Géométrie Différentielle, TD 14 du 14 mai 2020

1. Exercices

1. Questions diverses

Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface orientée.

1– Justifier que l'application de Gauss $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ est C^∞.

2– Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$, on munit la surface compacte $f(S) \subseteq \mathbb{R}^3$ de l'orientation de S poussée par f. Montrer que les secondes formes fondamentales de S et $f(S)$ coïncident au sens où : $\forall p \in S,\ X, Y \in T_pS$,

$$II_S(X,Y) = II_{f(S)}(TfX, TfY)$$

3– Montrer que le résultat précédent devient faux si f n'est qu'un plongement isométrique de S dans $\mathbb{R}^3$ (qui ne s'étend pas à $\mathbb{R}^3$ à priori).

4– Soit $\sigma \in \Omega^2(S)$ la forme d'aire sur S (pour la métrique induite par $\mathbb{R}^3$), $\alpha \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ la forme volume standard sur $\mathbb{S}^2$. Justifier que pour tout $p \in S$, on a

$$\sigma_p = \alpha_{\nu(p)}$$

Solution :

1– On se donne une base locale (X_1, X_2) de champs de vecteurs, définie sur un ouvert U de S . On se donne $p \in U$, $X_3 : U \to \mathbb{R}^3$ fonction constante telle que $(X_1(p), X_2(p), X_3(p))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Quitte à réduire U, c'est une base en tout point de U. On applique ensuite le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (préservant le caractère C^∞) pour obtenir un nouveau triplet (Y_1, Y_2, Y_3). On a $Y_3 = \nu$, donc ν est C^∞.

2– La condition d'isométrie implique que f préserve la distance entre les points : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$, on a $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. C'est un exercice classique que d'en déduire que $f \in SO(3, \mathbb{R})$. On pourra donc confondre f et Tf.

Soit (X, Y) une base orthonormée directe de TS en un point $p \in S$, alors par définition de l'orientation sur $f(S)$, le couple (fX, fY) est une base orthonormée directe de $f(S)$ en $f(p)$. De plus, comme f préserve l'orientation de $\mathbb{R}^3$, le triplet $(fX, fY, f\nu_S(f(p))$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que $f \circ \nu_S = \nu_{f(S)} \circ f$, puis que $f \circ d\nu_S = d\nu_{f(S)} \circ f$, puis que $II_S(X,Y) = -\langle d\nu_S(X), Y\rangle = -\langle f d\nu_S(X), fY\rangle = -\langle d\nu_{f(S)}(fX), fY\rangle = II_{f(S)}(fX, fY)$ comme attendu.

3– Il suffit de vérifier que les courbures principales ne sont pas toujours préservées par isométrie locale. Considérons par exemple : $S =]0,1[^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, $f : S \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, \cos(y), \sin(y))$. C'est un plongement isométrique. Cependant S a ses courbures principales nulles (car ν est constante) mais $f(S)$ est un ouvert du cyclindre de $\mathbb{R} \times S^1$ donc a une de ses courbures principales non nulle.

4– Par définition, σ_p est l'unique forme bilinéaire alternée sur T_pS telle que si (X_1, X_2) est une base orthonormée directe de T_pS, on a $\sigma_p(X_1, X_2) = 1$.

Par définiton, $\alpha_{\nu(p)}$ est l'unique forme bilinéaire alternée sur $T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$ telle que si (X_1, X_2) est une base orthonormée directe de $T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$, on a $\sigma_p(X_1, X_2) = 1$.

Il est clair que les espaces vectoriels euclidiens T_pS et $T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$ coïncident. Il s'agit donc de voir qu'ils ont même orientation. Or une base (X_1, X_2) est directe dans T_pS ssi $(X_1, X_2, \nu(p))$ est direct dans $\mathbb{R}^3$ ssi (X_1, X_2) est directe dans $T_{\nu(p)}\mathbb{S}^2$ par définition de l'orientation de $\mathbb{S}^2$. D'où le résultat.

