# Géométrie Différentielle, TD 12 du 30 mai 2020

## 1. Exercices

NB : Pour des raisons de clareté, le TD est divisé en deux parties, la première dédiée au calcul de cohomologie à l'aide des suites de Mayer-Vietoris, la seconde dédiée à la cohomologie des formes invariantes. Cependant, il est sans doute plus judicieux de ne pas traiter les exercices de façon linéaire. On conseille l'ordre suivant : 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7.

### Suite de Mayer-Vietoris

#### 1. Invariance du domaine

1– Soit $n \geqslant 1$, soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $x \in U$. Montrer que le $(n-1)$-ième groupe de cohomologie de De Rham de $U \setminus \{x\}$ est non trivial, autrement dit
$$H^{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq \{0\}$$

2– Soit $n, p \geqslant 1$ avec $n > p$. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

**Solution :**

1– Le résultat est clair si $n = 1$. On peut donc supposer $n \geqslant 2$. Soit $V = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. On a $U \cap V = U \setminus \{x\}$ et $U \cup V = \mathbb{R}^n$. Considérons la suite de Mayer-Vietoris donnée par $U$ et $V$. On obtient notamment la suite exacte :

$$\underbrace{H^{n-1}(\mathbb{R}^n)}_{=0} \to H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \to H^n(U \setminus \{x\}) \to \underbrace{H^n(\mathbb{R}^n)}_{=0}$$

Cela signifie entraine que $H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \simeq H^n(U \setminus \{x\})$. Comme $H^{n-1}(V) = H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R}$, on en déduit que $H^n(U \setminus \{x\})$ est non trivial.

2– Par l'absurde, soit $h : V \to U$ un tel homeomorphisme entre des ouverts $V \subseteq \mathbb{R}^p$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Quitte à restreindre $V$, on peut supposer que $V$ est une boule $V = B(y, \varepsilon)$. D'après la question précédente, $H^{n-1}(V \setminus \{y\}) = H^{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq \{0\}$. C'est absurde car on sait que la cohomologie de $V \setminus \{y\}$ coïncide avec elle de $\mathbb{S}^{p-1}$ qui est nulle en degré $n-1$.

#### 2. Groupe de cohomologie de dimension infinie

1– Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$ est de dimension infinie en utilisant une suite exacte de Mayer-Vietoris convenable.

Nous redémontrons ce résultat par une autre méthode :

2– Soit $C$ une sous variété compacte sans bord, orientée, et de dimension 1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. Vérifier que l'intégration sur $C$ définit une forme linéaire sur $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$.

3– Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer le tiré en arrière de la forme volume standard $\omega_k = (x-k)dy - ydx$ sur $k + S^1$ par l'application de projection radiale $p_k : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \to k + S^1, z \mapsto k + \frac{z-k}{||z-k||}$. On le note $\alpha_k \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$.

4– Soit $k, l \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in ]0,1[$. Montrer que l'intégrale de $\alpha_k$ sur $l + \varepsilon S^1$ est non nulle si et seulement si $k = l$.

5– Conclure.

**Solution :**

1– On pose $U := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, $V := \amalg_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} B(k, 1/4)$. Alors $U \cup V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Pour cette de décomposition de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la suite exacte longue de Mayer-Vietoris donne en particulier la suite exacte : $H^1(U) \oplus H^1(V) \to H^1(U \cap V) \to H^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ ce qui se réécrit $H^1(U) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to 0$. On en déduit que $H^1(U)$ se surjecte sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et est donc de dimension infinie.

2– Il s'agit de vérifier que l'intégrale sur $C$ d'une 1-forme exacte est nulle. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$ une 0-forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. Notons $i : C \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$ l'inclusion. Alors

$$\int_C i^* df = \int_C d(i^* f) = 0$$

d'après le théorème de Stokes, car $C$ n'a pas de bord. D'où le résultat.

3– On montre que $\alpha_k = \frac{(x-k)dy - ydx}{(x-k)^2 + y^2}$. Il suffit de traiter le cas où $k = 0$, la formule générale s'en déduisant par conjugaison. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. L'application tangente $(Tp_0)_a : T_a\mathbb{R}^2 \to T_{\frac{a}{||a||}}\mathbb{R}^2$ préserve la direction radiale, et multiplie un vecteur orthoradial par le scalaire $\frac{1}{||a||}$. Ainsi en coordonnées polaires, $(\alpha_0)_a(u_r) = 0$, $(\alpha_0)_a(u_\theta) = \frac{1}{||a||}$. Il en est de même pour la forme $\frac{a_1 dy - a_2 dx}{||a||^2}$. Elles sont donc égales, ce qui prouve le résultat.

