Géométrie Différentielle, TD 12 du 30 mai 2020

1. Exercices

NB : Pour des raisons de clareté, le TD est divisé en deux parties, la première dédiée au calcul de cohomologie à l'aide des suites de Mayer-Vietoris, la seconde dédiée à la cohomologie des formes invariantes. Cependant, il est sans doute plus judicieux de ne pas traiter les exercices de façon linéaire. On conseille l'ordre suivant : 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7.

Suite de Mayer-Vietoris

1. Invariance du domaine

1– Soit $n \geqslant 1$, soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide et $x \in U$. Montrer que le $(n-1)$-ième groupe de cohomologie de De Rham de $U \setminus \{x\}$ est non trivial, autrement dit

$$H^{n-1}(U \setminus \{x\}) \neq \{0\}$$

2– Soit $n, p \geqslant 1$ avec $n > p$. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$ et un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

2. Groupe de cohomologie de dimension infinie

1– Montrer que $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$ est de dimension infinie en utilisant une suite exacte de Mayer-Vietoris convenable.

Nous redémontrons ce résultat par une autre méthode :

2– Soit C une sous variété compacte sans bord, orientée, et de dimension 1 de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$. Vérifier que l'intégration sur C définit une forme linéaire sur $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$.

3– Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer le tiré en arrière de la forme volume standard $\omega_k = (x-k)dy - ydx$ sur $k + S^1$ par l'application de projection radiale $p_k : \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z} \to k + S^1, z \mapsto k + \frac{z-k}{||z-k||}$. On le note $\alpha_k \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z})$.

4– Soit $k, l \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que l'intégrale de α_k sur $l + \varepsilon S^1$ est non nulle si et seulement si $k = l$.

5– Conclure.

3. Cohomologie de $\mathbb{R}^n$ privé de deux points

1– Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les groupes de cohomologie de De Rham de $\mathbb{R}^n$ privé de deux points.

2– Lorsque ces groupes sont non nuls, déterminer des formes différentielles dont les classes de cohomologie en forment une base (d'espace vectoriel).

4. Cohomologie de surfaces

Notons T_0 la sphère de $\mathbb{S}^2$, et pour $g \in \mathbb{N}^\star$, appelons T_g la somme connexe de g tores de dimension 2. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $T_{g,k}$ la variété obtenue en enlevant k points distincts à T_g (bien défini à difféomorphisme près).

1– Vérifier que $\dim H^0(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 1$. On admettra que $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$ (cf. cours de la semaine prochaine)

2– Calculer $\dim H^1(T_{0,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{0,k}, \mathbb{R})$ pour $k \geqslant 0$.

3– Calculer $\dim H^1(T_1, \mathbb{R})$.

4– Calculer $\dim H^1(T_{1,1}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{1,1}, \mathbb{R})$.

5– Soit $k \geqslant 2$. Calculer $\dim H^1(T_{1,k}, \mathbb{R})$, $\dim H^2(T_{1,k}, \mathbb{R})$, et montrer que si $\mathbb{S}^1 \subset T_{1,k}$ est un petit cercle tracé autour de l'un des points qu'on a enlevé, l'application induite $H^1(T_{1,k}) \to H^1(\mathbb{S}^1)$ est non nulle.

6– Calculer $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R})$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R})$ pour $g, k \geqslant 0$.

7– En déduire que si $g \neq g'$, T_g et $T_{g'}$ ne sont pas homéomorphes.

8– Montrer que si $(g, k) \neq (g', k')$, $T_{g,k}$ et $T_{g',k'}$ ne sont pas homéomorphes.

Cohomologie des formes invariantes

5. Lien avec l'algèbre de Lie

1– Caractériser les formes différentielles sur $\mathbb{R}^n$ qui sont invariantes par translation.

2– En déduire la cohomologie des formes invariantes $H((\Omega\mathbb{R}^n)^{\mathbb{R}^n})$. Que remarque t'on ?

3– Vérifier que cette cohomologie est en fait la cohomologie (de De Rham) du tore $\mathbb{T}^n$.

Nous allons généraliser cette observation en montrant que la cohomologie des formes invariantes d'un groupe de Lie ne dépend que de son algèbre de Lie.

4– Soit G un groupe de Lie. Montrer que l'identification des formes invariantes à gauche avec $\bigwedge \mathfrak{g}^\star$ identifie la différentielle extérieure avec l'opérateur $d : \Lambda^p\mathfrak{g}^\star \to \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^\star$ défini pour $X_i \in \mathfrak{g}$ par :

$$d\omega(X_0, \ldots, X_p) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_n)$$

5– En déduire que si G et G' sont des groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont isomorphes [1], alors $H((\Omega G)^G) \simeq H((\Omega G')^{G'})$.

6. Description du H^1

Soit G un groupe de Lie, $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie. On rappelle que l'application $(\Omega G)^G \to \bigwedge \mathfrak{g}^\star, \alpha \mapsto \alpha_e$ est un isomorphisme entre l'algèbre des des formes différentielles G-invariantes sur G et l'algèbre des formes alternées sur $\mathfrak{g}$.

1. Les algèbres de Lie de G et G' sont dites isomorphes s'il existe entre elles un isomorphisme d'espaces vectoriels respectant le crochet.