2. Surfaces minimales

Soit S une surface riemannienne orientée connexe. La métrique riemanienne sur S induit une forme volume sur S notée vol_S, ainsi qu'une norme $|.|$ sur chaque espace tangent ou cotangent.

1– On note J a rotation d'angle $+\pi/2$ dans chaque espace tangent ou cotangent, i.e. si (X_1, X_2) est une base orthonormale directe locale de TS, et (X^1, X^2) sa base duale, alors $JX_1 = X_2$, $JX_2 = -X_1$, et de même $JX^1 = X_2$, $JX^2 = -X^1$. Montrer que si α est une 1-forme sur S, alors on a :

$$\alpha \wedge J\alpha = |\alpha|^2 \mathrm{vol}_S$$

2– Pour toute fonction $f \in C^\infty(S, \mathbb{R})$, on définit son laplacien en posant : $\Delta f := d(J(df)) \in \Omega^2(S)$. Montrer que si S est compacte, on a $\int_S f\Delta f = -\int_S |df|^2 \mathrm{vol}_S$, puis que $\Delta f = 0$ si et seulement si f est constante.

3– On suppose S isométriquement plongée dans $\mathbb{R}^3$. Soit $v \in \mathbb{R}^3$, $f_v : S \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f_v(x) := \langle v, x\rangle$.

- Calculer Δf_v (on pourra décomposer df_v dans la base locale (X^1, X^2) puis appliquer $(IV.11)$ et $(IV.14)$ du cours).

- En déduire que S est minimale (i.e. de courbure moyenne nulle) si et seulement si $\Delta f_v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

4– En déduire qu'il n'existe pas de surface minimale compacte dans $\mathbb{R}^3$.

Solution :

1– Il suffit de le prouver localement. On se donne X^1, X^2 comme dans l'énoncé, base locale des sections du fibré cotangent sur un ouvert $U \subseteq X$. On peut décomposer $\alpha = aX^1 + bX^2$ où $a, b \in C^\infty(U)$. Alors $\alpha \wedge J\alpha = a^2X^1 \wedge X^2 - b^2X^2 \wedge X^1 = |\alpha|^2 X^1 \wedge X^2$ avec $\mathrm{vol}_S = X^1 \wedge X^2$ par définition de vol_S.

2– On a $d(fJ(df)) = df \wedge J(df) + f\Delta f$. Or $\int_S d(fJ(df)) = 0$ d'après la formule de Stokes. Donc $\int_S f\Delta f = -\int_S df \wedge J(df) = -\int_S |df|^2 \mathrm{vol}_S$ d'après la question précédente.

3– - On se donne des bases locales (X_1, X_2), (X^1, X^2) comme dans l'énoncé, définie sur un ouvert U de S. En tout point $p \in U$, la seconde forme fondamentale II_p est représentée dans la base (X_1, X_2) par une matrice $II_p = \begin{pmatrix} e(p) & f(p) \\ f(p) & g(p) \end{pmatrix}$. On va montrer qu'en tout point de U,

$$\Delta f_v = \langle v, \nu\rangle(e + g)\, X^1 \wedge X^2$$

où $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ désigne l'application de Gauss.

L'application f_v est linéaire donc coïncide avec sa différentielle. On peut ainsi écrire en tout point de U,

$$df_v = \langle v, X_1\rangle X^1 + \langle v, X_2\rangle X^2$$

puis

$$J(df_v) = \langle v, X_1 \rangle X^2 - \langle v, X_2 \rangle X^1$$

On rappelle les formules suivantes démontrées en cours : Il existe une unique 1-forme ω sur U telle que $dX^1 = \omega \wedge X^2$, $dX^2 = -\omega \wedge X^1$, et elle vérifie $dX_1 = \omega X_2 + A^1 \nu$, $dX_2 = -\omega X_1 + A_2 \nu$ où $A_1 := II(X_1, .) = eX^1 + fX^2$, $A_2 := II(X_2, .) = fX^1 + gX^2$ (où on voit X_1, X_2 comme des applications de S dans $\mathbb{R}^3$). Différencions :

