessus de $X$.

2– Montrer que $E$ est toujours orientable.

3– Montrer que $E$ admet une ou deux composantes connexes, selon l'orientabilité de $X$.

4– Soit $M$ une variété orientable connexe munie d'une action libre de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Notons $X$ la variété quotient. Montrer que si $X$ est non orientable, alors son fibré des orientations $E$ est difféomorphe à $M$.

5– Montrer que les fibrés des orientations du plan projectif réel et de la bouteille de Klein s'identifient respectivement à $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}^2$.

6– Conclure que le plan projectif et la bouteille de Klein ne sont pas difféomorphes.

## 5. Mesure de Haar

Soit $G$ un groupe de Lie.

1– Montrer que $G$ admet une mesure de Radon $G$-invariante à gauche, i.e. préservée par les applications de translation $(L_{g_0} : G \to G, g \mapsto g_0 g)_{g_0 \in G}$.

On admet qu'une telle mesure est unique à scalaire près, on l'appelle la mesure de Haar.

2– Expliciter la mesure de Haar des groupes $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{T}^d$.

3– Montrer que la mesure de Haar de $SL_n(\mathbb{R})$ est définie par la formule

$$\mathrm{Haar}(E) = \mathrm{leb}\Big(\bigcup_{0<t<1} tE\Big)$$

.

## 6. Volume d'un quotient

Soit $X$ une variété compacte de dimension $n$ et $G$ un groupe fini agissant sur $M$ librement par $C^\infty$-difféomorphismes. On note $p : X \to G\backslash X$ l'application quotient. Supposons que la variété quotient $G\backslash X$ est orientée. Il a été vu dans l'exercice précédent que $X$ admet alors une orientation naturelle, de sorte que $p$ respecte l'orientation.

Soit $\omega$ une $n$-forme différentielle sur $G\backslash X$. Montrer que :

$$\int_X p^*\omega = |G| \int_{G\backslash X} \omega.$$

On pourra commencer par traiter le cas où $\omega$ a son support inclus dans un ouvert suffisamment petit de $G\backslash X$.

## 2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Utiliser une forme volume.

1.2 : Soit $M$ une variété. Considérer l'atlas de $TM$ induit par les cartes de la variété $M$ et montrer qu'il est orienté.

1.3 : Construire une forme volume invariante à gauche.

1.4 : Utiliser la $n$-forme standard $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sur $\mathbb{R}^n$ ainsi qu'une base de sections globale du fibré normal $X_1, \ldots, X_{n-k} : M \to N(M)$.

Exercice 2 :

2.1 : Se rappeler le théorème de Withney.

2.2 : En utilisant une partition de l'unité, on peut se permettre de raisonner localement. Considérer alors une base orthonormée directe locale (construite à l'aide du procédé de Gram-Schmidt).

2.3 : Vérifier que la forme définie par

$$\omega_x = i_x dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Lambda^{n-1} T_x^* \mathbb{S}^{n-1}$$

convient et coïncide avec celle donnée dans l'enoncé.

Exercice 3 :

3.1 : Tirer en arrière un atlas orienté sur $G \backslash X$ via $p$ (localement).

3.2 : La forme volume standard sur $\mathbb{S}^n$ définie à la fin de l'exercice 1 et soit invariante, soit anti-invariante par antipodie, suivant la parité de $n$.

3.3 : Le Ruban de Moebius $R$ peut être vu comme la variété quotient de $\mathbb{R}^2$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (x + 1, -y)$

3.4 : La bouteille de Klein $K$ peut être vu comme la variété quotient de $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ par le groupe de transformations engendré par $f : (x, y) \mapsto (1/2 - x, y + 1)$.

Exercice 4 :

4.1 : Soit $(x, o) \in E$. Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de 0 et $\psi : V \to X$ une paramétrisation locale de $X$ au voisinage de $x$ telle que $\psi(0) = x$ et $(T_0\psi)^\star o$ est l'orientation standard $o_{\mathbb{R}_n}$ de $\mathbb{R}^n$. On définit alors une paramétrisation locale de $E$ en $(x, o)$ via $\varphi : V \to E, z \mapsto (\psi(z), (T_z\psi)_\star o_{\mathbb{R}_n})$.

4.2 : Considérer l'atlas défini dans la question précédente.

4.3 : Si $E$ a deux composantes connexes, utiliser la question précédente pour montrer que $X$ est orientable. Réciproquement, si $X$ est orientable, fixer une orientation sur $X$ et montrer que la partie correspondante de $E$ est ouverte et fermée.

4.4 : Munir $M$ d'une orientation, notée $o = (o_z)_{z \in M}$, et considérer l'application

$$\varphi : M \to E, z \mapsto (\pi(z), T_z\pi_\star o_z)$$

Commencer par montrer que $\varphi(M)$ est un ouvert de $E$, que $p_{|\varphi(M)}$ a ses fibres au dessus de $X$ de cardinal constant, puis que ces dernières sont nécessairement de cardinal 2.

4.5 : Exprimer le plan projectif et la bouteille de Klein comme des quotients de $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{T}^2$ par une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 5 :

5.1 : Considérer une forme volume $G$-invariante à gauche.

5.3 : $SL_n(\mathbb{R})$ préserve la mesure de Lebesgue.

Exercice 6 :

Etablir le résultat si $\omega$ a son support dans un ouvert suffisament petit de $G\backslash X$. Ensuite, étendre au cas général en utilisant une partition de l'unité.