4– Comme la projection $p_{k|k+\varepsilon S^1} : k + \varepsilon S^1 \to k + S^1$ est un difféomorphisme préservant l'orientation, on a $\int_{k+\varepsilon S^1} \alpha_{k|k+\varepsilon S^1} = \int_{k+S^1} \omega_k$ qui est donc non nul.

Soit maintenant $l \in \mathbb{Z}$, $l \neq k$. On a par définition $\int_{l+\varepsilon S^1} \alpha_{k|l+\varepsilon S^1} = \int_{l+\varepsilon S^1} (p_{k|l+\varepsilon S^1})^\star \omega_k$. Cependant $p_{k|l+\varepsilon S^1}$ n'est pas surjective sur $k+S^1$, donc est homotope à une application constante. On en déduit que $(p_{k|l+\varepsilon S^1})^\star \omega_k$ est une forme différentielle fermée sur $l+\varepsilon S^1$, donc d'intégrale nulle.

5– Les formes différentielles $\alpha_k$ sont fermées (comme tiré en arrière de formes fermées). Elles définissent donc des classes de cohomologie $[\alpha_k]$. Ces dernières forment une famille libre : si $\sum_{k=-n,\dots,n} \lambda_k \alpha_k = 0$, alors en intégrant sur le cercle $k + \varepsilon S^1$, on obtient $\lambda_k = 0$. Ainsi $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$ est de dimension infinie.

## 3. Cohomologie de $\mathbb{R}^n$ privé de deux points

1– Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les groupes de cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^n$ privé de deux points.

2– Lorsque ces groupes sont non nuls, déterminer des formes différentielles dont les classes de cohomologie en forment une base (d'espace vectoriel).

**Solution :**

1– On peut supposer que les deux points en questions sont $e_1$ et $-e_1$. On considère les ouverts $U = \mathbb{R}^n \setminus \{e_1\}$ et $V = \mathbb{R}^n \setminus \{-e_1\}$. On a $U \cup V = \mathbb{R}^n$ et $U \cap V = M$.

Comme $M$ est connexe, $H^0(M) \simeq \mathbb{R}$. Une base de $H^0(M)$ est donnée par la classe de cohomologie de la fonction constante égale à 1.

Pour $p \geqslant 1$, la suite exacte de Mayer-Vietoris fournit

$$\underbrace{H^p(\mathbb{R}^n)}_{=0} \to H^p(U) \oplus H^p(V) \to H^p(M) \to \underbrace{H^{p+1}(\mathbb{R}^n)}_{=0}$$

Donc $H^p(U) \oplus H^p(V) \simeq H^p(M)$. Comme $U$ et $V$ se rétractent chacun sur une sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, on a $H^p(M) = 0$ si $p \neq n-1$, et $H^{n-1}(M) \simeq \mathbb{R}^2$.

2– On a vu que $H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \simeq H^{n-1}(M)$ via l'application de restriction. Pour trouver une base de $H^{n-1}(M)$, il suffit donc de trouver une base de $H^{n-1}(U)$ et de $H^{n-1}(V)$. Considérons par exemple $H^{n-1}(U)$. L'ouvert $U$ est homotopiquement équivalent à la sphère de dimension $n-1$ via l'application $p : U \to \mathbb{S}^{n-1}, x \mapsto \frac{x-e_1}{||x-e_1||}$. L'application induite en cohomologie $[p] : H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \to H^{n-1}(U), [\omega] \mapsto [p^*\omega]$ est donc un isomorphisme. Soit $\omega_0$ la forme volume canonique sur $\mathbb{S}^{n-1}$, définie par

$$\omega_0 := \sum_i (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

La classe $[\omega_0]$ forme une base de $H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ donc son tiré en arrière $[p^*\omega_0]$ forme une base de $H^{n-1}(U)$. Le calcul montre que

$$p^*\omega_0 = \frac{1}{\|x-e_1\|^n} \sum_{i=1}^n (-1)^i (x-e_1)_i dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

## 4. Cohomologie de surfaces

Notons $T_0$ la sphère de $\mathbb{S}^2$, et pour $g \in \mathbb{N}^\star$, appelons $T_g$ la somme connexe de $g$ tores de dimension 2. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $T_{g,k}$ la variété obtenue en enlevant $k$ points distincts à $T_g$ (bien défini à difféomorphisme près).