$$\begin{aligned}
\Delta f_v &= \langle v, dX_1 \rangle \wedge X^2 + \langle v, X_1 \rangle dX^2 - \langle v, X_2 \rangle \wedge X^1 - \langle v, X_2 \rangle dX^1 \\
&= \langle v, X_2 \rangle \omega \wedge X^2 + \langle v, \nu \rangle A^1 \wedge X^2 - \langle v, X_1 \rangle \omega \wedge X^1 + \langle v, X_1 \rangle \omega \wedge X^1 - \langle v, \nu \rangle A^2 \wedge X^1 - \langle v, X_2 \rangle \omega \wedge X^2 \\
&= \langle v, \nu \rangle A^1 \wedge X^2 - \langle v, \nu \rangle A^2 \wedge X^1 \\
&= \langle v, \nu \rangle (e + g) X^1 \wedge X^2
\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.

- Si la surface est minimale, on a $\mathrm{tr}(II) = e + g = 0$ en tout point de U donc $\Delta f_v = 0$ sur U quelque soit $v \in \mathbb{R}^3$. Comme U peut être choisi comme un voisinage de n'importe quel point, on a $\Delta f_v = 0$ sur tout S.

Réciproquement, supposons $\Delta f_v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$. Soit $p \in U$. On choisit $v = \nu(p)$. L'expression de $\Delta f_{\nu(p)}$ donne que $e(p) + g(p) = 0$ Ainsi $\mathrm{tr}(II) = 0$ sur U puis sur S tout entier car U peut être choisi comme un voisinage de n'importe quel point.

4– On raisonne par l'absurde : Supposons qu'il existe $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface compacte minimale. On peut la supposer connexe, orientée. D'après les questions 2 et 3, on a que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, la fonction f_v est constante sur S. En spécifiant $v = e_1$ et $v = e_3$, on a que S est inclus dans une intersection de translatés : $S \subseteq (w_1 + \{0\} \times \mathbb{R}^2) \cap (w_2 + \mathbb{R}^2 \times \{0\})$ qui est une droite affine. Absurde car S est une surface.

3. Surfaces convexes

Soit Σ une surface compacte connexe orientée de $\mathbb{R}^3$. On suppose que Σ est convexe, c'est-à-dire que sa courbure K est strictement positive en tout point. Le but de cet exercice est de montrer que Σ est la frontière d'un ensemble convexe au sens usuel.

On note $\nu : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss de Σ.

1– On note σ la forme d'aire sur Σ et $\alpha_2 = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ la forme volume standard sur $\mathbb{S}^2$. Montrer que $\nu^*(\alpha_2) = K\sigma$.

2– Montrer que ν est un difféomorphisme local de degré strictement positif.

3– Montrer que Σ a la même caractéristique d'Euler que $\mathbb{S}^2$ et que $\deg \nu = 1$.

4– Montrer que ν est un difféomorphisme.

5– Soit $p = (x_0, y_0, z_0)$ l'unique point tel que $\nu(p) = (0, 0, 1)$. Montrer que, quitte à munir Σ de l'orientation opposée, on a Σ contenue dans $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leqslant z_0\}$.

6– Pour $u_0 \in \Sigma$ et $v \in \mathbb{S}^2$, on note $H(u_0, v) = \{u \in \mathbb{R}^3 \mid \langle u - u_0, v\rangle \leqslant 0\}$. Montrer que $\Sigma \subset \bigcap_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$.

7– Montrer que $\bigcap_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$ est un ensemble convexe ayant pour bord Σ.

Solution :

1– Soit $p \in \Sigma$. Soit (u, v) une base orthonormale de $T_p\Sigma$ dans laquelle $d_p\nu$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Alors

$$\nu^*(\alpha_2)_p(u, v) = (\alpha_2)_{\nu(p)}(d_p\nu(u), d_p\nu(v)) = (\alpha_2)_{\nu(p)}(\lambda u, \mu v) = \lambda\mu = K(p)\sigma_p(u, v).$$

Donc $\nu^*(\alpha_2)_p$ et $K(p)\sigma_p$ coïncident sur $\Lambda^2 T_p\Sigma$, d'où $\nu^*(\alpha_2) = K\sigma$.

