Géométrie Différentielle, TD 11 du 23 Avril 2020

1. Exercices

Formule de Stokes

1. Intégration et dérivée de Lie - A FAIRE AVANT LE TD

Soit M une variété compacte orientée de dimension n, ω une forme différentielle de degré n sur M et X un champ de vecteurs sur M. Montrer que

$$\int_M \mathcal{L}_X \omega = 0.$$

Solution :

D'après la formule de Cartan, $\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_X d\omega = d(i_X\omega)$ car ω est de degré maximal. La formule de Stokes nous dit alors que

$$\int_M \mathcal{L}_X\omega = \int_M d(i_X\omega) = 0.$$

2. Comparaison bord / volume

Soit $vol = dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface compacte. L'intérieur de S est un domaine $N \subseteq \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial N = S$. Pour $p \in S$, on note $v(p)$ la normale sortante en p à S. Soit la 2-forme d'aire $\sigma \in \Omega^2(S)$ définie par $\sigma(X,Y) = vol(v(p), X, Y)$ si X, $Y \in T_pS$. L'aire de S est $\int_S \sigma$.

1– Soit $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.

2– Montrer que si (V_1, V_2) est une base orthonormée directe de T_pS, alors

$$\alpha(V_1, V_2) \leqslant ||p||\sigma(V_1, V_2)$$

3– En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R, alors

$$\text{volume}(N) \leqslant \frac{R}{3}\text{aire}(\partial N)$$

Solution :

1– $d\alpha = dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy = 3dx \wedge dy \wedge dz$

2– On a $\sigma(V_1, V_2) = 1$. Par ailleurs, on voit par un calcul direct que $\alpha(V_1, V_2) = \langle p, V_1 \times V_2 \rangle$ où $\times$ désigne le produit vectoriel. Comme $||V_1 \times V_2|| = 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne le résultat.

3– $Aire(\partial N) = \int_{\partial N} \sigma \geqslant \int_{\partial N} \frac{1}{R}\alpha \geqslant \frac{3}{R} Vol(N)$ par la formule de Stokes.

3. Somme de normales

Soit M une sous variété à bord fermée et de dimension 2 de la sphère $\mathbb{S}^2$.

1– Montrer que le bord de M en tant que variété à bord coïncide avec son bord topologique dans $\mathbb{S}^2$. On le notera sans ambiguïté ∂M.

2– Vérifier que si M est sans bord, alors $M = \mathbb{S}^2$.

3– Supposons $\partial M \neq \emptyset$. Montrer que ∂M est difféomorphe à une réunion finie de cerles.

4– On munit M et ∂M des formes volumes canoniques da et ds d'aire et de longueur. Ces formes sont définies de la façon suivante. Pour $x \in M$, $y \in \partial M$ on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant de la sphère au point x, et $n(y)$ le vecteur tangent à la sphère en y et normal unitaire sortant de ∂M. On pose ensuite

$$da_x(v_1, v_2) = \det(v_1, v_2, N(x)) \quad \text{et} \quad ds_y(v) = \det(v, N(y), n(y))$$

où le déterminant est pris par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x) ds + 2 \iint_M N(x) da = 0.$$

Solution :

1– La sous variété à bord M étant fermée dans $\mathbb{S}^2$, il s'agit de montrer que l'intérieur U de M comme variété à bord coïncide avec son intérieur V comme partie de $\mathbb{S}^2$. Comme U est une sous-variété sans bord de dimension 2 de la sphère, c'est un ouvert de la sphère, donc $U \subseteq V$. Réciproquement, on voit dans une carte de sous-variété à bord qu'un point dans V est nécessairement dans U. D'où l'égalité $U = V$ recherchée.

2– Un ouvert fermé non vide de la sphère est la sphère tout entière, par connexité.

3– ∂M est union disjointe de ses composantes connexes qui sont des sous-variétés compactes de dimension 1, donc difféomorphes à des cercles. L'union est de plus finie par compacité de ∂M.

4– On va considérer des formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Les formules usuelles restent valables en raisonnant coordonnées par coordonnées dans $\mathbb{R}^3$.