1– Vérifier que $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$. On admettra que $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ (cf. cours de la semaine prochaine)

2– Calculer $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$ pour $k \geqslant 0$.

3– Calculer $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$.

4– Calculer $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$.

5– Soit $k \geqslant 2$. Calculer $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$, $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$, et montrer que si $\mathbb{S}^1 \subset T_{1,k}$ est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle.

6– Calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$ pour $g, k \geqslant 0$.

7– En déduire que si $g \neq g'$, $T_g$ et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Montrer que si $(g,k) \neq (g',k')$, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ne sont pas homéomorphes.

**Solution :**

1– $\dim H^0(T_g, \mathbb{R}) = 1$ car $T_g$ est connexe. $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ car $T_g$ est compacte orientable donc $H^2(T_g, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ via $[\alpha] \mapsto \int_{T_g} \alpha$ (admis dans le td).

2– La variété $T_0$ est la sphère. Sa cohomologie a été calculée en cours : $H^1(T_0) = 0$.

Si $k \geqslant 1$, la variété $T_{0,k}$ est le plan privé de $k-1$ points. On peut appliquer Mayer-Vietoris à un recouvrement constitué de deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection a $k$ composantes connexes homéomorphes à $\mathbb{R}^2$. Il vient $\dim H^1(T_{0,k}) = k-1$ et $\dim H^2(T_{0,k}) = 0$.

3– La variété $T_1$ est le tore. On peut trouver un recouvrement par deux ouverts $U$ et $V$ qui sont des cylindres dont l'intersection est la réunion de deux cylindres. Comme un cylindre se rétracte par déformation sur un cercle, il a les mêmes groupes de cohomologie que le cercle. Appliquant alors Mayer-Vietoris, et utilisant le fait que $H^2(T_1) = \mathbb{R}$ (admis dans ce td), il vient : $H^1(T_1) = \mathbb{R}^2$.

4– On peut recouvrir $T_{1,1}$ par deux ouverts se rétractant par déformation sur un cercle, dont l'intersection est contractile. Mayer-Vietoris montre alors que $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R}) = 2$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R}) = 0$.

5– Si $k \geqslant 2$, on recouvre $T_{1,k-1}$ par un ouvert homéomorpheà $T_{1,k}$ et un ouvert contractile, dont l'intersection se rétracte sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Appliquant Mayer-Vietoris, on montre par récurrence sur $k$ que $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R}) = k+1$ et $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R}) = 0$ pour $k \geqslant 1$. De plus, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ apparaît dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris, qui montre qu'elle est surjective, donc non nulle.

6– On va montrer par récurrence sur $g$ que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$, et que $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$ si $k \geqslant 1$. On peut supposer $g \geqslant 2$.

On peut recouvrir $T_{g,k}$ par deux ouverts homéomorphes à $T_{1,1}$ et à $T_{g-1,k+1}$, d'intersection se rétractant sur le cercle, et considérer la suite exacte longue de Mayer-Vietoris associée. Si $k = 0$, la connaissance de $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ permet de calculer $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$. Si $k \geqslant 1$, on remarque que le même argument qu'à la question précédente montre que la flèche $H^1(T_{g-1,k+1}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle. Ceci permet d'utiliser la suite exacte longue pour calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$.

7– Deux variétés homéomorphes ont mêmes groupes de cohomologie. Mais, la question précédente montre que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) \neq \dim H^1(T_{g'}, \mathbb{R})$ si $g \neq g'$ : $T_g$ et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Supposons que $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ soient homéomorphes.

La valeur de $k$ est déterminée par l'espace topologique $T_{g,k}$ : c'est son « nombre de bouts ». Plus précisément, c'est le plus petit entier tel que l'énoncé suivant soit vrai : si $K \subset$ est un compact, il existe un compact $K \subset K' \subset T_{g,k}$ tel que $T_{g,k} \setminus K'$ ait exactement $k$ composantes connexes. Ainsi $k = k'$.

Comme les groupes de cohomologie sont un invariant topologique, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ont un $H^1$ de même dimension, et les questions précédentes montrent que $g = g'$.

## Cohomologie des formes invariantes

### 5. Lien avec l'algèbre de Lie

1– Caractériser les formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ qui sont invariantes par translation.

2– En déduire la cohomologie des formes invariantes $H((\Omega\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}^n})$. Que remarque t'on ?