2– Comme $K(p) > 0$ pour tout $p \in \Sigma$, $d_p\nu$ s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec λ et μ non nuls, donc $d_p\nu$ est inversible et ν est un difféomorphisme local. De plus,

$$\deg(\nu) \int_{\mathbb{S}^2} \alpha_2 = \int_\Sigma \nu^*(\alpha_2) = \int_\Sigma K\sigma > 0$$

donc $\deg(\nu) > 0$.

3– On a

$$\chi(\Sigma) = \dim(H^0(\Sigma)) - \dim(H^1(\Sigma)) + \dim(H^2(\Sigma)) = 2 - \dim(H^1(\Sigma)) \leqslant \chi(\mathbb{S}^2).$$

De plus,

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma K\sigma = \deg(\nu) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \alpha_2 = \deg(\nu)\chi(\mathbb{S}^2)$$

donc $\chi(\Sigma) \geqslant \chi(\mathbb{S}^2)$. On en déduit $\chi(\Sigma) \geqslant \chi(\mathbb{S}^2) = 2$ et l'égalité $\chi(\Sigma) = \deg(\nu)\chi(\mathbb{S}^2)$ montre que $\deg \nu = 1$.

4– Comme $\nu^*(\alpha_2) = K\sigma$ et $K > 0$, ν préserve l'orientation. Donc $\deg \nu = 1$ est le nombre d'antécédents d'une valeur régulière. Comme ν est un difféomorphisme local, on en déduit que tout point de $\mathbb{S}^2$ est valeur régulière et donc admet exactement un antécédent par ν. L'application ν est donc une bijection et un difféomorphisme local en tout point : c'est donc un difféomorphisme.

5– On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & z \end{array}$$

Comme Σ est compacte, f atteint son maximum. Soit $u = (x_1, y_1, z_1)$ un point en lequel le maximum est atteint. Alors $d_u f_{|T_u\Sigma} = 0$, i.e. $d_u f_{\nu(u)^\perp} = 0$. Comme $df = dz$, $\nu(u)^\perp \subset \ker dz = (0, 0, 1)^\perp$. Par égalité des dimensions, on a égalité des espaces et donc $\nu(u) = (0, 0, 1)$ ou $\nu(u) = (0, 0, -1)$. En considérant le minimum de f, on voit que le maximum et le minimum de f sont obtenus en les points p et q tels que $\nu(p) = (0, 0, 1)$ et $\nu(q) = (0, 0, -1)$. En choisissant l'orientation de Σ de telle sorte à ce que les valeurs propres de d_ν soient positives, on déduit d'une étude en coordonnées locales que le maximum de f est atteint au point p tel que $\nu(p) = (0, 0, 1)$.

6– On fait le même raisonnement avec la fonction $u \mapsto \langle u, \nu(u_0)\rangle$ pour tous les u_0 de Σ.

7– C'est un ensemble convexe comme intersection d'ensembles convexes. Soit $u_0 \in \Sigma$. Soit $u_n = u_0 + \frac{1}{n}\nu(u_0)$. Alors $\langle u_n - u_0, \nu(u_0)\rangle = \frac{1}{n} > 0$ donc $u_n \notin \bigcap\limits_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$. De plus, $u_n \underset{n\to\infty}{\to} u_0$ donc $u_0 \in \overline{\mathbb{R}^3 \setminus \bigcap\limits_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))}$. Comme $\Sigma \subset \bigcap\limits_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0)$, on en déduit $u_0 \in \partial \bigcap\limits_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$ et donc $\Sigma \subset \partial \bigcap\limits_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$.

