Géométrie Différentielle, TD 11 du 23 Avril 2020

1. Exercices

Formule de Stokes

1. Intégration et dérivée de Lie - A FAIRE AVANT LE TD

Soit M une variété compacte orientée de dimension n, ω une forme différentielle de degré n sur M et X un champ de vecteurs sur M. Montrer que

$$\int_M \mathcal{L}_X \omega = 0.$$

2. Comparaison bord / volume

Soit $vol = dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface compacte. L'intérieur de S est un domaine $N \subseteq \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial N = S$. Pour $p \in S$, on note $v(p)$ la normale sortante en p à S. Soit la 2-forme d'aire $\sigma \in \Omega^2(S)$ définie par $\sigma(X,Y) = vol(v(p), X, Y)$ si X, $Y \in T_pS$. L'aire de S est $\int_S \sigma$.

1– Soit $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.

2– Montrer que si (V_1, V_2) est une base orthonormée directe de T_pS, alors

$$\alpha(V_1, V_2) \leqslant ||p||\sigma(V_1, V_2)$$

3– En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R, alors

$$\text{volume}(N) \leqslant \frac{R}{3}\text{aire}(\partial N)$$

3. Somme de normales

Soit M une sous variété à bord fermée et de dimension 2 de la sphère $\mathbb{S}^2$.

1– Montrer que le bord de M en tant que variété à bord coïncide avec son bord topologique dans $\mathbb{S}^2$. On le notera sans ambiguïté ∂M.

2– Vérifier que si M est sans bord, alors $M = \mathbb{S}^2$.

3– Supposons $\partial M \neq \emptyset$. Montrer que ∂M est difféomorphe à une réunion finie de cerles.

4– On munit M et ∂M des formes volumes canoniques da et ds d'aire et de longueur. Ces formes sont définies de la façon suivante. Pour $x \in M$, $y \in \partial M$ on note $N(x)$ le vecteur normal unitaire sortant de la sphère au point x, et $n(y)$ le vecteur tangent à la sphère en y et normal unitaire sortant de ∂M. On pose ensuite

$$da_x(v_1, v_2) = \det(v_1, v_2, N(x)) \quad \text{et} \quad ds_y(v) = \det(v, N(y), n(y))$$

où le déterminant est pris par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$\int_{\partial M} n(x) ds + 2 \iint_M N(x) da = 0.$$

Cohomologie de De Rham

4. Premier pas

1– Soit M une variété. Montrer que la cohomologie de De Rham de M est la somme directe des cohomologie de De Rham de ses composantes connexes.

2– Soit M et N des variétés avec N constractile. Montrez que M et $M \times N$ ont même cohomologie de De Rham.

3– Soit M et N des variétés connexes et $f : M \to N$ une application lisse. Montrer que $f^* : H^0(N) = \mathbb{R} \to H^0(M) = \mathbb{R}$ est l'identité.

4– Soit M et N des variétés et $f : M \to N$ une application constante. Montrer que $f^* : H^p(N) \to H^p(M)$ est nulle si $p \neq 0$.

5. Invariance par homéomorphisme

1– Montrer que deux variétés différentielles compactes homéomorphes ont même cohomologie de De Rham.

6. Avec des groupes de Lie

1– Soit G un groupe de Lie connexe. L'action de G sur lui même par multiplication à gauche ou à droite préserve t'elle l'orientation ?

2– Soit G un groupe de Lie connexe agissant sur une variété M. Montrer que l'action induite sur la cohomologie de De Rham est triviale.

3– Soit G un groupe fini agissant librement sur une variété M. Notons $N = G \backslash M$ la variété quotient et $\pi : M \to N$ la projection canonique. Montrer que l'application $\pi^* : H(N) \to H(M)$ est injective.

2. Indications

Exercice 1 : Formule de Cartan et théorème de Stokes.

Exercice 2 :

2.2 : $\alpha(V_1, V_2) = \langle p, V_1 \times V_2 \rangle$ où $\times$ désigne le produit vectoriel.

2.3 : Formule de Stokes.

Exercice 3 :

3.1 : Raisonner par double inclusion, à l'aide des cartes de sous-variété à bord de M. 3.3 : une variété compacte de dimension 1 est difféomorphe au cercle.

3.4 : L'idée est d'utiliser la formule de Stokes, mais pour des formes différentielles à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Comme tout se passe coordonnées par coordonnées, les formules usuelles restent valables. Notons $\times$ l'opération produit vectoriel.

On définit une 1-forme différentielle ω sur $\mathbb{R}^3$ en posant $\omega_x(v) = -x \times v$ et une 2-forme différentielle α sur $\mathbb{R}^3$ en posant $\alpha_x(v_1, v_2) = v_1 \times v_2$. Vérifiez que $\omega|_{\partial M} = n(x)ds$ et $\alpha|_M = N(x)da$. Conclure en appliquant la formule de Stokes.

Exercice 4 :

4.2 : $M \times N$ a même cohomologie que $M \times \{x\}$ où x est un point quelconque de N.

Exercice 5 :

Se donner un homéomorphisme $h : M \to N$ et approximer h et h^{-1} par des applications lisse h_1, h_2. Montrer que si l'approximation est assez bonne, alors $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ sont arbitrairement proches de Id_N et Id_M, et donc leurs sont homotopes.

Exercice 6 :

6.1 : Le groupe G étant connexe, l'action d'un élément de G est homotope à l'identité.

6.2 : Même indication que 6.1

6.3 : Il faut montrer que si $\alpha \in \Omega^p(N)$ a son tiré en arrière de la forme $\pi^*\alpha = d\beta$ pour une certaine (p-1)-forme $\beta \in \Omega^{p-1}(M)$, alors α est une forme exacte. Considérer

$$\beta' = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^* \beta$$