Introduisons la 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\omega_x(v) = -x \times v$, où $\times$ désigne le produit vectoriel. En particulier, on vérifie que $\omega|_{\partial M} = n(x)ds$.

Introduisons la 2-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^3$ donnée par $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. En particulier, on vérifie que $\alpha|_M = N(x)da$.

On calcule de plus que $\mathrm{d}\omega = -2\alpha$. Par exemple, la première coordonnée de ω est donnée par $x_3dx_2 - x_2dx_3$, de sorte que la première coordonnée de $\mathrm{d}\omega$ est donnée par $-2dx_2 \wedge dx_3$. Mais la première coordonnée de α est bien $dx_2 \wedge dx_3$.
On applique alors le théorème de Stokes : $\int_{\partial M} n(x)ds = \int_{\partial M} \omega = \iint_M \mathrm{d}\omega = -2\iint_M \alpha = -2\iint_M N(x)da$

Cohomologie de De Rham

4. Premier pas

1– Soit M une variété. Montrer que la cohomologie de De Rham de M est la somme directe des cohomologie de De Rham de ses composantes connexes.

2– Soit M et N des variétés avec N constractile. Montrez que M et $M \times N$ ont même cohomologie de De Rham.

3– Soit M et N des variétés connexes et $f : M \to N$ une application lisse. Montrer que $f^* : H^0(N) = \mathbb{R} \to H^0(M) = \mathbb{R}$ est l'identité.

4– Soit M et N des variétés et $f : M \to N$ une application constante. Montrer que $f^* : H^p(N) \to H^p(M)$ est nulle si $p \neq 0$.

Solution :

1– L'application $\omega \mapsto (\omega_{|M_i})_{i\in I}$ est un isomorphisme entre $\Omega(M)$ et $\oplus\Omega_{M_i}$, qui commute aux différentielles et au produit extérieur. Le résultat s'en déduit par passage au quotient.

2– Comme N est contractile, étant donné $x \in N$, les applications Id_N et $c_x : N \to N, y \mapsto x$ sont homotopes. On en déduit que les applications $Id_{M\times N}$ et $c'_x : M \times N \to M \times N, (p, y) \mapsto (p, x)$ sont homotopes, et donc que les variétés $M \times N$ et $M \times \{x\}$ sont homotopiquement équivalentes. Comme $M \times \{x\}$ est difféomorphe à M, le résultat s'en déduit.

3– Tirer en arrière une application constante égale à c donne une application constante égale à c.

4– La différentielle d'une application constante est nulle. Or tirer en arrière une p-forme par une application f revient justement à précomposer cette p-forme par l'application tangente de f (si $p \neq 0$).

5. Invariance par homéomorphisme

1– Montrer que deux variétés différentielles compactes homéomorphes ont même cohomologie de De Rham.

Solution :

Soit M, N deux variétés différentielles compactes, $h : M \to N$ un homéomorphisme. On se donne des distances d_M, d_N sur M et N induisant leurs topologies. Soit $\varepsilon > 0$, $h_1 : M \to N$ une application C^∞ telle que pour tout $x \in M$, on a $d(h_1(x), h(x)) < \varepsilon$. De même soit $h_2 : N \to M$ une application C^∞ ε-proche de h^{-1}. On a $d(x, h_2 \circ h_1(x)) = d(h^{-1} \circ h(x), h_2 \circ h_1(x)) \leqslant d(h(x), h_1(x)) + \eta \leqslant \varepsilon + \eta$ où $\eta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit (pourvu que ε soit assez petit), et est défini par uniforme continuité de h^{-1}. On a donc construit une application C^∞ $h_2 \circ h_1$ arbitrairement proche de Id_M, donc homotope à Id_M si ε assez petit. De même pour $h_1 \circ h_2$ et Id_N. Finalement, h_1 et h_2 fournissent une équivalence d'homotopie C^∞ entre M et N puis des isomorphismes entre les cohomologies de De Rham.