Réciproquement, soit $u \in \partial \bigcap\limits_{u_0\in\Sigma} H(u_0, \nu(u_0))$. Par compacité de Σ, il existe $u_0 \in \Sigma$ tel que $u \in \partial H(u_0, \nu(u_0))$ i.e. $\langle u - u_0, \nu(u_0)\rangle = 0$, i.e. $u - u_0 \in T_{u_0}\Sigma$. Supposons par l'absurde que $u \neq u_0$. On se donne $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Sigma$ un chemin lisse tel que $c(0) = u_0$, $c'(0) = u - u_0$ (dans l'idée, c va de u_0 vers u). On calcule $\frac{d}{dt}_{|t=0}\langle u - c(t), \nu(c(t))\rangle = -\langle u - u_0, \nu(u - u_0)\rangle + \langle u - u_0, d\nu(u - u_0)\rangle = \langle u - u_0, d\nu(u - u_0)\rangle$. Or l'orientation est choisie de sorte que la seconde forme fondamentale est définie positive. On a donc $\frac{d}{dt}_{|t=0}\langle u - c(t), \nu(c(t))\rangle > 0$, puis $\langle u - c(t), \nu(c(t))\rangle > 0$ pour $t > 0$ assez petit, ce qui est absurde.

4. Courbure de Gauss

1– Calculer la courbure de Gauss de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$.

2– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que la courbure de Gauss $K(x)$ en x soit strictement positive (on pourra considérer un point à distance maximale de l'origine).

3– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte connexe orientée qui n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$. Montrer qu'il existe $x \in S$ tel que $K(x) = 0$.

4– Montrer qu'on peut trouver une surface compacte connexe orientée $S \subset \mathbb{R}^3$ difféomorphe à $\mathbb{S}^2$ qui possède un point de courbure de Gauss nulle.

Solution :

1– L'application de Gauss est l'identité. Il est donc immédiat de calculer que la courbure est constante égale à 1.

2– Comme S est compacte, on peut trouver un point $p \in S$ à distance maximale de l'origine. Quitte à effectuer une rotation et une homotéthie, on peut supposer que $p = (0, 0, 1)$. On se donne $U \subseteq \mathbb{R}^2$ voisinage ouvert de 0 et $z : U \to \mathbb{R}$ une application C^∞ tels que l'application $U \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, z(x, y))$ est une paramétrisation de S au voisinage de p. On a $z(0, 0) = 1$, $dz_{(0,0)} = 0$. On peut donc écrire $z(x,y) = 1 + ex^2 + 2fxy + gy^2 + O(|x,y|^3)$. Quitte à choisir d'autres coordonnées orthonormales directes sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (ce qui n'affecte pas la courbure en p), on peut supposer que $z(x,y) = 1 + ex^2 + gy^2 + O(|x,y|^3)$. On a alors en p que $K(p) = 4eg$ (cf. cours). Par maximalité de la norme en p, on peut écrire $z(x,y) \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Cela force $e \leqslant -\frac{1}{2}$, $g \leqslant -\frac{1}{2}$ puis $K(p) \geqslant 1$.

3– Par le théorème de Gauss-Bonnet et classificiation des surfaces compactes orientables, l'intégrale sur S de la courbure est négative ou nulle (car S n'est pas difféomorphe à $\mathbb{S}^2$). Il existe donc un point y où la courbure est négative ou nulle. Comme la courbure est strictement positive en un point x, la connexité de S assure qu'il existe un point où la courbure s'annule.

4– Il suffit de plonger $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ de sorte qu'il existe un ouvert de $\mathbb{S}^2$ dont l'image est contenue dans un plan.

5. Calcul de courbure

On définit une surface de révolution en se donnant une sous variété connexe $L \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ de dimension 1 et en appelant Σ l'orbite de L sous le groupe des rotations d'axe (Oz). On peut se donner un chemin lisse $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}, s \mapsto (g(s), 0, h(s))$ parcourant L à vitesse 1. On a alors

$$\Sigma = \{(g(s)\cos(\theta), g(s)\sin(\theta), h(s)) \mid s \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}\}$$

L'application $\varphi : (s,\theta) \mapsto (g(s)\cos(\theta), g(s)\sin(\theta), h(s))$ donne une paramétrisation locale de Σ, justifiant que Σ est bien une sous variété de $\mathbb{R}^3$.

