Géométrie Différentielle, TD 13 du 7 mai 2020

1. Exercices

NB : Des indications sont proposées plus bas.

1. Questions diverses

Soient M et N des variétés connexes compactes orientées de dimension $n \geqslant 1$ et $f : M \to N$ une application lisse.

1– Montrer que si f n'est pas surjective alors $\deg f = 0$ (il s'agit de détailler la démonstration du théorème 21.4 vue en cours dans ce cas précis). Que dire de la réciproque ?

2– Le degré de f est il nécessairement dans $\mathbb{Z}$?

3– Soit $i \in \mathbb{Z}$. Construire un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ s'annulant en l'origine et seulement en l'origine, et d'indice i en l'origine.

4– On considère $\mathbb{S}^2$ comme réunion de $\mathbb{R}^2$ et du point à l'infini ∞. Considérons un champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et qui est d'indice i en 0. Quel est son indice en ∞ ?

2. Degré d'une application

1– Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞ qui coïncide avec l'identité hors d'un compact.
—Montrer que f se prolonge en une application C^∞ $\widetilde{f} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$.
—Calculer $\deg(\widetilde{f})$.
—Montrer que f est surjective.

2– Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes, avec Q non nul.
—Montrer que P/Q induit une application C^∞ $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
—Calculer $\deg(f)$.

3. Applications de la sphère dans elle-même

1– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ dont le degré n'est pas $(-1)^{n+1}$. Montrer que f admet un point fixe.

2– Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application C^∞ de degré impair. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(-x) = -f(x)$.

3– Soit $x \in \mathbb{S}^n$ et $U \subset \mathbb{S}^n$ un ouvert non vide. Montrer qu'il existe un ouvert $V \subset U$ et une application C^∞ $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ tels que f réalise un difféomorphisme entre V et $\mathbb{S}^n \setminus \{x\}$, et que $f(\mathbb{S}^n \setminus V) = \{x\}$.

4– Soit $d \in \mathbb{Z}$. Déduire de la question précédente qu'il existe une application C^∞ de degré d de la sphère dans elle-même.

4. Degré et homotopie

Soit $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ le tore de dimension 2. On considère les applications $f, g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ définies par $f(w,z) = (w,z)$ et $g(w,z) = (z,\bar{w})$. Montrer que f et g ont même degré, mais ne sont pas homotopes. On pourra considérer les morphismes induits sur le premier groupe de cohomologie.

5. Théorème de Brouwer

Soit $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de montrer le théorème de Brouwer : toute application continue $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ admet un point fixe.

1– Soit $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ une application continue. Montrer que $\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = 0$.

2– En déduire qu'il n'existe pas d'application continue $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{S}^{n-1}$ pour laquelle $f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \mathrm{Id}\,|_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

3– Conclure que toute application continue $f : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{\mathbb{B}^n}$ admet un point fixe.

6. Invariant de Hopf

1– Soit $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ une application C^∞ et $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$. Montrer que la forme $f^*\alpha$ est exacte.

2– Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ et $\beta \in \Omega^1(\mathbb{S}^3)$ une primitive de $f^*\alpha$. Montrer que l'intégrale $\int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^*\alpha$ ne dépend pas du choix de β.

3– Montrer que cette intégrale est nulle si α est exacte.

4– Soit $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ telle que $\int_{\mathbb{S}^2} \alpha = 1$. Montrer que $\int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge f^*\alpha$ ne dépend pas non plus du choix de α satisfaisant à cette condition.

5– Ce qui précède montre que cette intégrale ne dépend que de f. On la note $H(f)$ et on l'appelle *l'invariant de Hopf de* f. Si $\varphi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ est une application lisse, montrer que $H(f \circ \varphi) = \deg(\varphi) H(f)$.

6– Si $\psi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ est une application lisse, montrer que $H(\psi \circ f) = \deg(\psi)^2 H(f)$.

7– Montrer que $H(f) = 0$ si f n'est pas surjective.