6. Avec des groupes de Lie

1– Soit G un groupe de Lie connexe. L'action de G sur lui même par multiplication à gauche ou à droite préserve t'elle l'orientation ?

2– Soit G un groupe de Lie connexe agissant sur une variété M. Montrer que l'action induite sur la cohomologie de De Rham est triviale.

3– Soit G un groupe fini agissant librement sur une variété M. Notons $N = G \backslash M$ la variété quotient et $\pi : M \to N$ la projection canonique. Montrer que l'application $\pi^* : H(N) \to H(M)$ est injective.

Solution :

1– Ses actions sont homotopes à l'identité via un chemin de difféomorphismes et préservent donc l'orientation. Une autre façon de le montrer et de construire une forme volume invariante à gauche ou à droite en prolongeant de façon G-invariante (à gauche ou à droite selon les cas) une n-forme multilinéaire alternée non nulle sur T_eG (de dimension notée n).

2– G étant connexe (par arcs) l'action d'un élément d'un élément g sur M est un difféomorphisme de M homotope à l'identité (action de l'élément neutre). D'où la trivialité du tiré en arrière sur la cohomologie de De Rham.

3– L'application π^* étant linéaire, il suffit de montrer que son noyau est réduit à 0, autrement que si $\alpha \in \Omega^p(N)$ a son tiré en arrière de la forme $\pi^*\alpha = d\beta$ pour une certaine (p-1)-forme $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$, alors α est elle même une forme exacte sur N. A priori β n'est pas G-invariante donc ne passe pas au quotient. Considérons donc

$$\beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \beta$$

On a $d\beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* d\beta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \pi^* \alpha = \pi^* \alpha$ car $\pi^* \alpha$ est G-invariante (en effet, $g^* \pi^* \alpha = (\pi \circ g)^* \alpha = \pi^* \alpha$). De plus, par définition, β' est G-invariante. Comme le groupe G est discret, cela permet d'écrire β' sous la forme $\beta' = \pi^* \beta''$, où β'' est une $(p-1)$-forme sur N (ce n'est pas vrai en général si G n'est pas discret, voir TD8 exercice 3). Comme l'application $\pi^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ est injective et commute à la différentielle, on peut conclure que $d\beta'' = \alpha$.

2. Indications

Exercice 1 : Formule de Cartan et théorème de Stokes.

Exercice 2 :

2.2 : $\alpha(V_1, V_2) = \langle p, V_1 \times V_2 \rangle$ où $\times$ désigne le produit vectoriel.

2.3 : Formule de Stokes.

Exercice 3 :

3.1 : Raisonner par double inclusion, à l'aide des cartes de sous-variété à bord de M. 3.3 : une variété compacte de dimension 1 est difféomorphe au cercle.

3.4 : L'idée est d'utiliser la formule de Stokes, mais pour des formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Comme tout se passe coordonnées par coordonnées, les formules usuelles restent valables. Notons $\times$ l'opération produit vectoriel.

On définit une 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ en posant $\omega_x(v) = -x \times v$ et une 2-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^3$ en posant $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. Vérifiez que $\omega|_{\partial M} = n(x)ds$ et $\alpha|_M = N(x)da$. Conclure en appliquant la formule de Stokes.

Exercice 4 :

4.2 : $M \times N$ a même cohomologie que $M \times \{x\}$ où x est un point quelconque de N.

Exercice 5 :

Se donner un homéomorphisme $h : M \to N$ et approximer h et h^{-1} par des applications lisse h_1, h_2. Montrer que si l'approximation est assez bonne, alors $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont arbitrairement proches de Id_N et Id_M, et donc leurs sont homotopes.

Exercice 6 :

6.1 : Le groupe G étant connexe, l'action d'un élément de G est homotope à l'identité.

6.2 : Même indication que 6.1

6.3 : Il faut montrer que si $\alpha \in \Omega^p(N)$ a son tiré en arrière de la forme $\pi^*\alpha = d\beta$ pour une certaine (p-1)-forme $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$, alors α est une forme exacte. Considérer

$$\beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^*\beta$$