1– Montrer que la métrique riemannienne sur Σ s'écrit $ds^2 + g(s)^2 d\theta^2$.

2– Calculer la courbure de Σ en $\varphi(s,\theta)$ en fonction de s et θ.

3– Calculer la courbure d'un tore de révolution muni de la métrique induite par celle de l'espace euclidien. Le théorème de Gauss-Bonnet est-il vérifié ?

Solution :

1– On note $(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \theta})$ la base canonique de $\{(s,\theta) \in \mathbb{R}^2\}$. Il s'agit d'évaluer la métrique riemanienne induite par $\mathbb{R}^3$ dans la base $(\varphi_\star \frac{\partial}{\partial_s}, \varphi_\star \frac{\partial}{\partial_\theta})$ de $T_{\varphi(s,\theta)}\Sigma$.

On a

$$T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s}) = \frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,\theta) = (g'(s)\cos(\theta), g'(s)\sin(\theta), h'(s))$$

et

$$T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta}\varphi(s,\theta) = (-g(s)\sin(\theta), g(s)\cos(\theta), 0).$$

Cela fournit

$$\|T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s})\|^2 = g'(s)^2\cos^2(\theta) + g'(s)^2\sin^2(\theta) + h'(s)^2 = g'(s)^2 + h'(s)^2 = 1,$$

$$\|T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})\|^2 = g(s)^2,$$

$$\langle T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s}), T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})\rangle = -g'(s)g(s)\cos(\theta)\sin(\theta) + g'(s)g(s)\cos(\theta)\sin(\theta) + 0 = 0.$$

D'où le résultat.

2– Notons $X_s = T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s})$ et $X_\theta = T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})$. Ces vecteurs forment une base (directe) de $T_{\varphi(s,\theta)}\Sigma$. Un vecteur normal à Σ est alors donné par le produit extérieur $n_1 = X_s \wedge X_\theta$, ce qui fournit

$$n_1 = \begin{pmatrix} -h'(s)g(s)\cos(\theta) \\ -h'(s)g(s)\sin(\theta) \\ g'(s)g(s) \end{pmatrix}$$

Pour obtenir $\nu_{\varphi(s,\theta)}$, il faut un vecteur de norme 1, et on remarque que

$$\nu_{\varphi(s,\theta)} = \begin{pmatrix} -h'(s)\cos(\theta) \\ -h'(s)\sin(\theta) \\ g'(s) \end{pmatrix}$$

est bien un vecteur normal de norme 1. Calculons la valeur de la seconde forme fondamentale dans la base orthonormée $(X_s, \frac{1}{g(s)}X_\theta)$. Pour commencer, on a

$$d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_s] = \frac{\partial}{\partial s}\nu_{\varphi(s,\theta)} = \begin{pmatrix} -h''(s)\cos(\theta) \\ -h''(s)\sin(\theta) \\ g''(s) \end{pmatrix}$$

et

$$d_{\varphi(s,\theta)}\nu[\frac{1}{g(s)}X_\theta] = \frac{1}{g(s)}\frac{\partial}{\partial\theta}\nu_{\varphi(s,\theta)} = \frac{1}{g(s)}\begin{pmatrix} h'(s)\sin(\theta) \\ -h'(s)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cela donne

$$\langle d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_s], X_s\rangle = -h''(s)g'(s)\cos^2(\theta) - h''(s)g'(s)\sin^2(\theta) + h'(s)g''(s) = -h''(s)g'(s) + h'(s)g''(s),$$
$$\langle d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_s], X_\theta\rangle = h''(s)g(s)\cos(\theta)\sin(\theta) - h''(s)g(s)\cos(\theta)\sin(\theta) + 0 = 0,$$
$$\langle d_{\varphi(s,\theta)}\nu[\frac{1}{g(s)}X_\theta], \frac{1}{g(s)}X_\theta\rangle = \frac{1}{g(s)^2}\left(-h'(s)g(s)\sin^2(\theta) - h'(s)g(s)\cos^2(\theta) + 0\right) = \frac{-h'(s)g(s)}{g(s)^2} = \frac{-h'(s)}{g(s)}.$$