8– Montrer que si f_1 et f_2 sont homotopes, $H(f_1) = H(f_2)$.

2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Montrer que la réciproque est fausse en construisant une application surjective $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ homotope à une application constante.

1.3 : Commencer par construire une application $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ de degré i puis la prolonger en un champ de vecteur sur $\mathbb{R}^2$ dont l'origine est le seul point d'annulation.

1.4 : Formule de Poincaré-Hopf.

Exercice 2 :

2.1 : Montrer que $\deg \widetilde{f} = 1$ en tirant en arrière une n-forme différentielle supportée par un voisinage du point à l'infini.

2.2 : On identifie $P^1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via l'application $\varphi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to P^1(\mathbb{C})$ définie par $\varphi(z) = [z : 1]$ si $z \in \mathbb{C}$, et $\varphi(\infty) = [1 : 0]$. Le prolongement de P/Q s'obtient naturellement en définissant sa valeur aux zéros de Q et en ∞ comme des limites. Calculer alors le degré via le théorème 21.4 du cours.

Exercice 3 :

3.1 : Raisonner par contraposée en montrant que si f n'a pas de point fixe, alors f est homotope à l'antipodie.

3.2 : Raisonner par contraposée en montrant que s'il n'y a pas de point x tel que $f(-x) = -f(x)$ alors f est homotope au normalisé de $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

3.3 : On peut identifier $\mathbb{S}^n$ à $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ et supposer $V = B(0, \varepsilon)$.

3.4 : Fixer un point x et considérer d-ouverts disjoints $U_1, \ldots, U_d$ munis d'applications $f_1, \ldots, f_d$ comme dans 3.3.

Exercice 4 : Soit $d\theta_1, d\theta_2$ les formes volumes canoniques sur les cercles S^1 décomposant le tore. Montrer que $g^* d\theta_1 = -d\theta_2$ et $g^* d\theta_2 = d\theta_1$. Vérifier aussi que $[d\theta_1]$ et $[\theta_2]$ forment une base de $H^1(\mathbb{T}^2)$.

Exercice 5 :

5.1 : Montrer que $f_{|\mathbb{S}^{n-1}}$ est homotope à une application constante.

5.3 : Raisonner par l'absurde et considérer l'application qui à x associe le point d'intersection entre $\mathbb{S}^{n-1}$ et la demi-droite d'origine $f(x)$ passant par x.

Exercice 6 :

6.1 : $H^2(\mathbb{S}^3) = 0$.

6.2 : $H^1(\mathbb{S}^3) = 0$.

6.3 : Dans ce cas, exprimer $\beta \wedge f^*\alpha$ comme un tiré en arrière d'une 3-forme sur $\mathbb{S}^2$ (pour un bon choix de β).

6.4 : Soit α' une autre forme volume sur $\mathbb{S}^2$ avec $\int \alpha' = 1$. Vérifier qu'il existe une forme différentielle γ telle que $\alpha' = \alpha + \mathrm{d}\gamma$. Pour la suite des calculs, on pourra observer que $\mathrm{d}(\beta \wedge f^*\gamma) = \mathrm{d}\beta \wedge f^*\gamma - \beta \wedge \mathrm{d}(f^*\gamma)$ et que $\mathrm{d}\beta \wedge f^*\gamma = f^*(\alpha \wedge \gamma) = 0$.

6.6 : Un facteur $\deg \psi$ apparaît pour normaliser α, un autre pour normaliser β.

6.7 : Bien choisir α.

6.8 : Par approximation C^∞ des homotopies, il existe $F : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ C^∞ coïncidant avec f_1 pour $t \leqslant 0$ et avec f_2 pour $t \geqslant 1$. Vérifier ensuite que $F^*\alpha$ est exacte, donc de la forme $F^*\alpha = d\beta$. Exprimer alors $H(f_2) - H(f_1)$ comme l'intégrale de $\beta \wedge F^*\alpha$ sur le bord de $\mathbb{S}^3 \times [0, 1]$. Conclure avec la formule de Stokes.