3– Vérifier que cette cohomologie est en fait la cohomologie (de De Rham) du tore $\mathbb{T}^n$.

Nous allons généraliser cette observation en montrant que la cohomologie des formes invariantes d'un groupe de Lie ne dépend que de son algèbre de Lie.

4– Soit $G$ un groupe de Lie. Montrer que l'identification des formes invariantes à gauche avec $\bigwedge \mathfrak{g}^\star$ identifie la différentielle extérieure avec l'opérateur $d : \Lambda^p\mathfrak{g}^\star \to \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^\star$ défini pour $X_i \in \mathfrak{g}$ par :

$$d\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_n)$$

5– En déduire que si $G$ et $G'$ sont des groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont isomorphes[1], alors $H((\Omega G)^G) \simeq H((\Omega G')^{G'})$.

**Solution :**

1– Soit $\alpha \in \Omega^p(\mathbb{R}^n)$ une $p$-forme sur $\mathbb{R}^n$. On l'écrit en coordonnées :

$$\alpha = \sum_{i=(i_1<\cdots<i_p)} a_i dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

où $a_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. La forme $\alpha$ est invariante par translation si et seulement si chaque $a_i$ est invariant par translation, i.e. donc constant.

2– D'après la caractérisation précédente, une $p$-forme invariante par translation est de différentielle nulle. Ainsi, $H^p((\Omega\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}^n}) \simeq \mathbb{R}^k$ où $k = \binom{n}{p}$. Ce n'est donc pas la même cohomologie que celle de $\mathbb{R}^n$ (qui vaut $\mathbb{R}$ en degré 0 et est triviale sinon).

3– Le même raisonnement donne le même résultat pour décrire la cohomologie invariante du tore $\mathbb{T}^n$. Or c'est un groupe compact connexe, donc sa cohomologie invariante coïncide avec sa cohomologie de De Rham.

4– L'identification mentionnée est donnée par l'application $\Omega^p(G)^G \to \bigwedge^p \mathfrak{g}^\star, \alpha \mapsto \alpha_e$. Pour $\varphi \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^\star$, notons $\alpha^\varphi$ son inverse. On doit calculer $(d\alpha^\varphi)_e$. On rappelle la formule de Maurer-Cartan (voir cours, section 18.c) : Soit $\alpha$ une $p$-forme sur $G$, et $X_0, \dots, X_p$ des champs de vecteurs sur $G$. Alors :

$$(d\alpha)_{X_0,\dots,X_p} = \sum_0^p(-1)^i X_i.\alpha_{X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_p} + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha_{[X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_i},\dots,X_p}$$

où $\alpha_{X_1,\dots,X_p} = \alpha(X_1, \dots, X_p)$. Appliquons cette formule à une $p$-forme invariante $\alpha \in \Omega^p(G)^G$ et pour des champs de vecteurs invariants à gauche. Les fonctions $\alpha_{X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_p}$ sont invariantes à gauche, donc constantes. On obtient ainsi :

$$(d\alpha)_{X_0,\dots,X_p} = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha_{[X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_i},\dots,X_p}$$

1. Les algèbres de Lie de $G$ et $G'$ sont dites isomorphes s'il existe entre elles un isomorphisme d'espaces vectoriels respectant le crochet.

En évaluant au point $e$ pour $\alpha = \alpha^\varphi$, on obtient le résultat voulu.

5– D'après la question précédente, la cohomologie des formes invariantes peut s'exprimer uniquement à l'aide de l'algèbre de Lie du groupe. D'où le résultat.

## 6. Description du $H^1$

Soit $G$ un groupe de Lie, $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie. On rappelle que l'application $(\Omega G)^G \to \bigwedge \mathfrak{g}^\star, \alpha \mapsto \alpha_e$ est un isomorphisme entre l'algèbre des formes différentielles $G$-invariantes sur $G$ et l'algèbre des formes alternées sur $\mathfrak{g}$.

1– Montrer qu'une 1-forme invariante $\alpha \in (\Omega^1 G)^G$ est fermée si et seulement si $\alpha_e$ est nulle sur l'algèbre de Lie dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les corchets $[X, Y]$ où $X, Y \in \mathfrak{g}$).

2– Conclure qu'on a un isomorphisme

$$H^1(\Omega(G)^G) \simeq \{\varphi \in \mathfrak{g}^\star,\ \varphi[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0\}$$

3– Que dire du premier groupe de cohomologie invariante d'un groupe abélien ?

4– Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = T_e SU_2(\mathbb{C})$ est égale à son algèbre de Lie dérivée.

**Solution :**

1– Une 1-forme invariante $\alpha$ sur $G$ est fermée si et seulement si la forme linéaire correspondante $\alpha_e$ sur $\mathfrak{g}$ est fermée pour la différentielle $d : \mathfrak{g}^\star \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}^\star$ calculée dans la question 4 de l'exercice précédent. On y a vu que

$$d\alpha_e(X, Y) = -\alpha_e([X, Y])$$

Entre autres, $d\alpha_e = 0$ si et seulement si $\alpha_e([X, Y])$ est nulle sur $[\mathfrak{g}^\star, \mathfrak{g}^\star]$, ce qui conclut.

2– Une 0-forme invariante sur $G$ est constante donc de différentielle nulle. Ainsi $H^1(\Omega(G)^G) \simeq \{\alpha \in \Omega(G)^G, d\alpha = 0\} \simeq \{\varphi \in \mathfrak{g}^\star,\ \varphi[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0\}$ où la deuxième identification découle de la question précédente.

3– Un groupe abélien a son algèbre dérivée triviale : $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ (voir poly, corollaire 15.3). Donc $H^1(\Omega(G)^G) \simeq \mathfrak{g}^\star$ est de dimension $\dim G$.

4– Le groupe des matrices spéciales unitaires $SU_2(\mathbb{C})$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^3$ via l'application

$$\mathbb{S}^3 = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2, |a|^2 + |b|^2 = 1\} \to SU_2(\mathbb{C}), (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

Tout est clair, sauf peut être la surjectivité. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$. Cette matrice préservant le produit scalaire complexe, on a ses colonnes orthonormées : $|a|^2 + |c|^2 = |b|^2 + |d|^2 = 1$ et $a\overline{b} + c\overline{d} = 0$. Or l'orthogonal du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré donc par $\begin{pmatrix} -\overline{c} \\ \overline{a} \end{pmatrix}$. Il existe ainsi $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $b = -\lambda\overline{c}$, $d = \lambda\overline{a}$. On obtient alors $1 = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda(|a|^2 + |c|^2) = \lambda$, prouvant la surjectivité.

On déduit de ce qui précède que $H^1(SU_2(\mathbb{C})) = H^1(\mathbb{S}^3) = 0$ et aussi que $SU_2(\mathbb{C})$ est compact connexe. Son premier groupe de cohomologie invariante est donc nul, autrement dit $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ d'après la question 2.

## 7. Cohomologie d'un groupe non compact

On note $G := SL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := T_eG$ son algèbre de Lie.

1– Montrer que l'application $G \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une équivalence d'homotopie. En déduire la cohomologie de $G$.

2– Expliciter $\mathfrak{g}$, vérifier que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. En déduire le premier groupe de cohomologie du complexe des formes $G$-invariantes $H^1({}^G\Omega G)$.

3– Conclure que la cohomologie des formes $G$-invariante ne coïncide pas avec la cohomologie de De Rham. Justifier cependant que la cohomologie de De Rham est $G$-invariante, i.e. pour $g \in G$, $(L_g)^\star : H^p(\Omega G) \to H^p(\Omega G)$ est l'identité.

**Solution :**

1– Notons $f$ cette application et $f' : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to G$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ b & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. On a $f' \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2-\{0\}}$. Montrons que $f \circ f'$ est homotope à $\mathrm{Id}_G$. Pour $t \in [0,1]$, on pose $h_t : G \to G$, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & (1-t)c - t\frac{b}{a^2+b^2} \\ b & (1-t)d + t\frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. Par multilinéarité du déterminant, $h_t$ est bien à valeurs dans $G$ et réalise une homotopie en $\mathrm{Id}_G$ et $f' \circ f$.
Finalement $H(G) \equiv H(\mathbb{R}^2 - \{0\}) \equiv H(S^1)$ i.e. $H^k(G) = \mathbb{R}$ si $k = 0, 1$ et $H^k(G) = 0$ si $k \geqslant 2$.