La seconde forme fondamentale est donc diagonale dans la base orthonormée $(X_s, \frac{1}{g(s)}X_\theta)$, et la courbure K en $\varphi(s,\theta)$ vaut alors

$$K(\varphi(s,\theta)) = \frac{-h'(s)}{g(s)}(-h''(s)g'(s) + h'(s)g''(s)) = \frac{h'(s)h''(s)g'(s) - h'(s)^2g''(s)}{g(s)}.$$

On peut simplifier cette expression. Comme $g'(s)^2 + h'(s)^2 = 1$, on obtient en dérivant : $2g'(s)g''(s) + 2h'(s)h''(s) = 0$, donc $h'(s)h''(s) = -g'(s)g''(s)$. D'où

$$\begin{aligned} K(\varphi(s,\theta)) &= \frac{-g'(s)g''(s)g'(s) - h'(s)^2g''(s)}{g(s)} \\ &= \frac{-g'(s)^2g''(s) - (1-g'(s)^2)g''(s)}{g(s)} \\ &= -\frac{g''(s)}{g(s)}. \end{aligned}$$

3– Pour le tore de rayon R et de rayon intérieur ρ, le paramétrage à vitesse 1 du cercle qu'on fait tourner est donné par $(g(s), h(s)) = (R + \rho\cos(s/\rho), \rho\sin(s/\rho))$. On a alors

$$K(\varphi(s,\theta)) = -\frac{g''(s)}{g(s)} = \frac{\cos(s/\rho)}{\rho(R+\rho\cos(s/\rho))}.$$

Dans le cas du tore, le paramétrage

$$\varphi : \begin{array}{ccc} R/2\varphi\rho\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\varphi\mathbb{Z} & \to & \Sigma \\ (s,\theta) & \mapsto & ((R+\rho\cos(s/\rho))\cos(\theta), (R+\rho\cos(s/\rho))\sin(\theta), \rho\sin(s/\rho))) \end{array}$$

est un difféomorphisme. En notant ω_0 la forme d'aire sur le tore, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma K\omega_0 &= \int_s \int_\theta \varphi^*(K\omega_0) \\
&= \int_s \int_\theta \varphi^*(K)\varphi^*(\omega_0) \\
&= \int_s \int_\theta \varphi^*(K) g(s) ds d\theta \\
&= \int_{s=0}^{2\pi\rho} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\cos(s/\rho)}{\rho(R+\rho\cos(s/\rho))}(R+\rho\cos(s/\rho)) ds d\theta \\
&= \int_{s=0}^{2\pi\rho} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\cos(s)}{\rho} ds d\theta \\
&= \int_{s=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} cos(s) ds d\theta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc le théorème de Gauss-Bonnet est bien vérifié.

2. Indications

Exercice 1 :

1.1 : Orthogonalisation de Gram-Schmidt.

1.2 : Remarquer qu'une isométrie directe f de $\mathbb{R}^3$ provient de l'action d'un élément de $SO_3(\mathbb{R})$ (donc est linéaire) pour montrer que $f \circ d\nu_S = d\nu_{f(S)} \circ f$.

1.3 : Montrer que $S =]0,1[^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ est isométrique à un pan de cylindre.

1.4 : Se rappeler les définitions de σ et α en termes de bases orthonormées directes.

Exercice 2 :

2.1 : Il suffit de raisonner localement. Sur un ouvert U assez petit, on peut alors écrire $\alpha = aX^1 + bX^2$ où $a, b \in C^\infty(U)$.