1– Montrer qu'une 1-forme invariante $\alpha \in (\Omega^1 G)^G$ est fermée si et seulement si α_e est nulle sur l'algèbre de Lie dérivée $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ (sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ engendré par les corchets $[X, Y]$ où $X, Y \in \mathfrak{g}$).

2– Conclure qu'on a un isomorphisme

$$H^1(\Omega(G)^G) \simeq \{\varphi \in \mathfrak{g}^\star,\ \varphi[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0\}$$

3– Que dire du premier groupe de cohomologie invariante d'un groupe abélien ?

4– Montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = T_e SU_2(\mathbb{C})$ est égale à son algèbre de Lie dérivée.

7. Cohomologie d'un groupe non compact

On note $G := SL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := T_e G$ son algèbre de Lie.

1– Montrer que l'application $G \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une équivalence d'homotopie. En déduire la cohomologie de G.

2– Expliciter $\mathfrak{g}$, vérifier que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. En déduire le premier groupe de cohomologie du complexe des formes G-invariantes $H^1({}^G\Omega G)$.

3– Conclure que la cohomologie des formes G-invariante ne coïncide pas avec la cohomologie de De Rham. Justifier cependant que la cohomologie de De Rham est G-invariante, i.e. pour $g \in G$, $(L_g)^\star : H^p(\Omega G) \to H^p(\Omega G)$ est l'identité.

2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Soit $V = \mathbb{R}^n \setminus \{x\}$. Ainsi, $U \setminus \{x\} = U \cap V$. Considérer alors la suite de Mayer-Vietoris donnée par U et V.

1.2 : Le $(n-1)$-ième groupe de cohomologie d'une boule épointée de $\mathbb{R}^p$ est trivial.

Exercice 2 :

2.1 Poser $U := \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}$, $V := \amalg_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} B(k, 1/4)$.

2.2 : La restriction d'une forme à une sous-variété n'est rien d'autre qu'un tiré en arrière par l'application d'inclusion. Or on sait que tirer en arrière et différentielle commutent. Conclure avec la formule de Stokes.

2.3 : Montrer que $\alpha_k = \frac{(x-k)dy - ydx}{(x-k)^2+y^2}$.

2.4 : La projection radiale p_k est un difféomorphisme respectant l'orientation entre $k+\varepsilon S^1$ et $k + S^1$. En revanche, si $l \neq k$ l'image $p_k(l + \varepsilon S)$ est strictement incluse dans $k + \varepsilon S^1$.

Exercice 3 :

3.1 : Exprimer $\mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$ comme l'intersection de deux ouverts

$$U = \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \text{ et } V = \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$$

Considérer ensuite la suite de Mayer-Vietoris associée à ces ouverts.

3.2 : On a $H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) \simeq H^{n-1}(M)$. Pour trouver une base de $H^{n-1}(M)$, il suffit donc de trouver une base de $H^{n-1}(U)$ et de $H^{n-1}(V)$. Remarquer alors U est homotopiquement équivalent à la sphère de dimension $(n-1)$.

Exercice 4 :

4.1 : Utiliser le point admis pour le H^2.

4.2 : Si $k \geqslant 1$, appliquer Mayer-Vietoris à un recouvrement constitué de deux ouverts homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ dont l'intersection a k composantes connexes homéomorphes à $\mathbb{R}^2$.

4.3 : Le tore admet un recouvrement par deux ouverts U et V qui sont des cylindres et dont l'intersection est la réunion de deux cylindres. Appliquer Mayer-Vietoris.

4.4 : On peut recouvrir $T_{1,1}$ par deux ouverts se rétractant par déformation sur un cercle, dont l'intersection est contractile.

4.5 : Si $k \geqslant 2$, recouvrir $T_{1,k-1}$ par un ouvert homéomorpheà $T_{1,k}$ et un ouvert contractile, dont l'intersection se rétracte sur le cercle $\mathbb{S}^1$.

4.6 : Montrer par récurrence sur g que $\dim H^1(T_g, \mathbb{R}) = 2g$ et $\dim H^2(T_g, \mathbb{R}) = 1$, et que $\dim H^1(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 2g - 1 + k$ et $\dim H^2(T_{g,k}, \mathbb{R}) = 0$ si $k \geqslant 1$. Pour cela, on peut supposer $g \geqslant 2$ et recouvrir $T_{g,k}$ par deux ouverts homéomorphes à $T_{1,1}$ et à $T_{g-1,k+1}$, d'intersection se rétractant sur un cercle.

4.7 : La cohomologie est invariante par homéomorphisme.

4.8 : Montrer d'abord que $k = k'$ en trouvant une caractérisation topologique de ce nombre.

Exercice 5 :

5.1 : Ecrire en coordonnées.

5.3 : Appliquer le théorème 20.18 du poly.

5.4 : Utiliser la formule de Maurer-Cartan avec des champs de vecteurs G-invariants.

Exercice 6 :

6.1 : Utiliser la formule démontrée en 5.4.

6.2 : Une 0-forme G-invariante est de différentielle nulle.

6.3 : Montrer que l'algèbre de Lie d'un groupe abélien est de crochet nul.

6.4 : $SU_2(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^3$ (cf. partiel "DM").

Exercice 7 :

7.1 : Considérer l'application : $f : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to G, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -\frac{b}{a^2+b^2} \\ b & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$

7.2 : Vérifier que les matrices $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathfrak{g}$. Utiliser le résultat de la question 6.2.

7.3 : Le groupe G est connexe.