2– $\mathfrak{g} = T_eG = \{X \in M_2(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(X) = 0\}$. Comme $G$ est linéaire, le crochet sur $\mathfrak{g}$ est donné par le crochet usuel sur $M_2(\mathbb{R})$ à savoir $[X, Y] = XY - YX$. On se donne base de $\mathfrak{g}$ en posant $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie que $[E, F] = H$, $[H, E] = 2E$, $[H, F] = 2F$. Ainsi $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$.
Or $H^1({}^G\Omega G) \equiv \{\alpha \in \Lambda\mathfrak{g}^\star,\ \alpha([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0\}$ d'où $H^1({}^G\Omega G) = 0$.

3– On ainsi $H^1(G) \neq H^1({}^G\Omega G)$. L'action de $G$ sur lui même par translation à gauche est triviale au niveau de la cohomologie $H(G)$ car $G$ est connexe donc pour $g \in G$, on a $L_g$ homotope à $L_e = \mathrm{Id}_G$.

## 2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Soit $V = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Ainsi, $U \setminus \{x\} = U \cap V$. Considérer alors la suite de Mayer-Vietoris donnée par $U$ et $V$.

1.2 : Le $(n-1)$-ième groupe de cohomologie d'une boule épointée de $\mathbb{R}^p$ est trivial.

Exercice 2 :

2.1 Poser $U := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, $V := \amalg_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} B(k, 1/4)$.

2.2 : La restriction d'une forme à une sous-variété n'est rien d'autre qu'un tiré en arrière par l'application d'inclusion. Or on sait que tirer en arrière et différentielle commutent. Conclure avec la formule de Stokes.

2.3 : Montrer que $\alpha_k = \frac{(x-k)dy - ydx}{(x-k)^2+y^2}$.

2.4 : La projection radiale $p_k$ est un difféomorphisme respectant l'orientation entre $k+\varepsilon S^1$ et $k + S^1$. En revanche, si $l \neq k$ l'image $p_k(l + \varepsilon S)$ est strictement incluse dans $k + \varepsilon S^1$.

Exercice 3 :

3.1 : Exprimer $\mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$ comme l'intersection de deux ouverts

$$U = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \text{ et } V = \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$$

Considérer ensuite la suite de Mayer-Vietoris associée à ces ouverts.

3.2 : On a $H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \simeq H^{n-1}(M)$. Pour trouver une base de $H^{n-1}(M)$, il suffit donc de trouver une base de $H^{n-1}(U)$ et de $H^{n-1}(V)$. Remarquer alors $U$ est homotopiquement équivalent à la sphère de dimension $(n-1)$.

Exercice 4 :

4.2 : Si $k \geqslant 1$, appliquer Mayer-Vietoris à un recouvrement constitué de deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection a $k$ composantes connexes homéomorphes à $\mathbb{R}^2$.

4.3 : Le tore admet un recouvrement par deux ouverts $U$ et $V$ qui sont des cylindres et dont l'intersection est la réunion de deux cylindres. Appliquer Mayer-Vietoris.

4.4 : On peut recouvrir $T_{1,1}$ par deux ouverts se rétractant par déformation sur un cercle, dont l'intersection est contractile.

4.5 : Si $k \geqslant 2$, recouvrir $T_{1,k-1}$ par un ouvert homéomorpheà $T_{1,k}$ et un ouvert contractile, dont l'intersection se rétracte sur le cercle $\mathbb{S}^1$.

4.6 : Montrer par récurrence sur $g$ que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$, et que $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$ si $k \geqslant 1$. Pour cela, on peut supposer $g \geqslant 2$ et recouvrir $T_{g,k}$ par deux ouverts homéomorphes à $T_{1,1}$ et à $T_{g-1,k+1}$, d'intersection se rétractant sur un cercle.

4.7 : La cohomologie est invariante par homéomorphisme.

4.8 : Montrer d'abord que $k = k'$ en trouvant une caractérisation topologique de ce nombre.

Exercice 5 :

5.1 : Ecrire en coordonnées.

5.3 : Appliquer le théorème 20.18 du poly.

5.4 : Utiliser la formule de Maurer-Cartan avec des champs de vecteurs $G$-invariants.

Exercice 6 :

6.1 : Utiliser la formule démontrée en 5.4.

6.2 : Une 0-forme $G$-invariante est de différentielle nulle.

6.3 : Montrer que l'algèbre de Lie d'un groupe abélien est de crochet nul.

6.4 : $SU_2(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$ (cf. partiel "DM").

Exercice 7 :

7.1 : Considérer l'application : $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to G, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ b & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$

7.2 : Vérifier que les matrices $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathfrak{g}$. Utiliser le résultat de la question 6.2.

7.3 : Le groupe $G$ est connexe.