2.2 : Formule de Stokes.

2.3 : localement, la seconde forme fondamentale II_p en un point p est représentée dans la base (X_1, X_2) par une matrice $II_p = \begin{pmatrix} e(p) & f(p) \\ f(p) & g(p) \end{pmatrix}$. Montrer qu'on a localement

$$\Delta f_v = \langle v, \nu \rangle (e+g)\, X^1 \wedge X^2$$

où $\nu : S \to \mathbb{S}^2$ désigne l'application de Gauss.

2.4 : D'après ce qui précède, toute fonction f_v serait constante sur une telle surface.

Exercice 3 :

3.1 : Soit $p \in \Sigma$. Il existe une base orthonormée directe dans laquelle $d\nu_p$ est représentée par une matrice diagonale.

3.2 : Exprimer le degré de ν à l'aide de $\nu^*\alpha_2$.

3.3 : Vérifier d'abord que $\chi(\Sigma) \leqslant \chi(\mathbb{S}^2)$ en revenant à la définition de la caractéristique d'Euler. Appliquer le théorème de Gauss-Bonnet pour obtenir l'inégalité inverse, puis que $\deg \nu = 1$.

3.5 : Considérer l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \Sigma & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & z \end{array}$$

et expliciter l'espace tangent de Σ en un extrémum de f.

3.6 : Utiliser 3.5 et la connexité de Σ.

3.7 : En utilisant la compacité de Σ, montrer qu'un point u du bord vérifie $\langle u - u_0, \nu(u_0) = 0$ pour un certain point $u_0 \in \Sigma$. Montrer alors que $u = u_0$ en considérant un chemin lisse $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Sigma$ tel que $c(0) = u_0$, $c'(0) = u - u_0$ et en utilisant la stricte positivité de la courbure.

Exercice 4 :

4.2 : Soit $p \in S$ à distance maximale de l'origine. Quitte à faire agir une isométrie, puis une homotéthie (ce qui peut affecter la courbure de Gauss, mais pas son signe), on peut supposer $p = (0,0,1)$. En voyant la surface S au voisinage de p comme le graphe d'une fonction $(x,y) \mapsto z(x,y)$, montrer avec un développement limité que $K(p) \geqslant 1$.

4.3 : Se rappeler la classification des surfaces compactes orientables : il n'y a que la sphère et les sommes connexes de tores. Utiliser ensuite la formule de Gauss-Bonnet.

Exercice 5 :

5.1 : Il s'agit de calculer $T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s})$ et $T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})$, leurs normes et leur produit scalaire.

5.2 : Noter $X_s = T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial s})$ et $X_\theta = T_{(s,\theta)}\varphi(\frac{\partial}{\partial \theta})$ et normaliser le produit extérieur $X_s \wedge X_\theta$ pour obtenir une expression explicite de $\nu_{\varphi(s,\theta)}$. Calculer ensuite $d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_s]$ et $d_{\varphi(s,\theta)}\nu[X_\theta]$ et en déduire une expression de la seconde forme fondamentale $d\nu_{\varphi(s,\theta)}$ dans la base orthonormée $X_s, \frac{1}{g(s)}X_\theta$. A la fin (et en utilisant que $g' + h' = 1$) on obtient : $K(\varphi(s,\theta)) = -\dfrac{g''(s)}{g(s)}$

5.3 : Pour montrer que $\int_\Sigma K\omega_0 = 0$ et ainsi vérifier la formule de Gauss-Bonnet, tirer en arrière la forme $K\omega_0$ par une paramétriation globale du tore donnée par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} R/2\varphi\rho\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\varphi\mathbb{Z} & \rightarrow & \Sigma \\ (s,\theta) & \mapsto & ((R+\rho\cos(s/\rho))\cos(\theta), (R+\rho\cos(s/\rho))\sin(\theta), \rho\sin(s/\rho))) \end{array}$$

Il s'agit alors de montrer que $\int_s \int_\theta \varphi^*(K\omega_0) = 0$.